O Nieskończonych Liniowych Rozmaitościach Punktowych (§ 9–10)

Georg Cantor

§ 9.

Ze względu na wielkie znaczenie, jakie mają w teorii rozmaitości tak zwane liczby rzeczywiste, wymierne i niewymierne nie chciałbym przeoczyć powiedzenia tu najważniejszego o ich definicjach. Nie wdaję się głębiej we wprowadzenie liczb wymiernych, jako iż istnieją wielostronnie [rozbudowane] ścisłe ich przedstawienia; ze znajdujących się pod ręką wymienię te autorstwa H. Grassmanna (*Lehrbuch der Arithmetik*, Berlin 1861) oraz J.H.T. Müllera (*Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik*, Halle 1855). Z drugiej strony, chciałbym w skrócie dokładniej omówić trzy znane mi i w istocie jedyne główne formy ścisłego wprowadzenia ogólnych liczb rzeczywistych. Jest to, *po pierwsze*, sposób [ich] wprowadzenia, którym od wielu lat posługuje się Pan Prof. Weierstrass w swoich wykładach o funkcjach analitycznych i o którym pewne napomknienia znaleźć można w programowej rozprawie Pana E. Kossaka (*Die Elemente der Arithmetik*, Berlin 1872). *Po drugie*, Pan R. Dedekind opublikował w swojej rozprawie *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Braunschweig 1872) swoistą postać definicji, a *po trzecie* w 1871 roku podana została przeze mnie (*Mathematische Annalen* Bd. **5**, S. 123) postać definicji, która zewnętrznie podobna jest do [tej] Weierstrassowskiej, tak, iż mogła być pomylona z nią przez Pana H. Webera (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **27** Jahrg., historisch liter. Abt., S. 163); moim zdaniem to jednak ta *trzecia*, rozwinięta później także przez Pana Lipschitza (*Grundlagen der Analysis*, Bonn 1877) jest najprostsza i najbardziej naturalna ze wszystkich i ma się przy niej tę korzyść, że dopasowuje się ona bezpośrednio do rachunku analitycznego.

Z definicją niewymiernej liczby rzeczywistej stowarzyszony jest zawsze dobrze zdefiniowany nieskończony zbiór liczb wymiernych pierwszej mocy; w tym zasadza się to, co wspólne we wszystkich definicjach, różnica leży w momencie tworzenia, przez który zbiór jest połączony z definiowaną przez siebie liczbą oraz w warunkach, które ten zbiór ma spełnić, aby nadawał się jako podstawa odnośnej definicji.

Przy *pierwszej* postaci definicji u podstaw leży zbiór dodatnich liczb wymiernych a_ν, oznaczany przez (a_ν) i spełniający warunek, że jakąkolwiek skończoną liczbę którychkolwiek z tych a_ν zsumujemy, to ta suma zawsze pozostaje poniżej podanej granicy. Jeśli mamy teraz dwa takie agregaty (a_ν) oraz (a'_ν), to pokazuje się w sposób ścisły, że mogą one przedstawiać trzy przypadki; albo każda część jest ciągle równie często występującą $\frac{1}{n}$-tą jedności w obu agregatach, o ile sumuje się w wystarczającej, wzrastającej skończonej liczbie ich elementy; albo jest to $\frac{1}{n}$, począwszy od pewnej ustalonej n, ciągle częściej w pierwszym agregacie niż w drugim, albo, po trzecie, jest to $\frac{1}{n}$, począwszy od pewnej ustalonej n, ciągle częściej w drugim agregacie niż w pierwszym. Zdarzeniom tym odpowiadają, gdy b oraz b' są liczbami mającymi zostać zdefiniowanymi przez agregaty (a_ν) oraz (a'_ν), ustalenia, że: w pierwszym przypadku $b = b'$, w drugim $b > b'$, w trzecim $b < b'$. Jeśli połączy się oba agregaty w nowy (a_ν, a'_ν), to daje to podstawy do definicji $b + b'$; jeśli jednak z obu agregatów (a_ν) oraz (a'_ν) utworzy się nowy $(a_\nu \cdot a'_\mu)$, w którym elementy są iloczynami wszystkich (a_ν) z wszystkimi (a'_μ), to ten nowy agregat zostaje przyjęty jako podstawa definicji iloczynu bb'.

