Komunikaty Na Temat Teorii Pozaskończoności

VI[1]

Georg Cantor

Przywołuje Pan w swoim liście pytanie o wielkości aktualnie *nieskończenie małe*. W wielu miejscach moich prac znajdzie Pan wyrażony pogląd, że są to byty myślowe *niemożliwe*, tj. *wewnętrznie sprzeczne*, a już w mojej pracy „Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre" na stronie 8 w § 4 zaznaczyłem, choć wtedy jeszcze z pewną rezerwą, że ścisłe podstawy tego stanowiska wyprowadzić można z teorii liczb pozaskończonych. Dopiero tej zimy nadarzyła się sposobność, aby przedstawić moje idee dotyczące tego przedmiotu w postaci formalnego dowodu. Chodzi o zdanie: *„Różnych od zera liniowych wielkości liczbowych ζ (tj., krótko mówiąc, takich wielkości liczbowych, które dają się przedstawić w postaci ograniczonego ciągłego odcinka), które byłyby mniejsze od każdej jakkolwiek małej skończonej wielkości liczbowej nie ma, tj. przeczą one pojęciu liniowej wielkości liczbowej"*. Tok myślowy mojego dowodu jest po prostu następujący: wychodzę z *założenia* liniowej wielkości ζ, która miałaby być tak mała, iż jej n-krotność

$$\zeta \cdot n$$

dla *każdej jakkolwiek dużej skończonej liczby całkowitej* n jest mniejsza od jednostki i wykorzystując pojęcie wielkości liniowej oraz pewne twierdzenia teorii liczb pozaskończonych, że wtedy także

$$\zeta \cdot \nu$$

jest mniejsza od *każdej jakkolwiek małej wielkości skończonej*, gdy ν oznacza jakkolwiek dużą *pozaskończoną* liczbę porządkową (tj. liczebność lub

[1]Poniższy tekst prawie w tej samej postaci znajduje się w dwóch napisanych przeze mnie listach; jednym z 13 maja 1887 do Pana nauczyciela gimnazjalnego F. Goldscheidera w Berlinie, drugim z 16 maja 1887 do Pana Profesora Dra K. Weierstrassa.

typ zbioru dobrze uporządkowanego) z jakkolwiek wysokiej klasy liczbowej. Oznacza to jednak, że ζ nie może zostać uczyniona *skończoną* poprzez *jakkolwiek mocne aktualnie nieskończone* zwielokrotnienie, a więc z pewnością nie może być *elementem* wielkości skończonych. Poczynione założenie przeczy więc pojęciu wielkości liniowych, które jest tego rodzaju, że zgodnie z nim każda wielkość liniowa musi być uważana za scaloną część innych, w szczególności skończonych wielkości liniowych. Nie pozostaje zatem nic innego, jak porzucić założenie, wedle którego istniałaby wielkość ζ, która byłaby mniejsza od $\frac{1}{n}$ dla każdej skończonej liczby całkowitej n, a tym samym nasze twierdzenie jest udowodnione*.

Wydaje mi się to ważnym zastosowaniem teorii liczb pozaskończonych, wynikiem, który nadaje się do usunięcia starych, szeroko rozprzestrzenionych i głęboko zakorzenionych przesądów.

Fakt [istnienia] aktualnie nieskończenie wielkich liczb jest zatem tym mniej podstawą dla istnienia aktualnie nieskończenie małych wielkości, że właśnie za pomocą tych pierwszych udowodniona zostaje niemożliwość tych ostatnich.

Nie sądzę też, że wynik ten można otrzymać na innej drodze, w sposób *pełny* oraz *ścisły*.

