PIOTR BŁASZCZYK, KAZIMIERZ MRÓWKA

Euklides, *Elementy*
Księgi V-VI

PIOTR BŁASZCZYK, KAZIMIERZ MRÓWKA

Euklides, *Elementy*
Księgi V-VI
tłumaczenie i komentarz

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Euklides i jego *Elementy*. Rys historyczny

1 Starożytność wydała co najmniej dwóch wielkich Euklidesów: twórcę szkoły megarejskiej, współczesnego Platonowi oraz geometrę z Aleksandrii.[1] Różnica miejsca i czasu narodzin nie pozwalają mylić dwóch wspomnianych przedstawicieli kultury greckiej. Prawdopodobnie za sprawą rzymskiego pisarza Waleriusza Maksymusa, żyjącego w I wieku p.n.e., w późniejszym czasie rozpowszechniło się mniemanie, jakoby Euklides z Aleksandrii był tym samym myślicielem, co Euklides z Megary. Ale Waleriusz Maksymus pomylił trzy postaci: Euklidesa z Megary, tego z Aleksandrii oraz żyjącego w czasach Platona matematyka i astronoma Eudoksosa z Knidos.

O samym Euklidesie wiemy niewiele. Nie można z całą pewnością stwierdzić, że Aleksandria była miejscem narodzin matematyka, za to na pewno najważniejszym miejscem jego działalności. Być może, jeszcze przed przybyciem do Aleksandrii Euklides kształcił się w Atenach. Żyjący w V wieku neoplatończyk Proklos z Lycji, ważne źródło wiedzy w kontekście życiorysu i dzieła Euklidesa, w ogóle nie wspomina o miejscu narodzin autora *Elementów*. Z kolei Pappus z Aleksandrii, matematyk działający na przełomie III i IV wieku, pisze wprawdzie o „Euklidesie z Aleksandrii", ale jak słusznie zauważa Bernard Vitrac, nie jest to jednoznaczne wskazanie miejsca narodzin, lecz miejsca pobytu [Vitrac 1990, s. 15]. Wspomniany Proklos, czasowe ramy działalności Euklidesa umieszcza między uczniami Platona, a Archimedesem. Na podstawie neoplatońskiego źródła można stwierdzić, że Euklides urodził się w pierwszej połowie IV wieku p.n.e., a jego twórcze życie zbiegło się z czasem panowania Ptolemeusza I Sotera, generała Aleksandra Wielkiego. Zmarł natomiast w drugiej połowie III wieku p.n.e. Żył więc około 80 lat.

Pappus wspomina o Euklidesie w kontekście wzmianki o Apoloniuszu, który miał być jednym z uczniów geometry w Aleksandrii. Możliwy jest więc następujący scenariusz duchowego wymiaru życia Euklidesa: najpierw pobyt w szkołach filozoficznych w Atenach, następnie, na zaproszenie Ptolemeusza, przybycie do Aleksandrii, rozwój działalności naukowo-dydaktycznej w Muzejonie oraz w Bibliotece. To właśnie Euklides prawdopodobnie zapoczątkował tradycję szkoły matematycznej w Aleksandrii.

Starożytni autorzy przytaczają moralizatorskie opowieści związane z Euklidesem. Pierwszą cytuje Proklos: Pewnego razu Ptolemeusz zapytał matematyka, czy nie ma krótszej drogi do geometrii, niż ta wyznaczona w *Elementach*. Na co Euklides odpowiedział: „Do Geometrii, nie ma prostej drogi zarezerwowanej dla królów" [Proclos, 68, 15]. Inną opowiastkę przytacza Stobajos: pewien początkujący uczeń, zapytał Euklidesa, jakie korzyści mógłby wyciągnąć z tej nauki. Zamiast do ucznia nauczyciel zwrócił się do niewolnika: „Daj mu trzy obole [...], ponieważ on również powinien czerpać korzyść z nauki!" [*Eclogues*, II, 228, 25-29].

2 Euklides był autorem wielu traktatów, z których część wykracza poza zagadnienia matematyczne. Jednakże wszystkie inne jego dzieła pozostały w cieniu

[1] Można tu wspomnieć również archonta Euklidesa z Aten, żyjącego w V wieku p.n.e.

najważniejszego - *Elementów*.

Rozpowszechnione jest przekonanie, że *Elementy* są sumą wiedzy z zakresu matematyki. Vitrac odrzuca tę klasyczną opinię. Według francuskiego wydawcy, najważniejsze dzieło Euklidesa nie zawiera „całości wiedzy", nie jest nawet „skrótem całości wiedzy" [Vitrac, 1990, s. 84]. Nie jest również pewne, czy *Elementy* były traktatem przeznaczonym wyłącznie na użytek szkoły, chociaż w późniejszym czasie stały się rzeczywiście podręcznikiem geometrii. Można przypuścić, że wykraczały poza ramy nauczania w Muzejonie będąc dziełem matematycznym - powiedzielibyśmy dziś - naukowym i zarazem dydaktycznym.

Tytuł dzieła, Στοιχεῖα, odsyła do pojęcia στοῖχος, „rząd", „szereg", „porządek" oraz στοιχεῖον, „jeden z szeregu", „jeden z serii". Ukryte jest tu odwołanie do:

1) Alfabetu greckiego, którego litery tworzą również „elementy" słów i całego języka. I jeszcze do języka, złożonego „z prostego dźwięku mowy" .

2) Fizyki. W tym sensie „element" jest cząstką, na którą dzieli się materia, ale ona sama jest już niepodzielna. Jako pierwszy o czterech podstawowych elementach mówił Empedokles, z tą różnicą, że nie używał pojęcia στοιχεῖα lecz ῥιζῶματα, „korzenie". Cztery elementy konstytuujące świat: ogień, powietrze, wodę i ziemię wymienia natomiast Platon w *Timajosie*.

3) Geometrii. Arystoteles w elementach dostrzega twierdzenia, które zawarte są w dowodach innych twierdzeń. Proklos, w swym komentarzu do *Elementów* Euklidesa, odróżnia twierdzenia będące „elementami" od tych „elementarnych". Elementami są twierdzenia, które warunkują poznanie innych twierdzeń, twierdzenia niezbędne do zrozumienia innych i zbudowania wiedzy, niczym wspomniane w 1) litery alfabetu potrzebne do zbudowania mowy oraz w 2) elementy niezbędne do zbudowania świata. Twierdzenia elementarne, chociaż ważne, uwolnione są od konieczności bycia twierdzeniami fundamentalnymi dla nauki i wykorzystania ich w dowodach innych twierdzeń.

3 Pierwszym wydawcą dzieła Euklidesa był matematyk Teon z Aleksandrii, „człowiek z Muzejonu", jak go nazywa Suda, żyjący w czwartym wieku, a zmarły na początku V wieku. Jego córką była słynna Hypatia. Data wydania *Elementów* przypada na około 364 rok.

W swym komentarzu do *Almagest* Ptolemeusza, Teon potwierdza, że jest wydawcą Στοιχεῖα, jednocześnie wspominając o zmianach jakie wprowadził do twierdzenia VI.33 [zob. Vitrac 1990, s. 45]. Aż do XIX wieku wydanie Teona było uznawane za najstarsze i stanowiło główny punkt odniesienia. Dopiero w 1808 roku, François Peyrard odkrył manuskrypt dzieła Euklidesa, pozbawiony wspomnianej wyżej poprawki Teona, z czego wywnioskował, że znaleziony tekst jest starszy od wydania scholarchy z Aleksandrii. W latach 1883-1888, duński uczony Johanne Luise Heiberg opublikował wydanie, które do dziś uznawane jest za klasyczną edycję i z której korzystają niemal wszyscy badacze i wydawcy Euklidesa. Heiberg w swym wydaniu wykorzystał zarówno manuskrypt odkryty przez Peyrarda, oznaczony *P = Codex Vaticanus, Gr. 190*, jak i manuskrypty odwołujące się do wydania Teona.

Najcenniejsze dwa manuskrypty zawierające 13 ksiąg Elementów pochodzą z IX wieku. Znajdują się w Bibliotece Watykańskiej oraz w Bodleian Library w

Oxfordzie. W sumie można wymienić około 80 rękopisów zawierających całość lub poszczególne części dzieła Euklidesa.

Grecki tekst *Elementów*, który poprzez Bizancjum dotarł do Arabów, został przetłumaczony na język arabski za czasów panowania Kalifa Harum Rashida około 800 roku. W 1120 angielski mnich Adelard z Bath przełożył arabską wersję na język łaciński. Kolejny łaciński przekład pojawił się w 1260 roku za sprawą Campanusa z Navary, który prawdopodobnie korzystał także z przekładu Adelarda z Bath. Dzieło Euklidesa w wersji Campanusa było pierwszym drukowanym wydaniem *Elementów*. Ukazało się w roku 1482 w Wenecji, pt. *Preclarissimus liber elementorum Euclidis*. W Wenecji ukazało się jeszcze jedno ważne wydanie, przygotowane przez Nicollo Tartaglia w 1543 roku. Do dziś ukazało się ponad 1000 edycji Elementów. Jedynie Biblia może poszczycić się większą ilością wydań.