Widać, że tutaj moment tworzenia, który łączy zbiór z definiowaną przez niego liczbą leży w *tworzeniu sumy*; musi jednak zostać podkreślone jako *istotne*, że stosuje się tylko sumowanie zawsze *skończonej* liczby elementów wymiernych, a *nie*, iż raczej najpierw mająca zostać zdefiniowaną liczba b ustalona jest jako suma $\sum a_\nu$ nieskończonego szeregu (a_ν); kryłby się tu *błąd logiczny*, ponieważ to raczej definicja sumy $\sum a_\nu$ zostaje otrzymana dopiero poprzez przyrównanie do z konieczności wprzódy zdefiniowanej *gotowej* liczby b. Sądzę, że ten dopiero przez Pana WEIERSTRASSA uniknięty błąd wcześniej popełniany był prawie powszechnie i z zasady nie był zauważany, ponieważ należy on do rzadkich przypadków, w których rzeczywiste błędy nie mogą wyrządzać żadnych bardziej znaczących szkód w rachunku. – Mimo to, w moim przekonaniu, z określonym [wyżej] błędem wiążą się wszystkie trudności, które odnajdywane są w pojęciu niewymierności, podczas gdy uniknięcie tego błędu osadza liczbę niewymierną w naszym umyśle z tą samą określonością, wyraźnością i jasnością, jak liczbę wymierną.

U podstaw postaci definicji Pana DEDEKINDA leży *ogół wszystkich* liczb wymiernych, które są jednak podzielone na dwie grupy tego rodzaju, że gdy oznaczy się liczby pierwszej grupy przez $\mathfrak{A}_\nu$, a drugiej przez $\mathfrak{B}_\mu$, to zawsze $\mathfrak{A}_\nu < \mathfrak{B}_\mu$; taki podział zbioru liczb wymiernych nazywa Pan DEDEKIND jego „przekrojem", oznacza przez $(\mathfrak{A}_\nu|\mathfrak{B}_\mu)$ oraz przyporządkowuje mu liczbę b. Jeśli porównuje się ze sobą dwa takie przekroje $(\mathfrak{A}_\nu|\mathfrak{B}_\mu)$ oraz $(\mathfrak{A}'_\nu|\mathfrak{B}'_\mu)$, to podobnie jak w *pierwszej* postaci definicji znajdują się tu *trzy* możliwości, odpowiednio do których ustala się, że liczby b i b' reprezentowane przez oba przekroje są między sobą równe, albo $b > b'$, albo $b < b'$. Pominąwszy pewne łatwe do uregulowania wyjątki, które występują przy wymierności mających zostać zdefiniowanymi liczb, pierwszy przypadek ma miejsce tylko przy pełnej identyczności obu przekrojów, i niezaprzeczalne zdecydowane pierwszeństwo tej postaci definicji względem obu pozostałych uwydatnia się w tym, iż każdej liczbie b odpowiada tylko *jedyny* przekrój, który to stan rzeczy ma jednak z drugiej strony tę wielką wadę, że liczby w analizie *nigdy* nie występują w postaci „przekrojów”, do której muszą dopiero zostać doprowadzone z wielkim kunsztem i pedanterią.

Tu następują teraz także definicje sumy $b + b'$ oraz iloczynu bb' na gruncie nowych przekrojów, otrzymanych z obu już danych.

Wada związana z *pierwszą* oraz *trzecią* postacią definicji, [polegająca na tym,] że mianowicie tu te same tj. równe liczby przedstawiane są nieskończenie często i przez to jednoznaczny przegląd wszystkich liczb rzeczywistych nie zostaje otrzymany bezpośrednio, może zostać z wielką łatwością usunięta poprzez wyszczególnienie leżących u podstaw zbiorów (a_ν), posługując się jakimkolwiek znanym systemem, jak system dziesiętny lub proste rozwinięcie w ułamki łańcuchowe.

Przechodzę teraz do *trzeciej* postaci definicji liczb rzeczywistych. Tutaj również u podstaw leży nieskończony zbiór liczb wymiernych (a_ν) pierwszej mocy [nieskończonej], ale wymaga się od niego innej własności niż w postaci definicji wedle WEIERSTRASSA; żądam, aby przy założeniu dowolnie małej liczby wymiernej ε można było odrzucić skończoną liczbę członów zbioru tak, iżby pozostałe miały parami różnicę co do absolutnej wielkości mniejszą od ε. Każdy tego rodzaju zbiór (a_ν), który może też zostać scharakteryzowany przez żądanie

$$\lim_{\nu=\infty}(a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0 \qquad \text{(dla dowolnej } \mu\text{)},$$