Potrzeba naszego twierdzenia jest szczególnie oczywista wobec nowych prób O. Stolza i P. Dubois-Reymonda, które polegają na tym, aby prawomocność aktualnie nieskończenie małych wielkości wyprowadzić z tak zwanego

---

*Przypis tłumacza. W tym miejscu zaznaczony jest następujący przypis Ernsta Zermela, podany w całości na stronie 439 *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*: Nieistnienie „aktualnych nieskończenie małych wielkości” równie mało daje się udowodnić, jak nieistnienie Cantorowskich pozaskończonych, a błędny wniosek jest w obu przypadkach ten mianowicie, że nowym wielkościom przypisane zostają pewne własności zwykłych „skończonych”, które nie mogą im przysługiwać. Chodzi tu o tak zwane *„niearchimedesowe”* systemy liczbowe, ciała, których istnienie może być dzisiaj uważane za bez zarzutu udowodnione. Por. Van der Waerden, *Moderne Algebra*, rozdział X. W niearchimedesowym ciele uporządkowanym, w którym np. $n\zeta < 1$ dla każdej skończonej liczby całkowitej n, nie istnieje też żadna „górna granica” γ tych wielkości $n\zeta$, która mogłaby być oznaczana przez $\omega\zeta$, ponieważ przedział $(\gamma - \zeta, \gamma)$ mógłby zawierać co najwyżej *jedną* wielkość $n\zeta$ i mnożenie przez dalsze pozaskończone $\alpha > \omega$ staje się bezprzedmiotowe. Jednocześnie z „aksjomatem Archimedesa” upada nawet „aksjomat ciągłości”, jak podkreślone to zostało w „Grundlagen der Geometrie” D. Hilberta. To, czy zdanie jest „aksjomatem” czy też nie jest, nie zależy od jego treści, lecz od budowy całego systemu, od definiujących system własności lub aksjomatów. Zakładając *aksjomat ciągłości* jako prawomocny, Cantor wyklucza w istocie wszystkie niearchimedesowe systemy liczbowe, nie dowodzi jednak niczego przeciw istnieniu takich „ciał uporządkowanych”, w których nie zachodzi *ani* aksjomat Archimedesa *ani* aksjomat ciągłości.

„aksjomatu Archimedesa”. (Por. O. Stolz, *Math. Annalen* Bd. **8**, str. 269; dalej jego propozycje w *Berichten des naturw. medizin. Vereins in Innsbruck*, roczniki 1881–82 oraz 1884; zatytułowane są one: „O geometrii Starożytnych, w szczególności o aksjomacie Archimedesa” oraz: „Wielkości nieskończenie małe”; wreszcie, por. tegoż autora: „Wykłady z arytmetyki ogólnej”, Leipzig 1885, część I, str. 205.)

Archimedes wydaje się być mianowicie pierwszym, który zwrócił uwagę na to, że użyte w „Elementach” Euklidesa twierdzenie, wedle którego poprzez *skończone, wystarczająco duże* zwielokrotnienie każdego jakkolwiek małego ograniczonego odcinka prostoliniowego można otrzymać *dowolnie duże skończone* odcinki, potrzebuje dowodu i z tego powodu uważał, że twierdzenie to należy oznaczać jako „założenie” (λαμβανόμενον).

(Por. Eukl. *Elem.* lib. V, def. 4: λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἅ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν; dalej w szczególności *Elem.* lib. X, pr. 1. Archimedes: de sphaera et cylindro I, postul. 5 oraz przedmowa do jego tekstu: de quadratura parabolae.)

Tok myślenia owego autora (O. Stolz, *op. cit.*) jest taki, że gdyby odrzuciło się ten domniemany „aksjomat”, to z tego wyniknęłaby prawomocność aktualnie nieskończenie małych wielkości, które tam nazywane są „momentami”. Jednak z wyprowadzonego wyżej przeze mnie twierdzenia wynika bezpośrednio, jeśli zastosujemy je do ciągłych prostoliniowych odcinków, *konieczność założenia Euklidesa.* A zatem tak zwany „aksjomat Archimedesa” *nie jest żadnym aksjomatem, lecz twierdzeniem wynikającym logicznie z pojęcia wielkości liniowej.*

* * *

Podstawa tłumaczenia: Georg Cantor „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, VI; w *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Verlag von Julius Springer, Berlin 1932, str. 407–409.

Tłumaczenie: Jerzy Pogonowski
5 marca 2013