Ciągłość *versus* kontinuum. Rewizja stanowiska Zenona z Elei i jego współczesnych krytyków

Piotr Błaszczyk

Paradoksy ruchu Zenona z Elei rozpatrywane są z różnych stron: logicznej, matematycznej, fizycznej, historycznej. W artykule zajmujemy się matematycznymi aspektami paradoksu *Achilles*. Sformułowanie paradoksu ([Arystoteles, *Fizyka*, 239b]) oraz argumentację Arystotelesa ([*Fizyka*, 233a]) oceniamy z punktu widzenia *Elementów* Euklidesa, natomiast jego klasyczne rozwiązanie ([Ajdukiewicz 1948], [Grünbaum 1967]) – z punktu widzenia najnowszej matematyki. Pokazujemy, że zarówno w samym sformułowaniu, jak i w klasycznym rozwiązaniu występuje nieuzasadniona przesłanka: aby prześcignąć żółwia, Achilles musi go najpierw dogonić. Podajemy matematyczną interpretację tej przesłanki oraz wykazujemy jej błędność. Na tym polega nie tyle rozwiązanie, co „zablokowanie" paradoksu *Achilles*, jakie przedstawiamy w artykule.

Literatura dotycząca paradoksów Zenona jest przeogromna, dlatego poprzestajemy na wskazaniu najnowszej monografii poświęconej wszelkim paradoksom, zawierającej bogatą bibliografię.[1]

1. Zacznijmy od źródła. Arystoteles, w tłumaczeniu Jacka Langa, pisze:

„Drugi to tak zwany 'Achilles' – polega na tym, że [1] najszybszy biegacz nigdy nie może prześcignąć najwolniejszego. [2] Goniący musi bowiem najpierw dotrzeć do punktu, który uciekający opuścił, tak więc uciekający musi być z przodu. [3] Jest to w zasadzie ten sam argument, co w dowodzie opierającym się na podziale na połowy, [4] choć różni się tym, że dodawane wielkości [$\mu\varepsilon\gamma\varepsilon\theta o\varsigma$] nie są dzielone na pół [$\delta\iota\chi\alpha$]".[2]

[1] Zob. [Łukowski 2006].

[2] Arystoteles, *Fizyka*, 239b; tłumaczenie za: [Kirk et al. 1999], s. 271; numery zdań oraz słowa greckie zostały dodane – P.B.

W tłumaczeniu Kazimierza Leśniaka „wielkość” zastąpiono „odcinkiem przestrzeni”:

„Drugi argument, tzw. 'Achilles', sprowadza się do tego, że w wyścigu najszybszy biegacz, nie może nigdy prześcignąć najwolniejszego, bo ścigający musi najpierw osiągnąć punkt, z którego ścigany już wyruszył, tak że powolniejszy ma zawsze pewne wyprzedzenie. Argument w gruncie rzeczy ten sam, co i poprzedni dotyczący dychotomii, z tą tylko różnicą, że kolejno dodawane odcinki przestrzeni nie są dzielone na połowę”.[3]

I jeszcze tłumaczenie Kazimierza Mrówki, sporządzone na użytek niniejszego artykułu, w którym zachowane jest pojęcie „wielkości”, a nie ma pojęcia „punktu”:

„Drugi zaś to tak zwany 'Achilles'. Jest to ten oto, że najpowolniejszy nigdy nie zostanie przegoniony przez najszybszego. Albowiem przedtem ścigający dotrzeć musi tam, skąd właśnie uciekający wyruszył, toteż zawsze powolniejszy ma koniecznie pewne wyprzedzenie. Jest to w gruncie rzeczy ta sama myśl, co w dychotomii, z tą różnicą, że nie dzieli się na dwie części dodawanej wielkości”.

Przyjmujemy, że zdania [1],[2] zawierają tezę i argumentację Zenona, [3],[4] – interpretację Arystotelesa. Rozwiązanie klasyczne w osobliwy sposób interpretuje pojęcie „dodawania” występujące w [4].

1.1 Tezy Zenona tak odczytujemy:
(a) Aby „prześcignąć” żółwia („najpowolniejszego”), Achilles („najszybszy”) musi go najpierw dogonić.
(b) Wyznaczany jest ciąg punktów – „tam, skąd właśnie uciekający wyruszył”.
(c) W żadnym z tych punktów Achilles nie dogania żółwia – „zawsze powolniejszy ma koniecznie pewne wyprzedzenie”.
(d) W którym zatem punkcie Achilles dogania żółwia?

Przesłanka (a) nie jest oczywiście sformułowana wprost, ale tradycja podążyła tym właśnie tropem. Zdania (b),(c) odpowiadają [2]. Zdanie (d) dopowiadamy, aby uwyraźnić założenia rozwiązania klasycznego, współcześnie bowiem nikt nie widzi niczego paradoksalnego w tym, że w każdym z punktów wyznaczonych w zdaniu (b) Achilles jest przed żółwiem. Zdanie to rozumiemy matematycznie: jak wyznaczyć punkt, w którym Achilles dogania żółwia.

W argumentacji Zenona znajdujemy więc nie tyle paradoks, co zadanie,

[3]Arystoteles, *Fizyka*, s. 148-149.

problem.