nazywam *ciągiem podstawowym*[1] i przyporządkowuję mu zdefiniowaną przezeń liczbę b, dla której można nawet celowo używać znaku (a_ν), jak jest to w propozycji Pana HEINEGO, który w tej kwestii kierował do mnie wiele ustnych rozstrząsań. (Por. *Crelles Journal* Bd. **74**, S. 172). Taki *ciąg podstawowy* oferuje, jak można to ściśle wydedukować z jego pojęcia, trzy przypadki: albo jego człony a_ν są co do swojej absolutnej wartości mniejsze od dowolnie podanej liczby, dla wystarczająco dużej wartości ν; albo są one, począwszy od pewnej ν większe od określonej danej dodatniej liczby wymiernej ρ; albo są one, począwszy od pewnej ν mniejsze od określonej danej ujemnej wielkości wymiernej $-\rho$. W pierwszym przypadku mówię, że b jest równa zeru, w drugim, że b jest większa od zera, lub dodatnia, w trzecim, że b jest mniejsza od zera, lub ujemna.

Dochodzą teraz operacje elementarne. Jeśli (a_ν) oraz (a'_ν) są dwoma *ciągami podstawowymi*, to pokazuje się, że $(a_\nu \pm a'_\nu)$ oraz $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ są *ciągami podstawowymi*, które określają zatem trzy nowe liczby, które służą mi za definicje sumy i różnicy $b \pm b'$ oraz iloczynu bb'.

[1]Przypis tłumacza. W oryginale: *Fundamentalreihe*. Wybieram *ciąg* raczej niż *szereg* za względu na współcześnie używaną terminologię. Ze względów edytorskich, piszę też lim wszędzie tam, gdzie Cantor używa Lim.

Jeśli przy tym b jest różna od zera, co zdefiniowano powyżej, to dowodzi się, że również $(\frac{a'_\nu}{a_\nu})$ jest *ciągiem podstawowym*, dla którego liczba z nim stowarzyszona dostarcza definicji ilorazu $\frac{b'}{b}$.

Operacje elementarne między daną przez ciąg podstawowy (a_ν) liczbą b oraz daną bezpośrednio liczbą wymierną a są przy tych ustaleniach takie, że dopuszcza się $a'_\nu = a$, $b' = a$.

Dopiero teraz dochodzą definicje równości, większości oraz mniejszości między dwiema liczbami b i b' (z których b' może też być $= a$), a mianowicie mówi się, że $b = b'$, lub $b > b'$, lub $b < b'$ w zależności od tego, czy $b - b'$ jest równa zero, mniejsza lub większa od zera.

Po wszystkich tych przygotowaniach otrzymuje się, jako pierwsze *ściśle dowodliwe* twierdzenie, że gdy b jest liczbą określoną przez ciąg podstawowy (a_ν), to $b - a_\nu$ co do wartości absolutnej staje się, wraz ze wzrastającą ν, mniejsza od każdej do pomyślenia liczby wymiernej, lub, co jest tym samym, że

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = b.$$

Dobrze [jest] zwrócić uwagę na ten główny punkt, którego znaczenie łatwo mogłoby zostać przeoczone: przy *trzeciej* postaci definicji liczba b raczej nie jest definiowana jako „granica” członów a_ν ciągu podstawowego (a_ν); to bowiem byłoby podobnym błędem logicznym, jak ten przywołany przy omówieniu *pierwszej* postaci definicji, a mianowicie z tego powodu, że wtedy zakładane byłoby *istnienie* granicy $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu$; raczej rzeczy mają się na odwrót, tak, że poprzez nasze poprzednie definicje pojęcie b rozważane jest z takimi własnościami oraz związkami z liczbami wymiernymi, że z tego można z logiczną oczywistością wyciągnąć wniosek: $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu$ istnieje i jest równa b. Niech będzie mi tutaj wybaczona drobiazgowość, którą motywuję spostrzeżeniem, że większość pomija ten niewidoczny drobiazg i plątą się potem w wątpliwościach i sprzecznościach w związku z niewymiernością, od których mogliby się w pełni ustrzec przy zauważeniu opisanych tu okoliczności; albowiem jasno wtedy rozpoznaliby, że liczba niewymierna, dzięki *własnościom przydanym jej przez definicję* ma tak samo określoną rzeczywistość w naszym umyśle, jak wymierna, nawet jak całkowita liczba wymierna oraz że nie trzeba jej *otrzymywać* w procesie granicznym, ale raczej odwrotnie, przez jej *posiadanie* będzie się przekonanym o wykonalności oraz oczywistości procesów granicznych; bowiem teraz z łatwością rozszerza się powyżej wprowadzone twierdzenie do następującego: Jeśli (b_ν) jest jakimkolwiek zbiorem liczb wymiernych lub niewymiernych o tej własności, że $\lim\limits_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu} - b_\nu) = 0$ (jakakolwiek byłaby μ), to istnieje liczba b określona przez ciąg podstawowy (a_ν) taka, że