Pierwszy polski - chociaż niepełny - przekład pt. *Euklidesa Początków Geometrii ksiąg ośmioro*, wydany w Wilnie w 1807 roku wyszedł spod pióra Józefa Czecha. Wydanie to oparte jest z kolei na dwujęzycznej wersji, łacińskiej i angielskiej, autorstwa Roberta Simsona z roku 1756. Tak jak w XIX wieku Czech korzystał z angielskiego wydania, tak i nowy projekt polskiego wydania, odwołuje się do anglojęzycznego i popularnego w XX wieku wydania Sir Thomasa Heath'a. Autorem zbiorowym przekładu opartego na wersji angielskiej jest młodzież gimnazjalna i licealna, skupiona wokół „Projektu Badawczego *Księgi Euklidesa"*, pod patronatem Oddziału Krakowskiego SNM oraz Grupy Roboczej SNM „Geometria CABRI".[2] Warto w tym miejscu podkreślić, że mimo wielkiego autorytetu w dziedzinie historii matematyki starożytnej, Heath dosyć swobodnie traktuje oryginał *Elementów*. W naszym mniemaniu, najlepszą obecnie anglojęzyczną wersją jest *Euclid's Elements of Geometry*, autorstwa Richarda Fitzpatricka z roku 2007.[3] Drugim, niezwykle ważnym najnowszym wydaniem jest czterotomowe *Euclide. Les Eléments*, Bernarda Vitraca, wydane w Paryżu w latach 1990-2001. Dzieło Vitraca jest też najważniejszym źródłem, z którego czerpaliśmy przygotowując niniejszy rys historyczny.

1.2 Nota o tekście i tłumaczeniu

1 *Euclidis Opera Omnia* zostały wydane przez J.L. Heiberga i H. Menge w latach 1883-1916. Od czasu ukazania się pozycja ta stanowi kanoniczną postać dzieł Euklidesa. W latach 1883-1888 jako pierwsze tomy tej edycji wydano *Euclidis Elementa*. W czterech pierwszych zamieszczono Księgi I-XIII *Elementów*, w piątym – scholia oraz Księgi XIV-XV, których autorstwo niegdyś przypisywano Euklidesowi.[4] Obok tekstu greckiego wydanie to zawiera także łacińskie tłumacze-

[2] Pracę można śledzić na stronie internetowej: www.matematycy.interklasa.pl/euklides/index.html.

[3] Całe wydanie zamieszczone jest w Internecie pod adresem: www.farside.ph.utexas.edu/euclid.html.

[4] „W pewnych manuskryptach greckich przekazujących *Elementy* Euklidesa znajdujemy nie tylko 13. ksiąg uznanych w całości za autentyczne, ale również dwie dodatkowe księgi tradycyjnie określane jako XIV i XV. Odnajdujemy je również w wielu arabskich i łacińskich manuskryptach, w średniowiecznych wersjach traktatu oraz we wszystkich pełnych wydaniach

nie dokonane przez Heiberga. Podstawę prezentowanego przekładu Ksiąg V-VI stanowi tekst grecki zamieszczony w drugim tomie *Euclidis Elementa* [Heiberg 1884].

Zgodnie z tradycją współczesnych tłumaczeń *Elementów* interpolacje w wydaniu Heiberga podajemy w nawiasach kwadratowych. Nie odbiegając też od współczesnych wersji przekładów nasz przekład uzupełniamy dodając pojedyncze słowa, czy wyrażenia. Sprowadzają się one w zasadzie do dodania czasownika „jest" tam, gdzie jego użycia domaga się składnia. Dodatki te są ujęte w nawiasy okrągłe.

Podmiot domyślny często występujący w tłumaczeniu Księgi V oznacza „wielkość" lub „wielkości". Księga VI jest pod tym względem bardziej zróżnicowana i często w domyśle pozostaje rodzaj figury geometrycznej. Tłumacze w takich okoliczność zwykle wspomagają czytelnika stosując dopowiedzenia, traci jednak na tym charakterystyczna dla stylu Euklidesa lapidarność. W naszym wydaniu wszystkie dopowiedzenia zostały przeniesione do komentarzy, gdzie w schematach twierdzeń, stosując odpowiednie symbole zaznaczamy, czy w danym zdaniu podmiotem jest kąt, trójkąt czy odcinek.

Do tradycji XX-wiecznych tłumaczeń *Elementów* należy wskazywanie twierdzeń, na jakie Euklides powołuje się w dowodach. Jest to zaznaczane albo na marginesach, albo w samym tekście, a wówczas w nawiasie kwadratowym podawany jest numer księgi (zapisany cyframi rzymskimi) oraz numer twierdzenia (zapisany cyframi arabskimi). Tak postępują Heiberg (w tłumaczeniu łacińskim), Heath, Vitrac oraz Fitzpatrick.[5] Zabieg ten ma charakter dydaktyczny i świadomie z niego rezygnujemy. W *Elementach* twierdzenia i definicje są wprawdzie przywoływane, ale przez dosłowne cytowanie tez, albo charakterystycznych fraz i ten zabieg językowy oddajemy w tłumaczeniu. Odniesienia do definicji i twierdzeń zaznaczamy natomiast w schematach zamieszczonych w komentarzu. Przy czym odnotowujemy tylko te, które znajdujemy w tekście, dlatego nasze opisy twierdzeń różnią się czasami od tych, jakie proponują Heath, Vitrac, czy Fitzpatrick.

W edycji Heiberga tekst grecki wraz z oznaczeniami „wielkości" oraz figur geometrycznych pisany jest czcionką pochyłą. W przekładzie łacińskim zasadniczy tekst podany jest czcionka prostą, zaś oznaczenia, podobnie jak wzory matematyczne, które Heiberg wprowadza do tłumaczenia w miejsce stale powtarzanych fraz, takich jak trójkąt, kąt itp., pisane są dużymi literami i czcionką pochyłą. W niniejszym przekładzie dla oznaczenia „wielkości" w Księdze V, a później obiektów geometrycznych w Księdze VI, używamy dużych liter pisanych czcionka prostą. To świadome odstępstwo od zwyczaju przyjętego w nowożytnych przekładach, jak i od funkcjonującego w samej matematyce, mniej więcej od XVI wieku, zwyczaju pisania znaków matematycznych kursywą. Podobne rozwiązanie przyjął też Vitrac.

Podział na akapity powtarzamy za tekstem greckim. W XX-wiecznych tłumaczeniach różnie to rozwiązywano. Heath dość swobodnie traktuje tekst grecki

i przekładach w Renesansie. W ten oto sposób, wielu czytelników w historii znało 'Euklidesa' w 15. księgach. [...] Nie ma wątpliwości, że chodzi o części nieautentyczne, dołączone do traktatu Euklidesa w procesie przekazu" [Vitrac, Djebbar 2011, s. 31].

[5] Vitrac stosuje w tym celu okrągłe nawiasy.

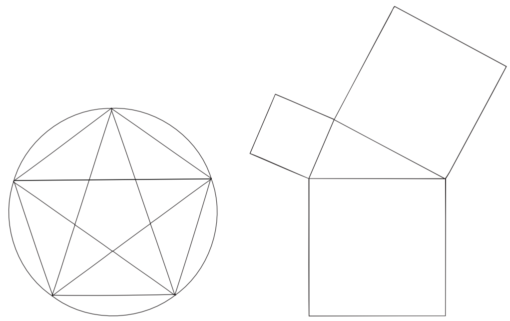
w tym zakresie, z kolei Vitrac i Fitzpatrick podążają wprost za edycją Heiberga.

W komentarzach porównujemy czasami nasze rozstrzygnięcia z przekładami Heath'a, Vitraca i Fitzpatrica, czynimy to jednak tylko wtedy, gdy zestawienia te poszerzają znaczenie tłumaczonych pojęć.

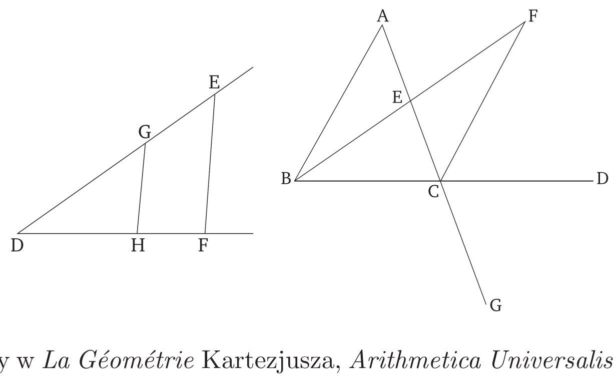
2 Jedną z cech charakterystycznych nowożytnej matematyki jest stosowanie symboli. Oto dla przykładu stała ze wzoru Eulera, liczba rzeczywista zapisana w systemie dziesiętnym, suma szeregu, całka względem miary, pochodna cząstkowa, macierz odwrotna:

$$e^{\pi i}, \quad 1.41... , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \int f d\mu, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad [a_{ij}]^{-1} .$$

Symbol matematyczny, ten utrwalony i powszechnie stosowany, to znak graficzny, w którym skumulowana jest wiedza pokoleń. Symbolom nowożytnej matematyki odpowiadają w *Elementach* diagramy oraz oznaczenia literowe. W niewielkim stopniu zmodyfikowane i uproszczone diagramy, jak chociażby pięciokąt wpisany w koło, czy kwadraty zbudowane na bokach trójkąta towarzyszące twierdzeniu Pitagorasa stały się dobrem kultury powszechnej.