W opisie matematycznym zdań [1],[2] przyjmujemy, że zdefiniowany przez Zenona wyścig odbywa się w przestrzeni Euklidesa, co znaczy, że wykonalne są w niej klasyczne konstrukcje geometryczne,[4] ale nie musi być ona ciągła w sensie Dedekinda.[5]

1.2 Według Arystotelesa paradoks polega na tym, że w skończonym czasie nie można „dotknąć" nieskończonej ilości punktów:

„Dowód Zenona opiera się na fałszywym założeniu, że nie można minąć lub dotknąć każdej rzeczy z nieskończonej ich liczby w ograniczonym czasie".[6]

Rozwiązanie Arystotelesa oparte jest na szczególnym rozumieniu kontinuum oraz dystynkcji: nieskończona ilość („nieskończone ze względu na krańce", „liczbowo nieskończone") – nieskończona podzielność:

„Dwojako bowiem mówi się, że nieskończone są długość i czas lub ogólnie cokolwiek ciągłego. Jest tak ze względu na podzielność, albo ze względu na krańce. Jest więc wprawdzie niemożliwe, by jakaś rzecz w ograniczonym czasie dotknęła liczbowo nieskończonego, ale jest to możliwe w przypadku nieskończonych pod względem podzielności".[7]

1.3 Rozwiązanie klasyczne polega na wyznaczeniu punktu, w którym Achilles dogania żółwia; punkt ten jest sumą szeregu liczbowego. Odpowiednio argument Zenona sprowadzany jest do sumowania nieskończonej ilości składników:

„błąd, który Zenon w swym rozumowaniu popełnił [...] leży w przyjęciu, iż suma nieskończenie wielu odcinków czasu, z których każdy posiada długość określoną [...], nie może być skończona",[8]

„Do these infinite progressions of space and time intervals show, as Zeno claims, that there is no point at which Achilles comes abreast of the tortoise at a point A' ? [...] Contrary to Zeno, Achilles starting at point A at time $T_0 = 0$ and moving at the velocity V, can reach rendezvous point A' at a time T".[9]

W rozwiązaniu klasycznym wyścig Achillesa z żółwiem jest przeniesiony na oś liczb rzeczywistych, a punkt, w którym Achilles dogania żółwia jest

---

[4]Zob. Euklides, *Elementy*, Księga I, Postulaty 1-3.

[5]Zob. [Borsuk, Szmielew, 1972], §93.

[6][Kirk et al. 1999], s. 269.

[7][Kirk et al. 1999], s. 269-270.

[8][Ajdukiewicz 1948], s. 93.

[9][Grünbaum 1967], s. 109.

definiowany jako granica ciągu i wyznaczany za pomocą operacji supremum (aksjomatu ciągłości).

Przejdźmy do bardziej szczegółowego opisu.

2. Zdanie [2] opiszemy posługując się podstawowymi pojęciami mechaniki Newtona. Niech w chwili rozpoczęcia biegu Achilles jest w punkcie $A_1 = A$, żółw – w punkcie $Z_1 = Z$, niech przewaga żółwia wynosi $d_1 = d$, tj. $Z_1 = A_1 + d_1$. Niech Achilles biegnie ze stałą prędkością V, żółw – ze stałą prędkością v, gdzie $V > v$. W czasie $t_1 = \frac{d_1}{V}$ Achilles osiągnie punkt $A_2 = Z_1$, zaś żółw punkt $Z_2 = Z_1 + d_2$, gdzie $d_2 = vt_1 = v\frac{d_1}{V}$. Powtarzając tę procedurę $n-$razy dostajemy, że gdy Achilles będzie w punkcie $A_{n+1} = A_n + d_n = A_1 + d_1 + ... + d_n$, to żółw będzie w punkcie $Z_{n+1} = Z_n + d_{n+1} = A_{n+1} + d_{n+1}$, gdzie $d_{n+1} = vt_n = v\frac{d_n}{V}$.

Mamy tu zatem ciąg odległości dany wzorem $d_{n+1} = d\frac{v^n}{V^n}$, jakie w chwilach $t_n = \frac{d_n}{V}$ dzielą Achillesa i żółwia oraz dwie definicje rekurencyjne:

$$\begin{cases} A_1 = A, & Z_1 = Z, \\ A_{n+1} = A_n + d_n; & Z_{n+1} = Z_n + d_{n+1}. \end{cases}$$

Stąd kolejnym położeniom Achillesa odpowiada ciąg

$$(A_n) = (A_1, A_2, A_3, ...),$$

kolejnym położeniom żółwia – ciąg

$$(Z_n) = (Z_1, Z_2, Z_3, ...) = (A_2, A_3, A_4, ...) = (A_{n+1}).$$

Stwierdzeniu „zawsze powolniejszy ma koniecznie pewne wyprzedzenie” odpowiada fakt $Z_n = A_{n+1} > A_n$, dla każdego n; „zawsze” oznacza tu w każdej z wyróżnionych chwil t_n, a nie w dowolnej chwili.

Przyjmując, że na starcie Achilles jest w punkcie 0, dostajemy

$$(A_n) = (0, d_1, d_1 + d_2, ...), \quad (Z_n) = (d_1, d_1 + d_2, d_1 + d_2 + d_3, , ...),$$

lub inaczej $A_1 = 0,\ A_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} d_i$ oraz $Z_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

2.1 Nie jest to oczywiście rekonstrukcja, a jedynie parafraza argumentacji Zenona. Będzie ona przydatna przy ocenie rozwiązania klasycznego. Dla oceny interpretacji Arystotelesa istotne jest zaś to, co następuje: Wyznaczając kolejne położenia Achillesa, Zenon posługuje się pojęciem ruchu. Rozumowania, w których za pomocą pojęcia ruchu, czy urządzeń mechanicznych wyznaczane są punkty znane były matematyce greckiej: są to np. klasyczne i nieklasyczne konstrukcje geometryczne, Archimedesa definicja spirali.[10] Jednakże rozumowanie z paradoksu *Achilles* nie odpowiada niczemu, co znamy z greckiej matematyki, a właśnie w kontekście wyznaczania punktu widzimy problem postawiony przez Zenona, powtórzmy: jak wyznaczyć punkt, w którym Achilles dogania żółwia? Tak postawiony problem był nie do rozwiązania metodami dostępnymi matematyce greckiej.