$$\lim_{\nu=\infty} b_\nu = b.$$

Okazuje się zatem, że *te same* liczby b, które są zdefiniowane na gruncie ciągów podstawowych (a_ν) (nazywam te ciągi podstawowe [ciągami] pierwszego rzędu) takiego rodzaju, że okazują się [owe liczby] granicami tych a_ν, są też na wiele sposobów przedstawiane jako granice ciągów (b_ν), gdzie każda b_ν jest zdefiniowana przez ciąg podstawowy pierwszego rzędu $(a_\mu^{(\nu)})$ (z ustaloną ν).

Nazywam przeto taki zbiór (b_ν) ciągiem podstawowym *drugiego rzędu*, gdy ma on tę własność, że $\lim\limits_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu} - b_\nu) = 0$ (dla dowolnej μ).

Podobnie można tworzyć ciągi podstawowe *trzeciego*, *czwartego*, ..., n-*tego* rzędu, ale także ciągi podstawowe α-tego rzędu, gdzie α jest dowolną liczbą drugiej klasy liczbowej.

Wszystkie te ciągi podstawowe osiągają dokładnie to samo przy określaniu liczby rzeczywistej b, co ciągi podstawowe *pierwszego rzędu*, a różnica leży tylko w bardziej skomplikowanej, rozszerzonej formie podania. Niemniej jednak wydaje mi się w najwyższym stopniu [właściwe], jeśli chce się w ogóle przyjąć stanowisko trzeciej postaci definicji, ustalić tę różnicę w określony sposób, jak to już zrobiłem także w przywołanym [wyżej] miejscu (*Mathematische Annalen* Bd. **5**, S. 123). Dlatego posługuję się teraz sposobem wyrażania: wielkość liczbowa b jest podana przez ciąg podstawowy n-tego, lub, odpowiednio, α-tego rzędu. Jeśli zdecyduje się tu na to, to osiągnie się przez to wyjątkowo płynny i przystępny język, aby w pełni opisać całość wielopostaciowej, często tak skomplikowanej tkanki analizy w sposób jak najprostszy oraz najtrafniejszy, przez co moim zdaniem osiągnie się nie do przecenienia zysk [w postaci] jasności i przejrzystości. Wychodzę tym samym naprzeciw zastrzeżeniu, które wobec tych odróżnień wyraził Pan DEDEKIND w przedmowie swojej pracy „Ciągłość i liczby niewymierne"; daleki jestem od tego, aby poprzez ciągi podstawowe drugiego, trzeciego, itd. rzędu wprowadzać *nowe* liczby, które nie byłyby już określone przez ciągi podstawowe pierwszego rzędu, lecz miałem jedynie na uwadze pojęciowo różne formy [ich] podawania; widać to wyraźnie z poszczególnych miejsc mojej pracy.

Chciałbym przy tym zwrócić uwagę na osobliwą okoliczność, że mianowicie wśród liczb [danych przez] wyróżnione przeze mnie ciągi podstawowe pierwszej i drugiej klasy liczbowej tworzone są w ogóle wszystkie do pomyślenia w analizie formy mające zwykły charakter szeregu, już znalezione lub jeszcze nie znalezione, w tym sensie, że nie istnieją ciągi podstawowe, których liczba porządkowa mogłaby być oznaczana przez liczbę trzeciej klasy liczbowej, jak ściśle to udowodnię przy innej sposobności.

Spróbuję teraz krótko objaśnić celowość *trzeciej* postaci definicji.

Dla oznaczenia tego, że liczba b jest podana na gruncie ciągu podstawowego (e_ν) jakiegokolwiek rzędu n lub α posługuję się formułami

$$b \sim (e_\nu) \quad \text{lub} \quad (e_\nu) \sim b.$$

Jeśli dany jest dla przykładu szereg zbieżny o ogólnym wyrazie c_ν, to warunkiem koniecznym i wystarczającym dla zbieżności jest, jak wiadomo, to że $\lim_{\nu=\infty}(c_{\nu+1} + \ldots + c_{\nu+\mu}) = 0$ (gdzie μ jest dowolna).

Definiuje się więc sumę szeregu przez formułę

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\nu} c_n).$$

Jeśli np. wszystkie c_n są zdefiniowane na gruncie ciągu podstawowego k-tego rzędu, to to samo jest słuszne o $\sum_{n=0}^{\nu} c_n$ i suma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ okazuje się definiowalna przez ciąg podstawowy $k+1$-ego rzędu.