Inne, jak na przykład te poniżej, zaczerpnięte z Księgi VI oraz I,



odnajdujemy w *La Géométrie* Kartezjusza, *Arithmetica Universalis* Isaaca Newtona, *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta, czy *Podstawach geometrii*, Karola Borsuka i Wandy Szmielew. Występują one tam jako bezimienne obiekty, które w odróżnieniu od ważniejszych twierdzeń, czy aksjomatów nie mają ani autora, ani historii. W komentarzach zwracamy baczną uwagę na diagramy i oznaczenia literowa, bo zawierają one istotną, chociaż niezwerbalizowaną wiedzę matematyczną.

W logice matematycznej i metamatematyce przyjmuje się, że dowód jest ciągiem formuł. Diagram, wykres, czy rysunek spełnia w takim podejściu co najwyżej pomocniczą funkcją i nie jest niezbywalnym składnikiem dowodu. W *Elementach* wszystkim twierdzeniom towarzyszą diagramy. Pierwsza i oczywista funkcja, jaką pełnią to ustalenie oznaczeń. Ale ponadto wiele dowodów wprost lub *implicte* odwołuje się do układu linii oraz punktów przedstawionych na diagramach. Nie podejmujemy się rozstrzygać, czy jest to tylko pewien brak w warstwie dedukcyjnej, czy też odmienny od współczesnego sposób prowadzenia dowodu. Przyjmujemy jako fakt, że diagramy stanowią integralny składnik twierdzeń Euklidesa.

W tradycji wydań *Elementów* nie wypracowano ani jednoznacznego kształtu diagramów, ani ich położenia względem tekstu. Tłumaczenia dwudziestowieczne nawiązują do rozwiązań przyjętych przez Heiberga. W *Euclidis Elementa* kolejne twierdzenia podawane są najpierw po grecku, a następnie w przekładzie na łacinę. Diagramy zamieszczane są tylko obok tłumaczeń, po tezie twierdzenia, przed, obok, lub bezpośrednio za częścią, w której ustalane są oznaczenia. Podobnie jest w wydaniu Heath'a i Vitraca. W edycji Fitzpatricka tekst grecki i angielski ułożone są w dwóch kolumnach, a diagramy położone są w każdej z nich tak, że wyraźnie oddzielają tezę od reszty twierdzenia. Diagramy zamieszczone w przedkładanym tłumaczeniu nawiązują wprost do edycji Heiberga.[6]

[6]Diagramy zamieszczone w niniejszym maszynopisie mają roboczy charakter i NIE SPEŁNIAJĄ JESZCZE TEGO WARUNKU.

Rozdział 2

Euklides, *Elementy*, Księga V

Definicje

1. Wielkość jest częścią wielkości, mniejsza większej, gdy mierzy większą.
2. I większa jest wielokrotnością mniejszej, gdy jest mierzona przez mniejszą.
3. Stosunek jest pewną relacją w odniesieniu do miary dwóch wielkości tego samego rodzaju.
4. Mówi się o wielkościach, że jedna jest w stosunku do drugiej, gdy zwielokrotnione, jedna może przekroczyć drugą.
5. Mówi się, że w tym samym stosunku są wielkości pierwsza do drugiej i trzecia do czwartej, gdy te same wielokrotności pierwszej i trzeciej jednocześnie przekraczają, są jednocześnie równe lub jednocześnie mniejsze od tych samych wielokrotności drugiej i czwartej, wziętych w odpowiedniej kolejności, zgodnie z dowolnym mnożeniem każda z dwóch każdej z dwóch.
6. I niech wielkości, które są w tym samym stosunku nazwane będą proporcjonalnymi.
7. Przy tych samych zaś wielokrotnościach, gdy wielokrotność pierwszej przekracza wielokrotność drugiej, a wielokrotność trzeciej nie przekracza wielokrotności czwartej, wtedy mówi się, że pierwsza jest w większym stosunku do drugiej niż trzecia do czwartej.
8. Proporcja zaś jest co najmniej w trzech wyrazach.
9. Gdy trzy wielkości są proporcjonalne, to mówi się, że stosunek pierwszej do trzeciej jest podwojony, w jakim ta jest do drugiej.
10. Gdy cztery wielkości są proporcjonalne, to mówi się, że stosunek pierwszej do czwartej jest potrojony, w jakim ta jest do drugiej i podobnie dalej, kolejno, dla dowolnej proporcji.
11. Te wielkości nazywane są odpowiadającymi: poprzedniki z poprzednikami, następniki zaś z następnikami.
12. Przemienny stosunek oznacza wzięcie poprzednika do poprzednika i następnika do następnika.
13. Odwrócony stosunek oznacza wzięcie następnika jako poprzednika, do poprzednika jako następnika.
14. Złożenie stosunku oznacza wzięcie poprzednika wraz z następnikiem jako jednej do samego następnika.
15. Rozdzielenie stosunku oznacza wzięcie nadwyżki, o jaką poprzednik przewyższa następnik do samego następnika.

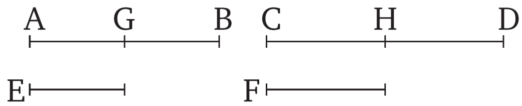
16. Konwersja stosunku oznacza wzięcie poprzednika do nadwyżki, o jaką poprzednik przewyższa następnik.

17. Gdy jest kilka wielkości, oraz inne równe im co do ilości, a wzięte parami są także w tym samym stosunku, to stosunek w równej (odległości) powstaje wtedy, gdy pierwsza do ostatniej pośród pierwszych wielkości jest jak pierwsza do ostatniej pośród drugich wielkości. Inaczej, wzięcie skrajnych z pominięciem pośrednich.

18. Gdy dane są trzy wielkości, oraz inne równe im co do ilości, to przemieszana proporcja powstaje wtedy, gdy jak poprzednik jest do następnika pośród pierwszych wielkości, tak poprzednik do następnika pośród drugich wielkości, i jak następnik do innej pośród pierwszych wielkości, tak inna do poprzednika pośród drugich wielkości.

Twierdzenia

1. Jeśli dowolne wielkości w dowolnej ilości są tymi samymi wielokrotnościami wielkości w tej samej ilości, to ile razy jedna z wielkości jest przez jedną, tyle razy wszystkie będą przez wszystkie.

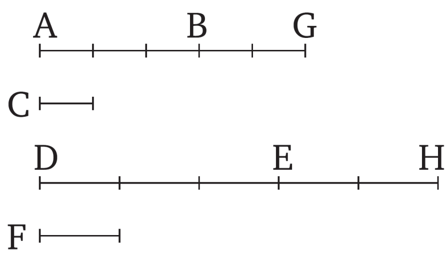


Niech danych będzie kilka dowolnych wielkości AB, CD, które są tymi samymi wielokrotnościami pewnych wielkości w tej samej ilości, E, F, każda każdej. Twierdzę, że jaką AB jest E, taką samą AB, CD będą E, F.

Skoro bowiem AB jest tą samą wielokrotnością E, co CD (jest) F, to ile jest w AB wielkości równych E, tyle samo jest w CD równych F. Niech, z jednej strony, AB zostanie podzielona na wielkości AG, GB równe E, z drugiej zaś, CD na CH, HD równe F. Wtedy ilość AG, GB będzie równa ilości CH, HD. Skoro, z jednej strony, AG jest równa E, z drugiej zaś, CH (jest równa) F, to AG jest równa E oraz AG, CH (są równe) E, F. Dlatego też równe są GB i E oraz GB, HD i E, F. Zatem, jaką AB jest E, taką samą AB, CD będą E, F.

Tym sposobem, jeśli dowolne wielkości w dowolnej ilości są tymi samymi wielokrotnościami wielkości w tej samej ilości, to ile razy jedna z wielkości jest przez jedną, tyle razy wszystkie będą przez wszystkich. Co było do okazania.

2. Jeśli pierwsza jest tą samą wielokrotnością drugiej, co trzecia czwartej, oraz piąta tą samą wielokrotnością drugiej co szósta czwartej, to pierwsza i piąta, gdy połączone, będą tą samą wielokrotnością drugiej co trzecia i szósta wielokrotnością czwartej.

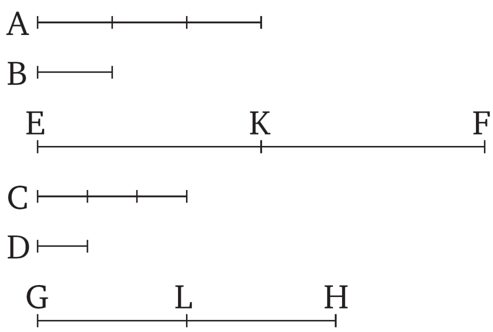


Niech bowiem pierwsza AB będzie tą samą wielokrotnością drugiej C, co trzecia DE czwartej F, oraz niech piąta BG, będzie tą samą wielokrotnością drugiej C, co szósta EH czwartej F. Twierdzę, że pierwsza i piąta AG, gdy połączone oraz trzecia i szósta DH będą tymi samymi wielokrotnościami drugiej C i czwartej F.