3. Ocenę interpretacji Arystotelesa poprzedzimy prezentacją jego rozumienia kontinuum. Najpierw przykłady.

„Ilość jest bądź rozdzielna, bądź ciągła. [...] Przykładem ilości rozdzielnej jest liczba i mowa, przykładem ilości ciągłej jest linia, powierzchnia, ciało, a ponadto czas i miejsce”.[11]

„Ilość ciągła” to inaczej wielkość ($\mu\varepsilon\gamma\varepsilon\theta o\varsigma$). „Linia, powierzchnia i ciało” to obiekty geometryczne: odcinek, figura płaska, bryła. Podobnie jest w *Elementach*: odcinek, figura, bryła, a ponadto kąt i łuk to przykłady wielkości.

Tak u Arystotelesa, jaki i u Euklidesa każda wielkość jest kontinuum. Arystoteles ponadto dowodzi, że kontinuum są także czas i ruch.[12]

3.1 Arystotelesa opis kontinuum streszcza się w trzech tezach:
(1) „kontinuum składa się z części”,[13]
(2) „ich stykające się granice są te same i zawierają się w sobie nawzajem”,[14]
(3) części te są „podzielne w nieskończoność”.[15]

Objaśnimy to na przykładzie odcinka.

(Ad 1) „Podzielność” odcinka L oznacza, że $L = L_1 + L_2$, dla pewnych odcinków L_1, L_2. „Podzielność” to to samo, co „składanie się z części”: L_1, L_2 to „części”, zaś L to „całość”.

(Ad 2) Tak u Arystotelesa, jaki i u Euklidesa odcinek to odcinek domknięty.[16] Niech „krańcami” L są punkty a, c, tj. $L = \langle a, c\rangle$, gdzie $\langle a, c\rangle$ oznacza parę uporządkowaną, i odpowiednio $L_1 = \langle a, b\rangle$, $L_2 = \langle b, c\rangle$. To, że „stykające się granice” L_1, L_2 „są te same i zawierają się w sobie nawzajem” oznacza, że

[10] Zob. np. [Bos 2001], rozdz. 2–3.

[11] Arystoteles, *Kategorie*, 6.4b.

[12] Zob. np. Arystoteles, *Fizyka*, 231b – 232a.

[13] Arystoteles, *Fizyka*, 231b.

[14] Arystoteles, *Fizyka*, 227a.

[15] Arystoteles, *Fizyka*, 231b, 207b.

[16] Zob. „wszelkie kontinuum jest takie, że między jego krańcami jest coś pośredniego”, Arystoteles, *Fizyka*, 233a; „Krańcami odcinka są punkty”, Euklides, *Elementy*, Księga I, def. 3.

koniec odcinka L_1, tj. b, jest jednocześnie początkiem odcinka L_2.[17]
(Ad 3) „Nieskończona podzielność” L oznacza, że każda z „części” L_1, L_2 może być przedstawiona podobnie jak L, tj. $L_1 = L_1' + L_1''$, $L_2 = L_2' + L_2''$, i dalej to samo w odniesieniu do L_1', L_1'', L_2', L_2''.

To, co u Arystotelesa jest tezą filozoficzną, u Euklidesa jest twierdzeniem,

„Podziel na połowy [$\delta\iota\chi\alpha$] odcinek”,[18]

w dowodzie którego opisana jest konstrukcja zwana dychotomią odcinka. Łatwo widać, że dla dowolnej liczby naturalnej n, powtarzając n razy dychotomię można wyznaczyć n punktów, a tym samym $n + 1$ odcinków, z których „składa się” L.

Twierdzenie Arystotelesa, że kontinuum L jest „nieskończenie podzielne” oznacza, że na odcinku L można wyznaczyć dowolną – „nieskończoną” – ilość punktów.[19] W tym też sensie kontinuum L jest „nieskończone pod względem podzielności”.

3.2 Przechodzimy do interpretacji zdań [3], [4], tym razem w tłumaczeniu Kazimierza Mrówki, powtórzmy zatem

„Jest to w gruncie rzeczy ta sama myśl, co w dychotomii, z tą różnicą, że nie dzieli się na dwie części dodawanej wielkości”.

Na tej podstawie *Dychotomię* według Arystoteles oddajemy parafrazą:

w dychotomii dzieli się na dwie części dodawaną wielkość.

I odpowiednio nasza interpretacja *Dychotomii* jest taka: Niech C oznacza kontinuum. Poddając C dychotomii otrzymujemy $C = C_1 + C_2$. „Dodawana wielkość” to C_1 albo C_2. Tak zatem albo C_1, albo C_2 jest dzielone „na dwie części”, a dalej każda z nich dzielona jest na dwie, itd. Tym sposobem na C można wyznaczyć nieskończenie wiele punktów.[20]

Z perspektywy Arystotelesa istotnie nie ma różnicy między *Achillesem* a *Dychotomią*: w obu paradoksach na kontinuum wyznaczanych jest nieskończenie wiele punktów. Różnica polega tylko na tym, że w *Achillesie* kontinuum jest dzielone inaczej niż w *Dychotomii*: np. na dwie nierówne części,[21] na

[17]U Arystotelesa występuje liczba mnoga („stykające się granice”), w naszym opisie, gdy stosowany jest język teorii mnogości, jest to jeden i ten sam punkt.

[18]Euklides, *Elementy*, Księga I, tw. 10.

[19]Niektórzy nazywają to „nieskończonością potencjalną”. Z punktu widzenia klasycznej matematyki mamy tu rekurencyjną definicję ciągu odcinków.

[20]W przyjętej interpretacji nie ma znaczenia, czy dychotomii poddawana jest „część” C_1, czy C_2. Por. „Paradoks dychotomii – trzecia postać”, [Łukowski 2006], s. 469-470.