Jeśli ma się przykładowo opisać treść pojęciową twierdzenia $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, to $\frac{\pi}{2}$ oraz jej potęgi można uważać za dane formułami:

$$\frac{\pi}{2} \sim (a_\nu), \quad (\frac{\pi}{2})^{2m+1} \sim (a_\nu^{2m+1}),$$

gdzie dla zwięzłości ustalono, że

$$2\sum_{n=0}^{\nu} \frac{(-1)^n}{2n+1} = a_\nu.$$

Dalej,

$$\sin(\frac{\pi}{2}) \sim (\sum_{m=0}^{\mu} (-1)^m \frac{(\frac{\pi}{2})^{2m+1}}{(2m+1)!}),$$

tj. $\sin(\frac{\pi}{2})$ jest definiowana na gruncie ciągu podstawowego drugiego rzędu, a poprzez owo twierdzenie wyrażona jest zatem równość liczby wymiernej 1 oraz podanej na gruncie ciągu podstawowego drugiego rzędu liczby $\sin(\frac{\pi}{2})$.

W podobny sposób prosto, precyzyjnie i trafnie opisać można treść pojęciową bardziej skomplikowanych formuł, jak dla przykładu tych z teorii θ-funkcji, podczas gdy odwoływanie się do nieskończonych szeregów jako takich, które zbudowane są z czysto wymiernych członów, ciągle z tym samym znakiem oraz [są] bezwzględnie zbieżne, jest najczęściej związane z wielkimi uciążliwościami, które tutaj, przy *trzeciej* postaci definicji, w przeciwieństwie do *pierwszej*, zostają całkowicie uniknięte i oczywiście mogą zostać uniknięte, jak długo nie chodzi o numeryczne przybliżenie sum szeregów przez liczby wymierne, lecz jedynie o wystarczająco ostre *definicje* tychże. *Pierwsza* postać definicji wydaje mi się ponadto niezbyt łatwo stosowalna, gdy chodzi o precyzyjną definicję sum szeregów, które nie są bezwzględnie zbieżne, w których raczej uporządkowanie zarówno dodatnich, jak i ujemnych członów jest wprzódy określone. Przecież już w [przypadku] szeregów nie-bezwzględnie zbieżnych tworzenie sumy, nawet gdy jest ona niezależna od uporządkowania [członów], jest rzeczywiście wykonalne tylko przy określonym [ich] uporządkowaniu; a zatem także w takich przypadkach próbuje się dać pierwszeństwo *trzeciej* postaci definicji nad pierwszą. W końcu, wydaje mi się, że [warto] mówić o zdolności uogólnienia *trzeciej* postaci definicji na liczby *pozaskończone*, podczas gdy takie rozbudowanie *pierwszej* postaci definicji jest całkiem *niemożliwe*; różnica ta leży po prostu w tym, że w [przypadku] liczb pozaskończonych prawo przemienności w ogólności nie zachodzi już dla dodawania; pierwsza postać definicji jest jednak *nierozdzielnie związana* z tym prawem, zachodzi i upada wraz z nim. Jednak dla wszystkich rodzajów liczb, dla których zachodzi przemienność dodawania *pierwsza* postać definicji sprawdza się wybornie, pomijając wyżej omówione punkty.

§ 10.

Pojęcie „kontinuum" nie tylko odegrało znaczącą rolę wszędzie w rozwoju nauk, ale wywoływało również wielkie różnice poglądów a nawet silne spory. Zasadza się to być może w tym, iż leżąca u jego podstaw idea dlatego miała różną treść, gdy pojawiała się u rozprawiających o niej, ponieważ nie dostarczono dokładnej i pełnej definicji tego pojęcia; być może jednak również, i to wydaje mi się najbardziej prawdopodobne, idea kontinuum już przez owych Greków, którzy pierwsi mogli ją utworzyć, nie była przemyślana z jasnością oraz zupełnością, która byłaby pożądana, aby wykluczyć różne jej pojmowania ze strony [ich] następców. Tak więc widzimy, że LEUKIPPOS, DEMOKRYT oraz ARYSTOTELES traktowali kontinuum jako całość złożoną, która składa się *ex partibus sine fine divisibilibus*, gdy z drugiej strony EPIKUR oraz LUKRECJUSZ składali je ze swoich atomów jako rzeczy skończonych, skąd powstał potem wielki spór między filozofami, z których jedni postępowali za ARYSTOTELESEM, inni za EPIKUREM; inni znów opowiadali się być poza tym sporem, [głosząc] wraz TOMASZEM Z AKWINU, iż kontinuum nie składa się ani z nieskończenie wielu, ani ze skończonej liczby części, lecz nie składa się z *żadnych w ogóle* części; ten ostatni pogląd mniej wydaje mi się zawierać wyjaśnienie sprawy niż milczące wyznanie, iż nie doszło się do sedna rzeczy i w sposób dystyngowany usuwa się je z drogi. Widzimy tu *średniowieczno-scholastyczny początek* poglądu, który napotykamy jeszcze dzisiaj, wedle którego kontinuum byłoby pojęciem nierozkładalnym, lub też, jak ujmują to inni, oglądem czysto *apriorycznym*, które prawie żadnemu określeniu przez pojęcia nie byłoby dostępne; każda próba arytmetycznego wyznaczenia tej *tajemnicy* widziana jest jako niedozwolona ingerencja oraz odrzucona ze stosownym naciskiem; nieśmiałe natury wywierają przy tym wrażenie, jakby nie chodziło w [przypadku] „kontinuum” o pojęcie *logiczno-matematyczne*, lecz raczej o *dogmat religijny*.