Skoro bowiem AB jest tą samą wielokrotnością C, co DE (jest) F, to ile jest w AB równych C, tyle jest także w DE równych F. Tak samo, ile jest w BG równych C, tyle samo w EH równych F. Zatem, ile jest w całości AG równych C, tyle samo (jest) w całości DH równych F. Zatem, ile razy AG jest przez C, tyle razy będzie DH przez F. Dlatego pierwsza i piąta AG, gdy połączone oraz trzecia i szósta DH, będą także tymi samymi wielokrotnościami drugiej C i czwartej F.

Tym sposobem, jeśli pierwsza i trzecia są tymi samymi wielokrotnościami drugiej i czwartej, a także piąta i szósta tymi samymi wielokrotnościami drugiej i czwartej, wtedy pierwsza i piąta, gdy połączone oraz trzecia i szósta będą także tymi samymi wielokrotnościami drugiej i czwartej. Co było do okazania.

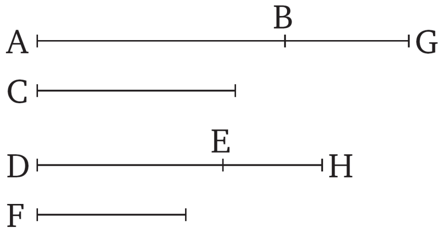
3. Jeśli pierwsza jest tą samą wielokrotnością drugiej, co trzecia czwartej, i gdy będą wzięte te same wielokrotności pierwszej i trzeciej, to wzięte w równej (odległości) będą także, każda z dwóch każdej z dwóch, tymi samymi wielokrotnościami jedna drugiej, pozostała czwartej.



Niech bowiem pierwsza A będzie tą samą wielokrotnością drugiej B, co trzecia C czwartej D oraz niech będą wzięte EF, GH te same wielokrotności A, C. Twierdzę, że EF jest tą samą wielokrotnością B, co GH (jest) D.

Skoro bowiem EF jest tą samą wielokrotnością A, co GH (jest) C, to ile jest w EF równych A, tyle samo jest także w GH równych C. Niech, z jednej strony, EF zostanie podzielona na wielkości EK, KF równe A, z drugiej zaś, GH na GL, LH równe C. Wówczas ilość EK, KF będzie równa ilości GL, LH. Skoro zaś A jest tą samą wielokrotnością B, co C (jest) D oraz EK jest równa A, zaś GL (jest równa) C, to EK jest tą samą wielokrotnością B, co GL (jest) D. Tak samo, KF jest tą samą wielokrotnością B, co LH (jest) D. Stąd, pierwsza EK jest tą samą wielokrotnością drugiej B, co trzecia GL czwartej D i piąta KF jest także tą samą wielokrotnością drugiej B, co szósta LH czwartej D. Stąd pierwsza i piąta EF, gdy połączone oraz trzecia i szósta GH są także tymi samymi wielokrotnościami drugiej B i czwartej D.

24. Jeśli pierwsza jest do drugiej w tym samym stosunku, co trzecia do czwartej, piąta zaś jest także do drugiej w tym samym stosunku, co szósta do czwartej, to pierwsza i piąta, gdy połączone, będą także w tym samym stosunku do drugiej, co trzeciej i szósta do czwartej.

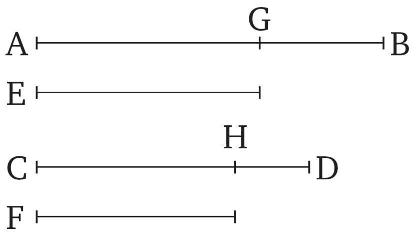


Niech bowiem pierwsza AB będzie w tym samym stosunku do drugiej C, co trzecia DE do czwartej F, niech zaś piąta BG będzie w tym samym do C, co szósta EH do czwartej F. Twierdzę, że pierwsza i piąta AG, gdy połączone, będą także w tym samym stosunku do drugiej C, co trzecia i szósta DH, do czwartej F.

Skoro bowiem jak BG jest do C, tak EH do F, zatem odwrotnie, jak C do BG, tak F do EH. Dlatego, z jednej strony, jak AB do C, tak DE do F, z drugiej zaś, jak C do BG, tak F do EH, zatem, w równej (odległości), jak AB jest do GB, tak DE do EH. Skoro, jeśli rozdzielone wielkości są proporcjonalne, to także połączone będą proporcjonalne, zatem, jak AG jest do GB, tak DH do HE. I jak BG jest do C, tak EH do F. Zatem, w równej (odległości), jak AG jest do C, tak DH do F.

Tym sposobem, jeśli pierwsza jest do drugiej w tym samym stosunku, co trzecia do czwartej, piąta zaś jest także do drugiej w tym samym stosunku, co szósta do czwartej, to pierwsza i piąta, gdy połączone, będą także w tym samym stosunku do drugiej, co trzeciej i szósta do czwartej. Co było do okazania.

25. Jeśli cztery wielkości są proporcjonalne, to największa [z nich] i najmniejsza są większe od dwóch pozostałych.



Niech AB, CD, E, F będą czterema proporcjonalnymi wielkościami, jak AB do CD, tak E do F, z jednej strony, AB będzie największą z nich, z drugiej zaś, F najmniejszą. Twierdzę, że AB, F są większe niż CD, E.

Niech bowiem zostanie założone, z jednej strony, że AG będzie równa E, z drugiej zaś, CH równa F. [Dlatego], skoro jak AB do CD, tak E do F oraz, z jednej strony, E jest równa AG, z drugiej zaś, F (równa) CH, to jak AB jest do CD, tak AG do CH. Skoro całość AB jest do całości CD, jak odjęta AG do odjętej CH, zatem także pozostałość GB do pozostałości HD, także będzie jak całość AB do całości CD. Zaś AB (jest) większa od CD. Zatem także GB (jest) większa od HD. Skoro, z jednej strony, AG jest równa E, z drugiej zaś, CH (jest równa) F, zatem AG, F są równe CH, E. I [skoro] gdy [nierówne są dodane do równych, to całości są nierówne, zatem gdy] GB, HD będąc nierówne i GB większą, z jednej strony, są dodane AG, F do GB, z drugiej zaś, są dodane CH, E do HD, stąd wynika, że AB, F są większe niż CD, E.

Tym sposobem, jeśli cztery wielkości są proporcjonalne, to największa z nich i najmniejsza są większe od dwóch pozostałych. Co było do okazania.

Rozdział 3

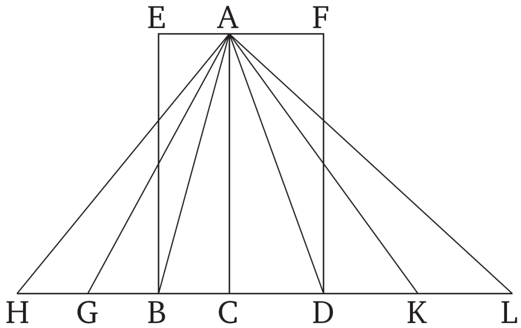
Euklides, *Elementy*, Księga VI

Definicje

1. Podobne figury prostolinijne to te, które mają kąty równe pojedynczo, i których boki wokół równych kątów są proporcjonalne.
2. [Wzajemnie proporcjonalne zaś figury to te, gdy w każdej z dwóch figur są poprzedniki i następniki stosunków.]
3. Mówi się, że prosta jest przecięta w stosunku skrajne do środkowej, gdy jak ona cała do większej odciętej, tak większa do mniejszej.
4. Wysokość każdej figury to prostopadła poprowadzona z wierzchołka do podstawy.
5. [Mówi się, że stosunek jest złożony ze stosunków, gdy miary stosunków, zwielokrotnione tworzą coś.]

Twierdzenia

1. Trójkąty i równoległoboki pod tą samą wysokością są jeden do drugiego jak ich podstawy.



Niech z jednej strony, trójkąty ABC, ACD, z drugiej zaś, równoległoboki EC, CF będą pod tą samą wysokością AC. Twierdzę, że jak podstawa BC jest do podstawy CD, tak trójkąt ABC do trójkąta ACD, oraz równoległobok EC do równoległoboku CF.

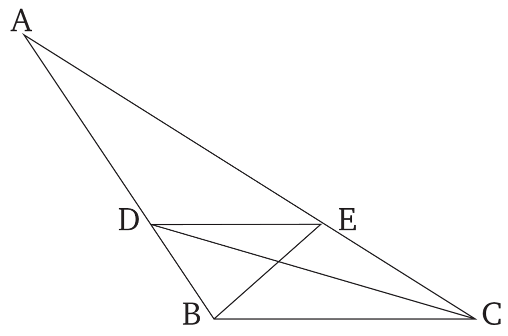
Niech bowiem przedłużona będzie BD w każdej z dwóch części do punktów H, L, i niech będą położone z jednej strony, równe podstawie BC w dowolnej ilości BG, GH, z drugiej zaś równe podstawie CD w dowolnej ilości DK, KL, i niech AG, AH, AK, AL będą połączone.