[21]Zob. Euklides, *Elementy*, Księga II, tw. 11, gdzie opisany jest tzw. złoty podział od-

więcej niż dwie części.[22]

W proponowanej wykładni poglądów Arystotelesa, ani w *Achillesie*, ani w *Dychotomii* nie ma żadnego sumowania odcinków: „dodawana wielkość" to „część" „całości", jaką jest kontinuum, nie zaś ciąg odcinków, które należy „zsumować" przykładając koniec jednego, do początku drugiego.

Jednakże z punktu widzenia matematyki greckiej jest istotna różnica między *Achillesem* a *Dychotomią*: w *Dychotomii* nieskończenie wiele punktów jest wyznaczanych (1) na kontinuum – odcinku drogi, która ma być pokonana, (2) na podstawie klasycznej konstrukcji geometrycznej, w Achillesie natomiast punkty wyznaczane są na półprostej, a w *Elementach* nie znajdujemy konstrukcji polegającej na podziale półprostej – wszelki podziały są podziałami odcinków.

4. Rozwiązanie klasyczne. Ajdukiewicz traktuje *Dychotomię* i *Achillesa* łącznie:

„Drugie rozumowanie Zenona, znane pod nazwa 'Achilles i żółw', jest tylko pewną parafrazą rozumowania rozważanego przed chwilą i podlega – *mutatis mutandis* – tym samym zarzutom, co i tamto".[23]

W obydwu przypadkach „błąd Zenona" jest ten sam:

„czas potrzebny na przebycie całej drogi l równy jest sumie czasów potrzebnych na przebycie wszystkich jej części; czas ten jest więc równy sumie nieskończenie wielu odcinków czasowych, z których każdy ma określone trwanie. Suma jednak nieskończenie wielu odcinków czasowych, z których każdy ma określone (różne od zera) trwanie, jest nieskończenie długa".[24]

Rozwiązanie, zdaniem Ajdukiewicza, jest proste:

„Dla Zenona suma $\frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \frac{t}{16} + \ldots$ nie może mieć wartości skończonej. Elementarna teoria nieskończonych szeregów geometrycznych poucza, iż suma, o którą tu chodzi, jest skończona i wynosi t".[25]

„Elementarna teoria szeregów" oznacza tu fragment analizy rzeczywistej, gdzie suma nieskończenie wielu składników $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest definiowana jako

cinka.

[22]Zob. Euklides, *Elementy*, Księga VI, tw. 9, gdzie odcinek jest dzielony na dowolną ilość części.

[23][Ajdukiewicz 1948], s. 93.

[24][Ajdukiewicz 1948], s. 91.

[25][Ajdukiewicz 1948], s. 93.

granica ciągu sum częściowych ($\sum_{i=1}^{n} a_i$), tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n =_{df} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Ajdukiewicz sprowadza więc *Dychotomię* i *Achillesa* do sumowania nieskończenie wielu składników, a jednocześnie sugeruje, że rekonstruuje zachowane argumenty Zenona.

Podobnie kontrowersyjne są uwagi Ajdukiewicza dotyczące interpretacji Arystotelesa. Czytamy:

„Błąd Zenona wykrył i zupełnie trafnie opisał Arystoteles, który oczywiście nie znał jeszcze teorii szeregów nieskończonych, ale mimo to uchwycił rzecz istotną. Powiada mianowicie Arystoteles, iż Zenon przyjmuje, że drogę o skończonej długości l podzielić można na nieskończenie wiele części $\frac{l}{2}, \frac{l}{4}, \frac{l}{8}$ ..., nie chce jednak przyjąć, iż skończenie długi czas daje się też podzielić na nieskończenie wiele różnych od zera i określonych części $\frac{t}{2}, \frac{t}{4}, \frac{t}{8}$ .... Nie ma żadnej racji – mówi Arystoteles – dla której miałoby się uważać, że skończenie długa droga l składać się może z nieskończenie wielu części, z których każda jest równa połowie poprzedniej, a nie godzić się na to, że skończenie długi czas t składa się (a więc jest sumą) z nieskończenie wielu części, z których jest równa połowie poprzedniej".[26]

Widzimy tu, po pierwsze, bezkrytyczne posługiwanie sie pojęciem „części". Po drugie, u Arystotelesa rzecz bynajmniej nie jest oczywista (*vide* „nie ma żadnej racji"), ale wynika stąd, że droga, czas i ruch są kontinuum, co w *Fizyce* jest dowodzone. Po trzecie wreszcie, trudno przyznać rację Arystotelesowi, bo posługuje się on swoistym rozumieniem kontinuum; w matematyce klasycznej, na którą powołuje się Ajdukiewicz, obowiązuje inne rozumienie, mianowicie (najkrócej jak to możliwe): modelem kontinuum są liczby rzeczywiste (oś liczb rzeczywistych, odcinek domknięty liczb rzeczywistych), a podstawową własnością kontinuum jest ciągłość (np. aksjomat Dedekinda), nie zaś „nieskończona podzielność".

4.1 Grünbaum nie rekonstruuje paradoksów i wprost deklaruje, że zajmują go tylko takie parafrazy, który mogą stwarzać problem dla fizyki matematycznej,[27] jednocześnie, podobnie jak Ajdukiewicz, w analogiczny sposób traktuje *Dychotomię* i *Achillesa*.

[26][Ajdukiewicz 1948], s. 93.