Daleki jestem od tego, by przywoływać na nowo te sporne problemy, brak mi też miejsca na ich dokładniejsze omówienie w ograniczonych ramach [tego tekstu]; czuję się jedynie zobowiązany do rozwinięcia tutaj możliwie krótko i z odniesieniem do *matematycznej* teorii mnogości pojęcia kontinuum, w tak trzeźwym logicznym ujęciu, jak to konieczne. Praca ta nie jest dla mnie łatwa z tego powodu, że wśród matematyków, na których autorytet chętnie się powołuję ani jeden nie zajmował się dokładniej kontinuum w tym sensie, który uważam tu za konieczny.

Ma[my] wprawdzie u podstaw jedno- lub wielo-rzeczywistych lub zespolonych wielkości ciągłych (lub, co jak sądzę jest bardziej właściwym sposobem wyrażania się, ciągłych zbiorów wielkości) jak najbardziej wykształcone pojęcie zależnego od nich jedno- lub wielo-znacznego kontinuum, tj. pojęcie funkcji ciągłej, i w ten sposób powstaje teoria tak zwanych funkcji *analitycznych*, jak również funkcji uogólnionych wraz z ich wysoce osobliwymi zjawiskami (jak nieróżniczkowalność oraz podobne); jednak samo *niezależne* kontinuum jest przez autorów matematyków zakładane tylko w owej najprostszej postaci i nie jest poddawane żadnemu gruntownemu rozważaniu.

Najpierw muszę wyjaśnić, że w mojej opinii posługiwanie się *pojęciem czasu* lub *oglądem czasu* w dyskusji nad o wiele bardziej podstawowym i ogólniejszym pojęciem kontinuum *nie* jest właściwe; *czas* jest, w moim przekonaniu, wyobrażeniem, które dla swego wyraźnego objaśnienia ma w założeniu niezależne od niego pojęcie ciągłości i nawet za pomocą tego [ostatniego] nie może być pojmowany ani obiektywnie jako substancja, ani subiektywnie jako konieczna aprioryczna forma oglądu, ale jest niczym innym jak *pojęciem pomocniczym oraz względnym*, przez które ustalona zostaje relacja pomiędzy różnymi występującymi w naturze oraz postrzeganymi przez nas ruchami. Coś takiego jak czas *obiektywny* lub *absolutny* nigdzie w naturze nie występuje, a zatem *czas* nie może być uważany za miarę *ruchu*, lecz raczej to [ruch może być uważany] za miarę *czasu*, gdyby temu ostatniemu nie przeszkadzało to, że sam czas w decydującej roli *subiektywnej koniecznej apriorycznej* formy oglądu nie mógł przynieść żadnego owocnego, bezspornego i pomyślnego rozwoju, aczkolwiek od KANTA czas do tego nie byłby tej [formie naoczności] zbędny.

Podobnie, jest moim przekonaniem, że niczego nie można począć z tak zwaną *formą oglądu przestrzeni*, aby otrzymać informacje o *kontinuum*, gdyż również *przestrzeń* oraz pomyślane w niej wytwory tylko za pomocą już pojęciowo *gotowego* kontinuum otrzymują ową treść, przy której nie są tylko przedmiotem estetycznych lub wyrafinowanych filozoficznych rozważań lub wielu podobnych, lecz mogą być poddane trzeźwym i dokładnym badaniom matematycznym.