I skoro CB, BG, GH są sobie równe, to trójkąty AHG, AGB, ABC także są sobie równe. Zatem, ile razy podstawa HC jest przez podstawę BC, tyle także razy trójkąt AHC jest przez trójkąt ABC. Tak samo, ile razy podstawa LC jest przez podstawę CD, tyle także razy trójkąt ALC jest przez trójkąt ACD. I gdy podstawa HC jest równa podstawie CL, to trójkąt AHC jest także równy trójkątowi ACL, gdy podstawa HC przekracza podstawę CL, to trójkąt AHC także przekracza trójkąt ACL, i gdy mniejsza, to mniejszy. Skoro zaś są cztery wielkości, z jednej strony, dwie podstawy BC, CD, z drugiej zaś, dwa trójkąty ABC, ACD, to wzięto, z jednej strony, te same wielokrotności z podstawy BC oraz trójkąta ABC: podstawę BC oraz trójkąt ABC, z drugiej zaś, inne, dowolne, te same wielokrotności z podstawy CD oraz trójkąta ADC: podstawę LC i trójkąt ALC. Ale pokazano, że gdy podstawa HC przekracza podstawę CL, to trójkąt AHC przekracza także trójkąt ALC, i gdy równa, to równy, i gdy mniejsza, to mniejszy. Zatem, jak podstawa BC jest do podstawy CD, tak trójkąt ABC do trójkąta ACD.

Skoro zaś z jednej strony, równoległobok EC jest podwojeniem trójkąta ABC, z drugiej zaś równoległobok FC jest podwojeniem trójkąta ACD, a części są w tym samym stosunku, co takie same wielokrotności, zatem jak trójkąt ABC jest do trójkąta ACD, tak równoległobok EC do równoległoboku FC. Otóż, skoro pokazano, że jak podstawa BC do CD, tak trójkąt ABC do trójkąta ACD, i jak trójkąt ABC do trójkąta ACD, tak równoległobok EC do równoległoboku FC, zatem, także jak podstawa BC do podstawy CD, tak równoległobok EC do równoległoboku CF.

Tym sposobem, trójkąty i równoległoboki pod tą samą wysokością są jeden do drugiego jak ich podstawy. Co było do okazania.

2. Gdy pewna prosta została poprowadzona równolegle do jednego z boków trójkąta, to przetnie boki trójkąta proporcjonalnie. A gdy boki trójkąta są przecięte proporcjonalnie, to prosta łącząca przecięcia, będzie równolegle do pozostałego boku trójkąta.



Niech bowiem będzie poprowadzona DE, równoległa do BC, jednego z boków trójkąta ABC. Twierdzę, że jak BD jest do DA, tak CE do EA.

Niech BE, CD będą połączone.

Zatem trójkąt BDE jest równy trójkątowi CDE, bo są one na tej samej podstawie DE i w tych samych równoległych DE, BC. Zaś ADE jest pewnym innym trójkątem, a równe są w tym samym stosunku do tej samej. Zatem, jak trójkąt BDE jest do ADE, tak BD do DA; będąc bowiem pod tą samą wysokością, poprowadzoną z E prostopadle do AB, są jeden do drugiego jak ich podstawy. Tak samo, jak trójkąt CDE do ADE, tak CE do EA; a zatem, jak BD do DA, tak CE do EA.

Inaczej, niech boki AB, AC trójkąta ABC będą przecięte proporcjonalnie, jak BD do DA, tak CE do EA, i niech DE będzie połączona. Twierdzę, że DE jest równoległa do BC.

Na podstawie tych samych konstrukcji, skoro jak BD jest do DA, tak CE do EA, ale jak, z jednej strony, BD do DA, tak trójkąt BDE do trójkąta ADE, z drugiej zaś, jak CE do EA, tak trójkąt CDE do trójkąta ADE, zatem także, jak trójkąt BDE do trójkąta ADE, tak trójkąt CDE do trójkąta ADE. Zatem, każdy z dwóch trójkątów BDE, CDE jest w tym samym stosunku do ADE. Zatem trójkąt BDE jest równy trójkątowi CDE; i są one na tej samej podstawie DE. Zaś równe trójkąty będące także na tej

4.1 Wprowadzenie do teorii proporcji

4.1.1 Teoria proporcji wielkości

1 *Elementy* zawierają trzy teorie wyłożone w sposób aksjomatyczny: geometrię, arytmetykę i teorię proporcji „wielkości”. Geometria płaska, a później stereometria rozwijane są w Księgach I-IV, XI-XIII. To najlepiej znany i najdokładniej opracowany zarówno od strony matematycznej, jak i historycznej fragment *Elementów*. Arytmetyka jest wykładana w Księgach VII-IX. Do podstawowych technik stosowanych w tej części *Elementów* należą proporcja liczb, podana wprost jako definicja VII.20, algorytm ἀνθυφαίρεσις, znany we współczesnej matematyce jako algorytm Euklidesa oraz niezdefiniowane pojęcie „liczb w proporcji ciągłej”(ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον); w arytmetyce w sposób niejawny stosowana jest też zasada minimum: dowolny (niepusty) zbiór liczb posiada element najmniejszy. W Księdze V natomiast rozwinięta jest teoria proporcji „wielkości”. W geometrii Euklidesa pełni ona podobną rolą do tej, jaką arytmetyka liczb rzeczywistych odgrywa we współczesnej geometrii elementarnej. Z punktu widzenia metodologii, teoria z Księgi V jest najdoskonalszą spośród trzech wyżej wskazanych. W przedkładanym komentarzu objaśniamy jej podstawowe pojęcia, a więc wielkość (μέγεθος), proporcję (ἀναλογία), wielokrotność (πολλαπλάσιον), i przedstawiamy ją jako teorię dedukcyjną.

Księga V składa się z 18. definicji i 25. twierdzeń. Znamy dwie próby przedstawienia jej jako teorii aksjomatycznej, są one zawarte w pracach [Mueller 2006] oraz [Beckmann 1967]. Ian Mueller koncentruje się na wskazaniu aksjomatów charakteryzujących strukturę wielkości. Friedhelm Beckmann kładąc nacisk na rekonstrukcję teorii, obok aksjomatów charakteryzujących wielkości wskazuje też aksjomaty natury logicznej, na przykład te dotyczące równości. W niniejszym opracowaniu podobnie jak Mueller i Beckmann pokazujemy, że z aksjomatów charakteryzujących wielkości można wyprowadzić wszystkie 25. twierdzeń Księgi V. W tym celu przyjmujemy dodatkowe – dodatkowe w stosunku do tego, co jest wprost zapisane w Księdze V – aksjomaty. Są one podobne do tych, które podali Mueller i Beckmann. O ile jednak Mueller i Beckmann przyjmują je, aby wypełnić „luki” w dowodach Euklidesa, my wskazujemy dla nich uzasadnienie w samym tekście *Elementów* i pokazujemy, że z większości założeń dotyczących równości, porządku, czy dodawania Euklides zdawał sobie sprawę.

Jest rzeczą znaną, że w geometrii Euklidesa diagramy odgrywają ważną rolę. Obok oczywistej roli pomocniczej przy ustalaniu oznaczeń oraz syntetycznego przedstawienia konstrukcji, diagramy zawierają też założenia, które nie są wprost zapisane, ale są stosowane w dowodach. W związku z tym wielu komentatorów uznaje odwołania do diagramów za uchybienie metodologiczne. Takie podejście do *Elementów* zostało ostatnio zakwestionowane. W pracy [Avigad et al. 2009] w celu jak najwierniejszego opisania rozumowań Euklidesa przedstawiona specjalną „logikę diagramów”, która uprawomocnia korzystanie w dowodach z założeń wprowadzonych *via* diagramy.

W Księdze V diagramy nie odrywają znaczącej roli i nie wpływają na dedukcję, a wszystkie niepisane założenia, jakie w sobie kryją sprowadzają się do tego, że „wielkości” są na nich przedstawiane w jeden tylko sposób – jako odcinki. Rekonstruując teorię proporcji zwracamy natomiast uwagę na oznaczenia literowe. Podobnie jak z diagramami, także i w tym zakresie Euklides jest konsekwentny, a co ważniejsze, analizując te oznaczenia łatwo możemy wskazać stosowane zależności, chociaż nie zawsze są one wprost nazwane.

Odtwarzając strukturę dedukcyjną Księgi V, kolejne definicje i twierdzenia zapisujemy symbolicznie w języku dzisiejszej matematyki. Aby zaś ukazać ścisły związek tych wzorów z *Elementami*, do tekstu tłumaczenia dodajemy (zaznaczając to nawiasem kwadratowym) oznaczenia wielkości oraz formuły odpowiadające konkretnym frazom.

I jeszcze słowo o sposobie notacji, jaki przyjęliśmy. W *Elementach*, wielkości, które nie są poddawane operacjom algebraicznym, oznaczane są dużymi literami A, B, C, gdy natomiast są dodawane lub „dzielone”– dwoma literami, AB, BC. Gdy objaśniamy Księgę V, do tekstu dodajemy, zapisując to w nawiasie kwadratowym, oznaczenia wielkości pisane dużymi literami i czcionką pochyłą. Gdy przedstawiamy interpretację, wielkości oznaczamy małymi literami. Praktyczne konsekwencje tej konwencji są takie, że gdy Euklides pisze, iż wielkości A, E są równe, to w objaśnieniu napiszemy $A = E$, w interpretacji natomiast, w miejsce A, E wprowadzimy jeden znak, na przykład:

„Skoro, z jednej strony, AG [a] jest równa E [a], z drugiej zaś, CH [c] (jest równa) F [c] ...”.