[27][Grünbaum 1967], s. 37; zob także: „I shall disregard entirely whether the various formulations of the paradoxes of motion which have been attributed to Zeno are historically

Przy oznaczeniach V – prędkość Achillesa, v – prędkość żółwia, gdzie $V > v$, $d_1 = d$ – przewaga, jaką na starcie otrzymuje żółw, definiując ciąg „odcinków przestrzennych i czasowych" $d_{n+1} = d\frac{v^n}{V^n}$, $t_{n+1} = \frac{d}{V}\frac{v^n}{V^n}$, Grünbaum pyta:

„Do these infinite progressions of space and time intervals show, as Zeno claims, that there is no point at which Achilles comes abreast of the tortoise at a point *A'* ?".[28]

I odpowiada:

„Contrary to Zeno, Achilles starting at point A at time $T_0 = 0$ and moving at the velocity V, can reach rendezvous point *A'* at a time T which is the earliest instant after a progression of decreasing time intervals whose *durations* $t_1, t_2, t_3, ...$ are $\frac{d}{V}, \frac{d}{V}\frac{v}{V}, \frac{d}{V}\frac{v^2}{V^2}, ...$ and which converge to zero in the manner of geometric progression. That there is such an earliest instant T is evident from the fact that for every n, the sum S_n of the first n terms of the duration numbers t_n is less than $\frac{d}{V-v}$".[29]

Następnie wyznacza czas T, po którym Achilles dogoni żółwia oraz punkt A', w którym go dogoni:

„Hence $T = \frac{d}{V}(1 + \frac{v}{V} + \frac{v^2}{V^2} + ...)$. Accordingly $T = \frac{d}{V-v}$ [...] Their initial separation is d, Achilles' Newtonian velocity with respect to the turtle is $V-v$, and hence the time to reach the tortoise when they are both adjacent to the point *A'* on the ground is given by the quotient of these two magnitudes. The point A' reached by Achilles after a finite time T at the instant T is the first space point beyond a progression of decreasing space intervals whose lengths [...] are $d, d\frac{v}{V}, d\frac{v^2}{V^2}, ...$ and converge to zero in the manner of geometric progression. These $\aleph_0$ space intervals collectively fit into the interval AA'".[30]

4.2 W rozwiązaniu klasycznym samo sformułowanie, jak i rozwiązanie paradoksów jest przeprowadzane w ciele liczb rzeczywistych.[31] Aby wyznaczyć punkt, w którym Achilles dogania żółwia wykorzystywany jest aksjomat

---

authentic. And the version of each particular paradox that I shall examine critically will be one which, I believe, merits consideration in the context of modern science" [Grünbaum 1967], s. 64.

[28] [Grünbaum 1967], s. 107.

[29] [Grünbaum 1967, s. 107-108.

[30] [Grünbaum 1967, s. 108.

[31] Zauważmy, że Grünbaum używa słowa magnitude (*vide* „magnitude *d*", „the quotient of these two magnitudes", tj. $\frac{d}{V-v}$), ale w jego wywodzie znaczy to ni mniej, nie więcej jak liczba rzeczywista.

ciągłości pod postacią zasady supremum (*vide* „the earliest instant after a progression of decreasing time intervals"), aby pokazać, że ciąg (q^n), dla $|q| < 1$, jest zbieżny do zera należy skorzystać z aksjomatu Archimedesa. Przyjmując, że punkt, w którym Achilles dogania żółwia oznaczymy jako A', ciąg kolejnych położeń Achillesa – jako (A_n), kolejnych położeń żółwia – (Z_n), dostajemy

$$A' = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} d_i, \qquad \text{gdzie } d_{n+1} = d\frac{v^n}{V^n}.$$

Ani Ajdukiewicz, ani Grünbaum nie zdają sprawy, z jakich założeń korzystają wyznaczając punkt, w którym Achilles dogania żółwia.[32]

5. Argumentację Zenona przedstawiliśmy wyżej w kontekście greckiej geometrii, rozwiązanie klasyczne natomiast sam paradoks, jak i jego rozwiązanie formułuje w ciele liczb rzeczywistych. Aby porównać te dwa rozumowania spróbujemy znaleźć dla nich pewien *neutralny grunt*, który uszanuje specyfikę każdej z tych argumentacji. Naturalnym kandydatem jest tu teoria ciał uporządkowanych.

Od czasu *Grundlagen der Geometrie* Hilberta teoria ciał uporządkowanych jest wykorzystywana w geometrii. Ciała uporządkowane $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$, w których dla każdego $a > 0$ istnieje pierwiastek $\sqrt{a}$, nazywane są euklidesowymi. W takich ciałach wykonalne są klasyczne konstrukcje geometryczne.[33] Przyjmujemy zatem, że płaszczyzna Euklidesa, to zbiór $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$, gdzie $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem euklidesowym; wiadomo, że nie musi być ono ciągłe.

Teorię granic można rozwinąć w dowolnym ciele uporządkowanym, ale dopiero przy szczególnych założeniach dotyczących porządku można wykazać zbieżność pewnych ciągów, np. ciągów Cauchy'ego.[34] Rozwiązanie klasyczne jest możliwe dzięki temu, że radykalnie zmieniane są założenia; dodając

[32]Trzeba przyznać, że nawet u klasyków polskiej matematyki nie jest jasno powiedziane, dlaczego ciąg geometryczny (q^n), dla $|q| < 1$, jest zbieżny do zera. Np. w [Kuratowski 1971] wynika to z faktu, który jest podany bez dowodu, $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. Jest to w istocie tylko inna postać aksjomatu Archimedesa, ale w wykładzie Kuratowskiego nie wspomina się ani o aksjomacie Archimedesa, ani o tym, że wynika on z aksjomatu ciągłości. Zob. [Kuratowski 1971], s. 31-32. Zob. także [Leja 1979], ss. 51,55, gdzie bez dowodu przyjmuje się, że $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, co jest jeszcze inną postacią aksjomatu Archimedesa, i na tej podstawie pokazuje się zbieżność do zera ciągu $(\frac{1}{2^n})$.

[33]Zob. [Borsuk, Szmielew 1972], §93, [Hartshorne 2000], rozdz. 3.