Tak więc, nie pozostaje mi nic innego, jak próbować [określić] przy pomocy zdefiniowanych w § 9 pojęć liczby rzeczywistej możliwie ogólne czysto arytmetyczne pojęcie kontinuum punktowego. Za podstawę posłuży mi przy tym, jako iż nie może być inaczej, n-wymiarowa właśnie *arytmetyczna* przestrzeń G_n, tj. ogół wszystkich systemów wartości

$$(x_1|x_2|\ldots|x_n),$$

w których każda x, niezależnie od pozostałych, może przyjmować *wszystkie rzeczywiste* wartości liczbowe od $-\infty$ do $+\infty$. Każdy poszczególny system wartości tego rodzaju nazywam punktem *arytmetycznym* w G_n. Odległość dwóch takich punktów zostaje zdefiniowana przez wyrażenie

$$|\sqrt{(x_1'-x_1)^2+(x_2'-x_2)^2+\ldots+(x_n'-x_n)^2}|,$$

a przez *arytmetyczny* zbiór punktowy P w G_n rozumie się każdy prawidłowo podany ogół punktów przestrzeni G_n. Badanie skierowane jest zatem na to, aby ustanowić ostrą i jednocześnie możliwie ogólną definicję, *kiedy P mamy nazywać kontinuum*.

Udowodniłem w *Crelles Journal* Bd. **84**, S. 242, że wszystkie przestrzenie G_n, jakakolwiek byłaby tak zwana liczba wymiarów n, mają *równe* moce i, w konsekwencji, są *równie liczne* jak kontinuum liczbowe, a więc jak ogół wszystkich liczb rzeczywistych przedziału $(0\ldots1)$, oraz mam nadzieję móc wkrótce przedstawić ścisły dowód na to, że poszukiwana moc jest niczym innym jak tą [mocą] naszej *drugiej klasy liczbowej*. Z tego będzie wynikało, że wszystkie nieskończone zbiory punktowe P mają albo moc pierwszej klasy liczbowej (I), albo moc drugiej klasy liczbowej (II). Da się wyprowadzić z tego jeszcze inna konsekwencja, że ogół wszystkich funkcji jednej lub wielu zmiennych, które są przedstawialne w postaci podanego nieskończonego szeregu, wszystko jedno jakiej, *również* posiada *tylko* moc drugiej klasy liczbowej (II), a zatem jest *przeliczalny przez* liczby trzeciej klasy liczbowej. To twierdzenie będzie więc odnosiło się dla przykładu do ogółu wszystkich funkcji „analitycznych", tj. funkcji jednej lub wielu zmiennych otrzymanych przez rozwinięcie szeregów potęgowych, lub do zbioru wszystkich funkcji jednej lub wielu zmiennych, które są przedstawialne przez szeregi trygonometryczne.

Aby teraz przybliżyć się do ogólnego pojęcia kontinuum położonego wewnątrz G_n, przypominam pojęcie pochodnej $P^{(1)}$ dowolnego danego zbioru punktowego P, jak znajduje się to najpierw w pracy: *Mathematische Annalen* Bd. **5**, a potem rozwija [w dalszym ciągu niniejszej rozprawy][2] i rozszerza do pojęcia pochodnej

[2]Przypis tłumacza. Tekst w nawiasach kwadratowych pochodzi od Ernsta Zermela. Korzystam z przedruku pracy w *Dziełach Zebranych* Cantora.

$P^{(\gamma)}$, gdzie γ może być jakąkolwiek liczbą całkowitą jednej z klas liczbowych (I), (II), (III), itd.

Zbiory punktowe P dają się teraz podzielić na dwie klasy, w zależności od mocy ich pierwszej pochodnej $P^{(1)}$. Jeśli $P^{(1)}$ ma moc (I), to pokazuje się, jak już mówiłem w § 3 tej pracy, że istnieje pierwsza liczba całkowita α *pierwszej* lub *drugiej* klasy liczbowej (II), dla której $P^{(\alpha)}$ znika. Jeśli jednak $P^{(1)}$ ma moc drugiej klasy liczbowej (II), to $P^{(1)}$ zawsze daje się rozłożyć i to tylko na jeden sposób na dwa zbiory R oraz S tak, że

$$P^{(1)} = R + S,$$

gdzie R oraz S mają skrajnie różne własności:

R jest tak utworzony, że poprzez powtarzany proces brania pochodnej jest zdolny do ustawicznej redukcji aż do anihilacji, tak, że zawsze istnieje pierwsza wśród całkowitych liczb γ z klas liczbowych (I) lub (II), dla której

$$R(\gamma) \equiv 0;$$

takie zbiory punktowe R nazywam *redukowalnymi*.