Podstawową trudność w odbiorze Księgi V stanowi natłok oznaczeń literowych. Przedstawiona wyżej konwencja ma na celu, z jednej strony, ułatwienie lektury, z drugiej, jasne i skrótowe przedstawienie treści matematycznych zawartych w definicjach i twierdzeniach Euklidesa.

Wszystkie znane nam opisy *Elementów* posługują się klasycznym rachunkiem zdań, chociaż wiadomo, że w IV i III wieku p.n.e. był on był on stosowany sporadycznie i często *implicite*, np. przez Arystotelesa w sylogistyce. W niniejszej pracy postępujemy podobnie, naszym celem jest bowiem przedstawienie Księgi V jako teorii dedukcyjnej w rozumieniu dzisiejszej matematyki.

4.1.2 Księga I. Pojęcia wspólne

1 Księga V stanowi zamkniętą całość dedukcyjną. Jedyne nawiązania do wcześniejszych partii *Elementów* dotyczą aksjomatów równości, zamieszczonych w Księdze I w grupie *Pojęcia Wspólne* (κοιναὶ ἔννοιαι). W edycji Heiberga znajduje się dziewięć takich *Pojęć*, przy czym cztery zaznaczone są jako interpolacje. Wszystkie one są podane w Dodatku zamieszczonym w rozdziale 6. W tym miejscu cytujemy te, które odgrywają istotną rolę w Księgach V-VI:

(KE1) Równe tej samej są równe jedna drugiej.

(KE2) I gdy równe są dodane do równych, to całości są równe.

(KE3) I gdy równe są odjęte od równych, to pozostałości są równe.

(KE7) I nakładające się są równe jedna drugiej.

(KE8) I całość jest większa od części.[1]

Trzy pierwsze aksjomaty są powszechnie interpretowane formułami:

(KE1) $(A = C \wedge B = C) \rightarrow A = B$,

(KE2) $(A = B \wedge C = D) \rightarrow A + C = B + D$,

(KE3) $(A = B \wedge C = D) \rightarrow A - C = B - D$.

W związku z siódmym aksjomatem przyjmuje się, że „nakładające się" to figury przystające. Aksjomat ósmy interpretujemy formułą:

(KE8) $A + B > A$.

Dalej pokażemy, że w ten sposób wyrażana jest zgodność porządku wielkości z ich dodawaniem, nie jest to więc aksjomat równości we współczesnym rozumieniu.

W schematach twierdzeń, które dalej przedstawimy, uwidoczniony będzie jedynie aksjomat (KE8), i wystąpi on pod nazwą (E3), jako jeden z aksjomatów charakteryzujących strukturę wielkości, aksjomaty (KE1)-(KE3) natomiast włączymy do grupy oznaczonej symbolem Ab (skrótem od słowa abelowy) charakteryzującej działania i porządek.

Do aksjomatów równości dodajemy jeszcze prawo podstawiania w postaci

(PP) $$(A = B \wedge C = D \wedge A > C) \rightarrow B > D.$$

W Księdze V jest ono często stosowane. Oto odpowiedni fragment dowodu twierdzenia V.7:

„[...] zatem D jest także równe E. Ale F jest inną, dowolną. Zatem, gdy D przekracza F, to także E przekracza F", czyli

$$(D = E \wedge D > F) \rightarrow E > F.$$

Pojęcia Wspólne są wspólne dla obiektów geometrycznych oraz liczb. W Księdze V obok wielkości znajdujemy jeszcze wielokrotności, stosunki i proporcje; aksjomaty równości nie odnoszą się do nich.

Dla interpretacji Księgi VI istotne jest, że w *Elementach* równość przyjmuje trzy znaczenia i występuje jako: identyczność, przystawanie oraz tzw. równość pól. W związku z tym we wprowadzeniu do Księgi VI przedstawimy Euklidesa teorię równości pól. Dla interpretacji Księgi V wystarczy natomiast przyjąć, że równość jest relacją, zwrotną, symetryczną, przechodnią i spełnia prawo podstawiania. Odnotujmy zarazem, że zwrotność jako taka jest ideą obcą matematyce greckiej, a równość jest relacją między dwoma obiektami.[2]

[1] W oryginale słowo „część" (μέρος) występuje w liczbie pojedynczej. W języku polskim dopełniacz liczby pojedynczej jest akurat taki sam jak dopełniacz liczby mnogiej.

[2] Więcej informacji na temat równości podajemy w artykułach: [Błaszczyk, Mrówka 2011], [Błaszczyk, Mrówka 2012].

4.1.3 Księga V. Definicje

1 Księgę V otwiera grupa osiemnastu definicji. Omówimy je po kolei. W wybranych przypadkach będziemy postępować w sposób następujący: cytując definicję, do tekstu *Elementów* dodajemy oznaczenia wielkości i relacji, następnie, korzystając z przyjętych oznaczeń, przedstawiamy formułę matematyczną odpowiadającą danej definicji.

Df 1. „Wielkość $[A]$ jest częścią wielkości $[B]$, mniejsza większej $[A < B]$, gdy mierzy większą". Fakt, że A mierzy B wyrażamy formułą

$$\exists n[nA = B], \quad \text{gdzie } \; nA =_{df} \underbrace{A + \cdots + A}_{n-razy}.$$

Greckie słowo μέγεθος oddawano w tekstach łacińskich jako *quantitas*, w językach nowożytnych zaś funkcjonują zamiennie dwa odpowiedniki: w angielskim – *quantity*, *magnitude*, we francuskim – *quantité*, *grandeur*, w niemieckim – *Quantität*, *Grösse*.

Df 2. „I większa $[B]$ jest wielokrotnością mniejszej $[A]$, gdy jest mierzona przez mniejszą".

Z dwóch pierwszych definicji wnosimy, że jedna i ta sama formuła, $nA = B$, odpowiada wyrażeniom:

(1) A „jest częścią" B,

(2) A „mierzy (καταμέτρῇ)" B,

(3) B „jest wielokrotnością" A,

(4) B „jest mierzona" przez A.

Df 3. Fakt, iż wielkości A, B są tego samego rodzaju oddajemy formułą $A, B \in \mathfrak{M}$, gdzie $\mathfrak{M}$ jest systemem relacyjnym $(M, +, <)$.[3] W proponowanym ujęciu działanie $+$ oraz porządek $<$ są więc pojęciami pierwotnymi.[4] We współczesnej matematyce podobne postępowanie odnajdujemy np. w teorii ciał uporządkowanych, gdzie w punkcie wyjścia przyjmuje się, że dany jest układ $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$, a zależności między działaniami i porządkiem zapisane są w aksjomatach.[5]

Wielkości to obiekty geometryczne; wymieniając jedynie te, do których stosowana jest teoria proporcji w Księdze VI, są to: odcinki, trójkąty, prostokąty, wielokąty (wypukłe), łuki okręgu oraz kąty (środkowe i wpisane w koło). Dzielą się one na rodzaje: odcinki tworzą jeden rodzaj, trójkąty – drugi, itd. Wielkości tego samego rodzaju można dodawać oraz porównywać z uwagi na relację „większy–mniejszy". W ten sposób otrzymujemy strukturę odcinków $\mathfrak{M}_o$,

[3] Ściśle rzecz biorąc jest więc tak, że $A, B \in M$.

[4] Beckmann przyjmuje, że porządek jest definiowany formułą: $A > B \leftrightarrow_{df} \exists E[A = B + E]$; zob. [Beckamnn 1967, s. 51].

[5] Zob. [Błaszczyk 2012].

trójkątów $\mathfrak{M}_t$, itd. Euklidesa teoria równości pól pozwala przyjąć i taką interpretację, że wszystkie wielokąty razem wzięte tworzą jeden rodzaj, a wówczas otrzymalibyśmy tylko trzy rodzaje wielkości: odcinki, wielokąty oraz kąty.[6]

W definicji V.3 definiowane jest pojęcie stosunku. Jak dotąd nikomu jeszcze nie udało się znaleźć matematycznego wyrazu dla tej definicji, nie ma to jednak wpływu, jak zobaczymy dalej, na wnioskowania przeprowadzane w Księdze V. Z drugiej strony, pojęcie stosunku odegrało ważną rolę w historii matematyki w związku z rozwojem pojęcia liczby. I tak Newton w książce *Arithmetica Universalis* przyjął taką oto definicję:

„Przez liczbę rozumiemy nie tyle wielość jedności, co abstrakcyjny stosunek pewnej wielkości do innej wielkości tego samego rodzaju, którą przyjmujemy za jedność. Są one trojakiego rodzaju: całkowite (*integer*), ułamkowe (*fractus*) i niewymierne (*surdus*). Całkowite, które są mierzone przez jedność, ułamkowe, w których jedność jest mierzona przez wielokrotności (*submultiplex*), i niewymierne, które są niewspółmierne z jednością”.[7]

Takie rozumienie liczby funkcjonowało jeszcze i w XIX wieku, za sprawą bardzo popularnej, wydanej najpierw po niemiecku, tłumaczonej na rosyjski, francuski i angielski, książce Eulera *Elementy algebry*, gdzie we wstępie autor pisze:

„Generalnie, matematyka nie jest niczym innym, jak właśnie nauką o wielkościach, czy też, nauką badającą sposoby mierzenia. Nie możemy jednak mierzyć czy wyznaczyć wielkości inaczej niż przyjmując inną wielkość tego samego rodzaju jako znaną i wyznaczyć ich wzajemny stosunek [...] wyznaczania, czy mierzenia wielkości dowolnego rodzaju, sprowadzają się więc do tego: niech zostanie ustalona dowolnie jedna z wielkości, która będzie tego samego rodzaju, co ta, którą chcemy zmierzyć i niech będzie przyjęta jako miara lub jednostka; następnie niech będzie wyznaczony stosunek tej wielkości do tej miary. Stosunek ten zawsze wyznacza się za pomocą liczb, zatem liczba nie jest niczym innym, jak stosunkiem jednej wielkości do innej, dowolnie obranej za jednostkę. Stąd jasno wynika, że wszystkie wielkości można wyrazić za pomocą liczb”.[8]

Sam pomysł wyróżnienia jednej wielkości jako jedności, który jest kluczowy w wyżej przytoczonych definicjach liczby, pochodzi od Kartezjusza. W traktacie *La Géométrie*, odwołując się do Euklidesa teorii proporcji przyjął on taką oto definicję ilorazu odcinków:

„Tak jak arytmetyka polega tylko na czterech, czy pięciu działaniach, czyli dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu, dzieleniu, oraz wyciąganiu pierwiastków, co można uznać za pewien rodzaj dzielenia, tak i w geometrii, aby znaleźć szu-

[6] Istotnym argumentem na rzecz takiej interpretacji jest twierdzenie VI.25, gdzie w stosunku, tj. jako wielkości tego samego rodzaju, występuje kwadrat i równoległobok.

[7] [Newton 1707], s. 4. W pierwszym zdaniu cytowanego fragmentu Newton wyraźnie odnosi się do definicji liczby, tj. liczby naturalnej, podanej w Księdze VII *Elementów*: „Liczba to wielość monad”, lub inaczej „Liczba to wielość jedności”.

[8] [Euler 1807], s. 4. Istotne przesunięcie znaczeń znajdujemy w angielskim tłumaczeniu tej książki, *Elements of Algebra*, translated from French, with the notes of M. Bernoulli, and additions of M. De La Grange, London 1822, gdzie słowo *rapport* (stosunek) przełożono jako *proportion*; w pierwszym wydaniu z roku 1770 znajduje się tam odpowiednio słowo *Verhältnis*.

kane linie, wystarczy jedynie dodać lub odjąć pewne inne linie; lub też mając jedną, którą nazwę jednością, aby upodobnić ją jak to tylko możliwe do liczb, i która, w zasadzie, może być dowolnie wybrana, a następnie mając dane dwie inne, znaleźć czwartą linię, która będzie do jednej z tych danych, tak jak druga jest do jedności, co jest tym samym, co mnożenie; lub jeszcze znaleźć czwartą linię, która będzie do jednej z nich, tak jak jedność jest do drugiej, co jest tym samym, co dzielenie".[9]

U Kartezjusza odcinek, powiedzmy c, który ma być wynikiem dzielenia odcinków a, b jest wyznaczany na podstawie twierdzenia VI.4 z proporcji $a : b :: c : 1$. Newton, a za nim Euler, w definicji liczby poprzestaje na samym stosunku $c : 1$, przy czym ani Newton, ani Euler nie podają definicji stosunku.

Df 4. „Mówi się o wielkościach $[A, B]$, że jedna jest w stosunku do drugiej, gdy zwielokrotnione $[nA]$, jedna może przekroczyć drugą $[nA > B]$".

Tę definicję powszechnie nazywa się aksjomatem Archimedesa. Zapisujemy ją jak następuje

$$(\forall A, B)\exists n[nA > B], \quad \text{gdzie} \quad A, B \in \mathfrak{M}.$$

Aksjomat Archimedesa jest *explicite* stosowany w Księdze V tylko jeden raz: w dowodzie twierdzenia V.8. W Dodatku 2. pokazujemy, że bez tego założenia twierdzenie V.8 nie zachodzi.

W dzisiejszej matematyce aksjomat Archimedesa, gdy jest formułowany w grupie uporządkowanej $(G, +, 0, <)$ ma postać:

$$(\forall a, b \in G)(\exists n \in \mathbb{N})[0 < a < b \rightarrow na > b].$$

Warunek $0 < a$ pozwala mówić o elementach dodatnich grupy. Definicja V.4 wyklucza istnienie elementu neutralnego, dlatego ściśle rzecz biorąc w strukturze wielkości nie ma wielkości dodatnich.

Dla porównania przytoczymy jeszcze aksjomat Archimedesa w wersji podanej przez samego Archimedesa w traktacie *O sferze i cylindrze* jako lemat 5.:

„Co do nierównych linii i nierównych powierzchni, i nierównych brył, to większa $[A]$ przekracza mniejszą $[B]$, o taką $[A - B]$, że dodawana do siebie może przekroczyć wyznaczoną między wszystkimi $[C]$, gdy porównane jedna z drugą".[10]

Zdanie to zapiszemy formułą:

$$(\forall A, B, C)(\exists n)[B < A \rightarrow n(A - B) > C].$$

Aksjomat Archimedesa, w wersji takiej jaką przyjęliśmy zapisując definicję V.4, wprowadził do nowożytnej matematyki w roku 1885 Otto Stolz.[11] Później był on rozważany w kontekście podstaw geometrii przez Giuseppe Veronese. W roku 1900 Hilbert podając pierwszą aksjomatykę liczb rzeczywistych przyjął, że

---

[9] [Descartes 1637], s. 297-298.

[10] *De Sphaera et Cylindro*, I. Lamb. 5, [w:] *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. I, ed. J.L. Heiberg, B. G. Teubner, Leipzig, 1880.

[11] Zob. [Stoltz 1885], s. 69.

V.24
Niech $AB : C :: DE : F, \;\; BG : C :: EH : F.$
Twierdzę, że $AG : C :: GH : F.$

$$\begin{array}{rcl}
BG : C :: EH : F & \xrightarrow[V7]{} & C : BG :: F : EH \\
AB : C :: DE : F, & & \\
C : BG :: F : EH & \xrightarrow[V22]{} & AB : BG :: DE : EH \\
 & \xrightarrow[V18]{} & AG : GB :: DH : HE \\
BG : C :: EH : F & \xrightarrow[V22]{} & AG : C :: DH : F.
\end{array}$$

c.b.d.o.

V.25
Niech $AB : CD :: E : F, \;\; AB > CD > F, \;\; AB > E > F.$ *
Twierdzę, że $AB + F > CD + E.$
Niech $AG = E, \; CH = F.$

$$\begin{array}{rcl}
AB : CD :: E : F, & & \\
E = AG, \; F = CH & \rightarrow & AB : CD :: AG : CH \\
AB : CD :: AG : CH & \xrightarrow[V19]{} & GB : HD :: AB : CD \\
AB > CD & \rightarrow & GB > HD \\
AG = E, CH = F & \rightarrow & AG + F = CH + E \\
GB \neq HD, GB > HD, & & \\
GB + (AG + F), & & \\
HD + (CH + E) & \rightarrow & AB + F > CD + E.
\end{array}$$

c.b.d.o.

* „Niech AB, CD, E, F będą czterema proporcjonalnymi wielkościami [...] z jednej strony, AB będzie największą z nich, z drugiej zaś, F najmniejszą”

4.2.2 Twierdzenia i komentarze

1 W tej części przedstawiamy twierdzenia z Księgi V w dwóch kolejnych wersjach: pierwsza to uproszczony opis tego, co faktycznie jest w tekście *Elementów*, w tym przypadku do numeru twierdzenia dodajemy indeks a, drugi schemat zawiera dowód spełniający dzisiejsze kryteria poprawności, tę wersję oznaczamy indeksem b. W opisie twierdzeń wielkości oznaczamy małymi literami, wielokrotności – dużymi. Tym sposobem pod numerem V.1 przedstawiamy opis tego, co faktycznie zawiera tekst pierwszego twierdzenia z Księgi V, pod numerem V.1a opis tego, co zawiera tekst twierdzenia, ale przy zmienionych oznaczaniach, pod numerem V.1b – interpretację twierdzenia V.1.

Kolejność liter tworzących formuły, a występujących w proporcjach, równościach, czy nierównościach, odpowiada kolejności, w jakiej odpowiednie frazy,

V.25a
Niech $a : c :: e : f,\ \ a > c > f,\ \ a > e > f$.
Twierdzę, że $a + f > c + e$.
Niech $a = e + g,\ c = f + h$.

$$\begin{array}{rcl} a : c :: e : f & \xrightarrow[V19]{} & g : h :: a : c \\ a > c & \rightarrow & g > h. \\ e = e,\ f = f & \xrightarrow[KE2]{} & e + f = f + e \\ g \neq h,\ g > h, & & \\ g + (e + f), & & \\ h + (f + e) & \rightarrow & a + f > c + e \end{array}$$

c.b.d.o.