[34]Zob. np. [Błaszczyk 2007], rozdz. 7.

aksjomat ciągłości zyskuje się nowy sposób wyznaczania punktów: np. ciąg (a_n) rosnący i ograniczony z góry wyznacza punkt $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, ciąg (b_n) spełniający warunek Cauchy'ego wyznacza granicę, czyli punkt $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Tym neutralnym gruntem, na którym chcemy porównać argumentację Zenona i rozwiązanie klasyczne jest ciało niestandardowych liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}^*, \oplus, \otimes, 0^*, 1^*, \prec)$. Jest to, po pierwsze, ciało euklidesowe.[35] Po drugie, chociaż ciało to jest rozszerzeniem ciała liczb rzeczywistych, a zatem nie jest ciągłe, to w analizie niestandardowej można rekonstruować rozumowania klasycznej analizy, w szczególności przejścia graniczne,[36] można też sumować „nieskończenie wiele składników".[37] W związku z tym pokażemy, że po wysumowaniu wszystkich odcinków d_n, żółw ciągle jest przed Achillesem i ów „radvezvous point A'" nie jest tym, w którym Achilles dogania żółwia.[38]

5.1 Analizą niestandardową posłużymy się także i w tym celu, aby odsłonić (niepisane) założenie samego sformułowania paradoksu, które już w sposób jawny występuje w rozwiązaniu klasycznym: aby prześcignąć żółwia, Achilles musi go najpierw dogonić. Pokażemy, iż wcale tak być nie musi: może być tak, że Achilles przegania żółwia i nie istnieje punkt, w którym go dogania. Przykład, który podamy opiera się przede wszystkim na odróżnieniu ciągłości ruchu od ciągłości czasu i przestrzeni.

U Arystotelesa, jak pamiętamy, czas, przestrzeń i ruch są ciągłe w tym samym sensie. W rozwiązaniu klasycznym zakłada się ciągłość czasu i przestrzeni, a pojęcie ruchu gdzieś znika i nie wpływa na przebieg rozumowania.

W matematyce, poczynając od XIX wieku, odróżnia się ciągłość funkcji od ciągłości jej dziedziny. Gdy więc dana jest funkcja $f : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$, gdzie $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem uporządkowanym, wtedy ciągłość dziedziny, to ciągłość zbioru uporządkowanego $(\mathbb{F}, <)$, natomiast ciągłość funkcji f oddawana jest definicją Cauchy'ego (czy ogólniej: przeciwobraz zbioru otwartego jest zbiorem otwartym, gdzie topologia zadana jest przez porządek w ciele).

Przyjmując teraz, że ruchowi odpowiada funkcja ciągła, uzasadnienie naczelnej przesłanki rozwiązania klasycznego, tej mianowicie, że musi istnieć punkt, w którym Achilles dogania żółwia, w ramach klasycznej analizy matematycznej można tak przedstawić: Niech funkcja $Z(t)$ opisuje położenie żółwia, $A(t)$ – położenie Achillesa. Funkcje te są ciągłe, zatem i funkcja

[35] Zob. pkt. 6.
[36] Zob. pkt. 6.2.
[37] Zob. pkt. 6.3.
[38] Zob. pkt. 6.4.

$(Z - A)(t)$ jest ciągła. Są chwile, w których żółw jest przed Achillesem, tj. $(Z - A)(t) > 0$, są chwile, w których Achilles jest przed żółwiem, tj. $(Z - A)(t) < 0$, musi zatem istnieć punkt t_0, w których Achilles dogania żółwia, tj. $(Z - A)(t_0) = 0$.

Generalnie chodzi tu zatem o własność przyjmowania wartości pośrednich, tzw. własność Darboux. Funkcje rzeczywiste ciągłe istotnie mają tę własność, dlatego w klasycznej analizie, zakładając że ruch jest ciągły i Achilles przegania żółwia, musi istnieć punkt, w którym go dogania.

Ale własność Darboux nie jest własnością funkcji ciągłych niezależnie od dziedziny. Niżej podamy przykład funkcji ciągłej na zbiorze $\mathbb{R}^*$, która nie ma własności Darboux.[39] Gdyby zatem wyścig Achillesa i żółwia był opisywany w analizie niestandardowej, to może być tak, że ruch Achillesa $a(t)$ i żółwia $z(t)$ są ciągłe, czas, tj. oś $(\mathbb{R}^*, \prec)$, nie jest ciągły, są chwile, w których żółw jest przed Achillesem, tj. $(z - a)(t) \succ 0^*$, są chwile, w których Achilles jest przed żółwiem, tj. $(z-a)(t) \prec 0^*$, a jednocześnie nie istnieje punkt, w którym Achilles dogania żółwia, tj. $\forall t \in \mathbb{R}^*[(z - a)(t) \neq 0^*]$.

6. Niech $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem liczb rzeczywistych, $\mathcal{F}$ – niegłównym ultrafilterem na $\mathbb{N}$.[40] Relacja

$$(r_n) \equiv (s_n) \leftrightarrow_{df} \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{F}$$

jest równoważnością na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zbiór niestandardowych liczb rzeczywistych $\mathbb{R}^*$ definiujemy jako zbiór ilorazowy $\mathbb{R}^* =_{df} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\equiv}$.

Dodawanie, mnożenie i porządek dane są definicjami

$$[(r_n)] \oplus [(s_n)] =_{df} [(r_n + s_n)], \qquad [(r_n)] \otimes [(s_n)] =_{df} [(r_n \cdot s_n)],$$

$$[(r_n)] \prec [(s_n)] \leftrightarrow_{df} \{n \in \mathbb{N} : r_n < s_n\} \in \mathcal{F}.$$

Standardową liczbę rzeczywistą r identyfikujemy z klasą równoważności r^* ciągu stałego $(r, r, ...)$, tj. $r^* =_{df} [(r, r, ...)]$.
Twierdzenie $(\mathbb{R}^*, \oplus, \otimes, 0^*, 1^*, \prec)$ jest ciałem uporządkowanym, niearchimedesowym.