Z drugiej strony, S jest tak utworzony, że proces brania pochodnej tego zbioru punktowego nie przynosi żadnej zmiany, a więc

$$S \equiv S^{(1)},$$

a w konsekwencji również

$$S \equiv S^{(\gamma)};$$

zbiory tego rodzaju nazywam *doskonałymi* zbiorami punktowymi. Możemy zatem powiedzieć: jeśli $P^{(1)}$ jest mocy drugiej klasy liczbowej (II), to $P^{(1)}$ rozpada się na określony punktowy zbiór *redukowalny* oraz na określony punktowy zbiór *doskonały*.

Aczkolwiek oba te predykaty, „redukowalny” oraz „doskonały” nie współwystępują w jednym i tym samym zbiorze punktowym, to z drugiej jednak strony nieredukowalny nie jest tym samym co doskonały, a tym mniej niedoskonały jest dokładnie tym samym co redukowalny, co łatwo zauważyć przy odrobinie uwagi.

Doskonałe zbiory punktowe S w żadnej mierze nie są zawsze w swoim wnętrzu tym, co nazwałem w mojej wyżej przywołanej pracy [zbiorami] „wszędzie gęstymi”; dlatego też nie nadają się samodzielnie do [utworzenia] pełnej definicji kontinuum punktowego, gdy natychmiast trzeba również przyznać, że to ostatnie zawsze musi być zbiorem *doskonałym*.

Potrzebne jest raczej jeszcze jedno pojęcie, by w połączeniu z poprzednimi zdefiniować kontinuum, a mianowicie pojęcie *spójnego* zbioru punktowego T.

Nazywamy T *spójnym* zbiorem punktowym, gdy dla każdych dwóch jego punktów t oraz t' oraz danej wprzódy dowolnie małej liczby ε na wiele sposobów dana jest *skończona* liczba punktów $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ z T tak, że odległości $\overline{tt_1}$, $\overline{t_1t_2}$, $\overline{t_2t_3}$,$\ldots$, $\overline{t_\nu t'}$ są wszystkie mniejsze od ε. [Chodzi tu zatem o „metryczną" własność kontinuum.][3]

Wszystkie znane nam geometryczne kontinua punktowe podpadają teraz również, jak łatwo widać, pod pojęcie *spójnego* zbioru punktowego; sądzę jednak teraz także, że rozpoznałem w tych *obu* własnościach „doskonały" oraz „spójny" konieczne oraz *wystarczające* cechy kontinuum, a zatem definiuję kontinuum punktowe wewnątrz G_n jako *spójny zbiór doskonały*. Tutaj „doskonały" oraz „spójny" nie są po prostu słowami, ale najostrzej pojęciowo scharakteryzowanymi poprzez poprzednie definicje całkiem ogólnymi własnościami *kontinuum*.

BOLZANOwska definicja kontinuum (*Paradoksy* § 38) z pewnością nie jest poprawna; wyraża ona jedynie *jedną* własność kontinuum, która jednak spełniona jest także przez zbiory, które wydobywa się z G_n w ten sposób, że myśli się o jakimkolwiek „izolowanym" zbiorze punktowym w G_n (por. *Mathematische Annalen* Bd. **21**, S. 51); także samo spełniona jest ona przez zbiory, które składają się z większej liczby rozdzielonych kontinuów; oczywiście w takich przypadkach nie mamy do czynienia z żadnym kontinuum, aczkolwiek wedle BOLZANA tak właśnie byłoby. Widzimy więc tu naruszenie twierdzenia: „ad essentiam alicujus rei pertinet id, quo dato res necessario ponitur et quo sublato res necessario tollitur; vel id, sine quo res, et vice versa quod sine re nec esse nec consipi potest."

Podobnie, wydaje mi się, że także w pracy Pana DEDEKINDA (Ciągłość i liczby niewymierne) jednostronnie podkreślona jest tylko jedna *inna* własność kontinuum, a mianowicie owa, którą ma ono wspólnie ze *wszystkimi* zbiorami *„doskonałymi"*. [A zatem „brak luk", wedle Hausdorffa].[4]

* * *

Podstawa tłumaczenia: Cantor, G. 1883. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. § 9–10. *Mathematische Annalen* **21**, 545–586. Tłumacz korzystał z przedruku tej pracy w: Cantor, G. 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Julius Springer, Berlin, 139–246 (§ 9–10 na stronach: 183–194).

Tłumaczenie: Jerzy Pogonowski
9 listopada 2010

[3]Przypis tłumacza. Tekst w nawiasie kwadratowym to przypis Ernsta Zermela.
[4]Przypis tłumacza. Tekst w nawiasie kwadratowym to przypis Ernsta Zermela.