Dla $[(r_n)] \succ 0^*$ liczba $[(s_n)] =_{df} [(\sqrt{r_n})]$ spełnia równanie $[(s_n)] \otimes [(s_n)] = [(r_n)]$, co znaczy, że $(\mathbb{R}^*, \oplus, \otimes, 0^*, 1^*, \prec)$ jest ciałem euklidesowym.

[39] Zob. pkt. 6.1.

[40] Fakty z analizy niestandardowej referujemy na podstawie [Lindstrøm 1988], [Goldblatt 1998], [Błaszczyk 2007].

6.1 Zbiór niestandardowych liczb rzeczywistych nieskończenie małych Ω dany jest definicją

$$x \in \Omega \leftrightarrow_{df} \forall r \in \mathbb{R}_+[\ |x| \prec r^*\ ].$$

Przykład. Gdy $(r_n) \subset \mathbb{R}$ oraz $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, wtedy $[(r_n)] \in \Omega$.

W $\mathbb{R}^*$ definiujemy relację „nieskończenie blisko”

$$x \approx y \leftrightarrow_{df} x - y \in \Omega.$$

Przykład. Gdy $(r_n), (s_n) \subset \mathbb{R}$ oraz $\lim_{n\to\infty} r_n = s = \lim_{n\to\infty} s_n$, dla pewnego $s \in \mathbb{R}$, wtedy $[(r_n)] \approx [(s_n)]$.

Para $(\mathbb{R}^*_- \cup \Omega, \mathbb{R}^*_+ \setminus \Omega)$ wyznacza lukę w zbiorze $(\mathbb{R}^*, \prec)$, tj. ani w klasie dolnej nie ma elementy największego, ani w klasie górnej nie ma elementu najmniejszego. I już w tym miejscu możemy zdefiniować funkcję ciągłą, która nie ma własności Darboux, mianowicie

$$\chi(t) = \begin{cases} t - 1^*, & \text{dla } t \in \mathbb{R}^*_- \cup \Omega, \\ t, & \text{dla } t \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dla $t \in \mathbb{R}^*_- \cup \Omega$ jest $\chi(t) \prec 0^*$, dla $t \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \Omega$ jest $\chi(t) \succ 0^*$.

6.2 Zbiór niestandardowych liczb rzeczywistych ograniczonych $\mathbb{L}$ dany jest definicją

$$x \in \mathbb{L} \leftrightarrow_{df} \exists r \in \mathbb{R}_+[\ |x| \prec r^*\ ].$$

Twierdzenie o części standardowej: $\forall x \in \mathbb{L} \exists! r \in \mathbb{R}[\ r^* \approx x\ ]$.
Część standardową liczby ograniczonej x oznaczamy jako ${}^o x$, tj. ${}^o x = r$.

Zbiór niestandardowych liczb naturalnych $\mathbb{N}^*$ dany jest definicją

$$[(n_j)] \in \mathbb{N}^* \leftrightarrow_{df} \{j \in \mathbb{N} : n_j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F},$$

a jego podzbiór $\mathbb{N}_\infty$ definicją $\mathbb{N}_\infty =_{df} \mathbb{N}^* \setminus \{n^* : n \in \mathbb{N}\}$.

Niech $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Rozszerzenie ciągu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do hiperciągu $(s^*_K)_{K\in\mathbb{N}^*}$ dane jest definicją

$$s^*_K =_{df} [(s_{k_j})] = [(s_{k_1}, s_{k_2}, ...)], \quad \text{gdzie} \quad K = [(k_j)] = [(k_1, k_2, ...)].$$

Twierdzenie Niech (s_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych, niech $s \in \mathbb{R}$. Zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \leftrightarrow \forall K \in \mathbb{N}_\infty[s^*_K \approx s^*].$$

Na podstawie tego twierdzenia w analizie niestandardowej można odtworzyć wiele rozumowań klasycznej analizy, w szczególności te, na które powołuje się rozwiązanie klasyczne.

Przedstawione wyżej fakty są raczej dobrze znane, niżej natomiast przedstawimy operację sumy hiperskończonej, która pozwala sumować nieskończenie wielu składników; w analizie niestandardowej operacja ta jest wykorzystywana na przykład do rekonstrukcji całki Riemanna.

6.3 Niech $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem podzbiorów $\mathbb{R}$. Podzbiór $[H_n]$ zbioru $\mathbb{R}^*$ dany definicją

$$[(r_n)] \in [H_n] \leftrightarrow_{df} \{n \in \mathbb{N} : r_n \in H_n\} \in \mathcal{F},$$

nazywamy zbiorem wewnętrznym. Gdy $\{n \in \mathbb{N} :\ H_n \text{ jest skończony}\} \in \mathcal{F}$, wtedy $[H_n]$ nazywamy zbiorem hiperskończonym.

Niech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem takich funkcji rzeczywistych, że $f_n : A_n \mapsto \mathbb{R}$. Funkcję $[f_n] : [A_n] \mapsto \mathbb{R}^*$ daną definicją

$$[f_n]([(r_n)]) =_{df} [(f_n(r_n))],$$

nazywamy funkcją wewnętrzną.

Suma hiperskończona z funkcji wewnętrznej $[f_n]$ po zbiorze hiperskończonym $[H_n]$ to niestandardowa liczb rzeczywista dana wzorem

$$\sum_{a\in[H_n]} [f_n](a) =_{df} [(\sum_{a\in H_n} f_n(a))],$$

gdzie $\sum_{a\in H_n} f_n(a)$ oznacza sumę skończoną liczb rzeczywistych.

Przykład. Niech dany jest ciąg liczb rzeczywistych (h_n) oraz $H_n = \{h_1, ..., h_n\}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, wtedy

$$\sum_{a\in[H_n]} [f_n](a) = [(f_1(h_1), f_2(h_1) + f_2(h_2), f_3(h_1) + f_3(h_2) + f_3(h_3), ...)].$$

6.4 Wróćmy do oznaczeń z punktu 2. Mamy zatem, że (A_n) to ciąg kolejnych położeń Achillesa, (Z_n) – ciąg kolejnych położeń żółwia, (d_n) – ciąg odległości, jakie w kolejnych chwilach wyznaczonych przez Zenona dzielą Achillesa i żółwia. Przyjmując, że na starcie Achilles jest w punkcie 0 dostajemy, że $A_{n+1} = d_n$, gdzie $d_0 = 0$. Dalej, niech $H_n = \{A_1, ..., A_n\}$, $G_n = \{Z_1, ..., Z_n\}$, $h_n : H_n \ni A_i \mapsto d_{i-1}$, $g_n : G_n \ni Z_i \mapsto d_i$. Stosując do zbiorów wewnętrznych

$[H_n]$, $[G_n]$ oraz funkcji wewnętrznych $[h_n]$, $[g_n]$ operację sumy hiperskończonej otrzymujemy

$$\sum_{a\in[H_n]}[h_n](a) = [(A_n)] = [(0, d_1, d_1 + d_2, ...)] = [(\sum_{i=0}^{n-1} d_i)],$$

$$\sum_{a\in[G_n]}[g_n](a) = [(Z_n)] = [(d_1, d_1 + d_2, d_1 + d_2 + d_3, ...)] = [(\sum_{i=0}^{n} d_i)].$$

Łatwo widać na czym polega różnica „sumowania nieskończenie wielu składników” w analizie klasycznej i niestandardowej. Otóż w obydwu przypadkach posługujemy się ciągiem sum częściowych $(\sum_{i=0}^{n} d_i)$. W analizie klasycznej najpierw należy wykazać zbieżność tego ciągu, a następnie, zauważając, że $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, dostajemy, że

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=o}^{n-1} d_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=o}^{n} d_i.$$

W analizie niestandardowej każdy ciąg liczb rzeczywistych (r_n), na mocy samej konstrukcji, wyznacza pewną niestandardową liczbą rzeczywistą $[(r_n)]$. Dalej, skoro dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\sum_{i=o}^{n-1} d_i < \sum_{i=o}^{n} d_i < A'$, to na mocy definicji porządku $\prec$ jest

$$[(\sum_{i=o}^{n-1} d_i)] \prec [(\sum_{i=o}^{n} d_i)] \prec [(A', A', A', ...)],$$

lub inaczej

$$[(A_n)] \prec [(Z_n)] \prec (A')^*.$$

Tym sposobem, w analizie niestandardowej, po wysumowaniu wszystkich odcinków d_n dostajemy, że na osi niestandardowych liczb rzeczywistych Achilles ciągle jest za żółwiem i ani Achilles, ani żółw nie osiągnęli punktu $(A')^*$, w którym, wedle rozwiązania klasycznego Achilles dogania żółwia.

Ponadto, w analizie klasycznej jest

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} d_i = \lim_{n\to\infty} A_n = A' = \lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} d_i,$$

co znaczy, że ciągi (A_n) i (Z_n) wyznaczają ten sam punkt A'. Stąd zaś dostajemy, że w analizie niestandardowej jest

$$[(A_n)] \approx (A')^* \approx [(Z_n)]$$

oraz

$$^o[(A_n)] = A' = {}^o[(Z_n)].$$

Ostatecznie, chociaż ciągi (A_n) i (Z_n) są różne, bo $Z_n - A_n = d_{n+1}$, to w analizie klasycznej wyznaczają ten sam punkt A', w analizie niestandardowej zaś wyznaczają różne punkty $[(A_n)]$, $[(Z_n)]$. Pozwalając sobie na swobodę, można to tak podsumować: *punkt A', w którym wedle klasycznej analizy Achilles dogania żółwia, w analizie niestandardowej rozczepia się na trzy różne punkty*

$$[(A_n)] \prec [(Z_n)] \prec [(A')].$$

Literatura

[1] Ajdukiewicz K.,*Zmiana i sprzeczność*, „Myśl Współczesna” 8/9, 1948, s. 35-52; cytowane za: K. Ajdukiewicz, *Język i Poznanie*, t. II, PWN, Warszawa 1985, s. 90-106.

[2] Arystoteles, *Fizyka*, [w:] *Dzieła Wszystkie*, t. II, tł. K. Leśniak, PWN, Warszawa 1990.

[3] Arystoteles, *Kategorie*, [w:] *Dzieła Wszystkie*, t. I, tł. K. Leśniak, PWN, Warszawa 1990.

[4] Błaszczyk P., *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen, Wyd. Naukowe AP, Kraków 2007.

[5] Borsuk K., Szmielew W., *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa 1972.

[6] Bos, H.J.M., *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Springer, New York 2001.

[7] Euklides, *Elementy*, [w:] [Heath 1956].

[8] Goldblatt R., *Lectures on the Hyperreals*, Springer, New York 1998.

[9] Grünbaum A., *Modern Science and Zeno's Paradoxes*, Allen and Unwin, London 1967.

[10] Hartshorne R., *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, New York 2000.

[11] Heath T.L., *Euclid. The Thirteen Books of The Elements*, Dover, New York 1956.

[12] Kirk G.S., Raven J.E., Schofield M., *Filozfia przedsokratejska*, tł. J. Lang, PWN, Warszawa–Poznań 1999.

[13] Kuratowski K., *Rachunek różniczkowego i całkowy*, PWN, Warszawa 1971.

[14] Leja F., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1979.

[15] Lindstrøm T., *An invitation to nonstandard analysis*, [w:] N. Cutland (ed.), *Nonstandard Analysis and its Applcations*, Cambrigde UP, Cambrigde 1988, s. 1-105.

[16] Łukowski P., *Paradoksy*, Wydawnictwo UŁ, Łódź 2006.