Przejście
$$e = e,\ f = f \xrightarrow[KE2]{} e + f = f + e$$
odpowiada słowom

„Skoro, z jednej strony, AG [e] jest równa E [e], z drugiej zaś, CH [f] (jest równa) F [f], zatem AG, F [$e + f$] są równe CH, E [$f + e$]”.

V.25b

$$(a : c :: e : f \wedge a > c > f \wedge a > e > f) \rightarrow a + f > c + e.$$

Dowód.

$$
\begin{array}{rcl}
a > e & \xrightarrow[E2]{} & (\exists g)[a = e + g] \\
c > f & \xrightarrow[E2]{} & (\exists h)[c = f + h] \\
a : c :: e : f, & & \\
a = e + g, & & \\
c = f + h & \xrightarrow[V19]{} & g : h :: a : c \\
g : h :: a : c,\ a > c & \xrightarrow[df\,5]{} & g > h. \\
 & \xrightarrow[Ab]{} & e + f = f + e \\
g > h & \xrightarrow[E3]{} & g + (e + f) > h + (f + e) \\
g + (e + f) > h + (f + e) & \xrightarrow[Ab]{} & (e + g) + f > (f + h) + e
\end{array}
$$

□

VI.1b
Niech równoległoboki $EC,\ FC$ będą pod tą samą wysokością AC.
Twierdzę, że $BC : CD :: \Diamond(EC) : \Diamond(FC)$.
Dowód.

$$\begin{aligned}
\Diamond(EC) = 2\triangle(ABC),& \\
\Diamond(FC) = 2\triangle(ACD) \quad & \xrightarrow[V15]{} \quad \triangle(ABC) : \triangle(ACD) :: \\
& \qquad\quad :: \Diamond(EC) : \Diamond(FC) \\
BC : CD :: \triangle(ABC) : \triangle(ACD),& \\
\triangle(ABC) : \triangle(ACD) :: \Diamond(EC) : \Diamond(FC) \quad & \xrightarrow[V11]{} \quad BC : CD :: \Diamond(EC) : \Diamond(FC)
\end{aligned}$$

c.b.d.o.

VI.2a
Niech w trójkącie ABC zachodzi $DE \| BC$.
Twierdzę, że $BD : DA :: CE : EA$.
Dowód.
$B \rightleftharpoons E, C \rightleftharpoons D$ (A.1)

$$\begin{array}{rcl} DE, DE\|BC^{*} & \xrightarrow[I38]{} & \triangle(BDE) = \triangle(CDE) \\ \triangle(ADE)^{**} & \xrightarrow[V7]{} & \triangle(BDE) : \triangle(ADE) :: \triangle(CDE) : \triangle(ADE) \\ E \perp AB^{***} & \xrightarrow[VI1]{} & \triangle(BDE) : \triangle(ADE) :: BD : DA \\ & \xrightarrow[\delta]{} & \triangle(CDE) : \triangle(ADE) :: CE : EA \\ & \xrightarrow[V11]{} & BD : DA :: CE : EA \end{array}$$

*   „są na tej samej podstawie DE i w tych samych równoległych DE, BC”
** „ADE jest pewnym innym trójkątem”
*** „będąc bowiem pod tą samą wysokością, poprowadzoną z E prostopadle do AB”

Druga część twierdzenia jest prowadzona „na podstawie tych samych konstrukcji”. Otwiera ją spójnik ἀλλά, który oddajemy słowem „inaczej”.

VI.2b
Niech boki trójkąta ABC będą tak przecięte, że $BD : DA :: CE : EA$.
$D \rightleftharpoons E$ (A1)
Twierdzę, że $DE \| BC$.
Dowód.

$$\begin{array}{rcl} BD : DA :: CE : EA, & & \\ BD : DA :: \triangle(BDE) : \triangle(ADE), & & \\ CE : EA :: \triangle(CDE) : \triangle(ADE) & \xrightarrow[V.11]{} & \triangle(BDE) : \triangle(ADE) :: \\ & & :: \triangle(CDE) : \triangle(ADE) \\ \triangle(BDE) : \triangle(ADE) :: & & \\ :: \triangle(CDE) : \triangle(ADE) & \xrightarrow[V.9]{} & \triangle(BDE) = \triangle(CDE), DE^{*} \\ & \xrightarrow[I.39]{} & DE\|BC \end{array}$$

c.b.d.o.

* „są na tej samej podstawie DE”

Odniesienia do twierdzenie VI.2 jest w Księdze VI oddawane frazą:

„I skoro AD poprowadzono równolegle do EC, jednego z boków trójkąta BCE, zatem, proporcjonalnie, jak ... jest do ..., tak ... do ...”(VI.3).

W związku z tym przejęliśmy specjalne oznaczenie, mianowicie $AD \| \triangle(BCE)$. Euklides zawsze precyzuje, do którego boku prowadzona jest równoległa.

Rozdział 7

Bibliografia

Abramowiczówna Zofia, *Słownik grecko-polski*, t. 1-4, PWN, Warszawa 1958-1965.

Acerbi Fabio, *Drowning by Multiples. Remarks on the Fifth Book of Euclid's Elements, with Special Emphasis on Prop. 8*, Archive for History Exact Sciences 57, 2003, 175–242.

Avigad Jeremy, Dean Edward, Mumma John, *A Formal System of Euclid's* Elements, The Review of Symbolic Logic 2 (4), 2009, 700-768.

Beckmann Friedhelm, *Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids*, Archive for History of Exact Sciences IV, 1967, 1-144.

Błaszczyk Piotr, *O definicji 5 z Księgi V Elementów Euklidesa*, Investigationes Linguisticae XIV, 2006, 120–146; http://www.inveling.amu.edu.pl.

Błaszczyk Piotr, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2007.

Błaszczyk Piotr, *O definicji 7 z Księgi V Elementów Euklidesa*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce 46, 2010, 117-139.

Błaszczyk Piotr, Mrówka Kazimierz, *Między oczywistością a dedukcją. Platon i Euklides o równości*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce 48, 2011, 127-147.

Błaszczyk Piotr, *O ciałach uporządkowanych*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticum Mathematicae IV, 2012, 15-30; http://www.up.krakow.pl/mat/annal-dyd/

Błaszczyk Piotr, *Nota o* Über den Zahlbegriff, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticum Mathematicae IV, 2012, 195-198; http://www.up.krakow.pl/mat/annal-dyd/

Błaszczyk Piotr, Mrówka Kazimierz, *Księga V Elementów Euklidesa*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 3-4, 2012.

Borsuk Karol, Szmielew Wanda, *Podstawy Geometrii*, PWN, Warszawa 1972.

Cajori Florian, *A History of Mathematical Notations*, t. I, Cosimo Classics, New York 2007 (reprint wydania z 1928 roku).

Chantraine Pierre, *Dictionnaire étymologique de la langue grecque. Histoire des mots*, Libraire Klincksieck, Paris 2009.

Czech Józef, *Euklidesa początków geometryi ksiąg ośmioro, toiest sześć pierwszych, iedenasta i dwunasta z dodanemi przypisami dla pożytku młodzi akademickiej wytłumaczone przez Józefa Czecha*, Wilno 1817 (reprint: Wy- dawnictwo Artystyczne i Filmowe, Warszawa 1981); wydanie pierwsze: Wilno 1807.

Descartes René, *La Géométrie*, Leiden 1637.

Euler Leonard, *Élémens d'algébre*, Courcier, Paris 1807.

Fitzpatrick Richard, *Euclid's Elements of Geometry*, edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick, 2007; http://farside.ph.utexas.edu/euclid.html

Grassmann Hermann, *Lehrbuch der Arithmetik*, Enslin, Berlin 1861.

Hallett Michael, Majer Ulrich, *David Hilbert's* Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902, Springer, Berlin 2004.

Heath Thomas Little, *Euclid. The Thirteen Books of The Elements*, Vol. I-III, translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Dover, New York 1956 (reprint wydania: Cambridge University Press, Cambridge 1926); wydanie pierwsze: Cambridge 1908.

Heiberg Johan Ludvig, *Euclidis Elementa.* edidit et Latine interretatus est I.L. Heiberg, Vol. I-V, in aedibus B.G. Teubneri, Lipsiae 1883-1888.

Heiberg Johan Ludvig, *Euclidis Elementa.* edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, Vol. II, Libraros V-IX Continens, in aedibus B.G. Teubneri, Lipsiae 1884.

Herz-Fischler Roger, *A mathematical history of division in extreme and mean ratio*, Wilfrid Laurier University Press, Waterloo (Canada) 1987.

Hilbert David, *Über den Zahlbegriff*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8, 1900, 180–184; *O pojęciu liczby*, tłum. J. Pogonowski, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV, 2012, http://www.up.krakow.pl/mat/annal-dyd/

Hilbert David, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig 1902.

Hölder Otto, *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe, 53, Leipzig 1901, 1–63.

Joyce David, *Euclid's Elements*, 1997;
http://aleph0.clarku.edu/ ˜djoyce/java/elements/elements.html.

Kołodziejczyk Leszek, Szczepkowski Rafał, *Euklides, Elementy, Księga I*, Zagadnienia Naukoznawstwa 2, 2005, 274-312.

Kuratowski Kazimierz, Mostowski Andrzej, *Teoria Mnogości*, PWN, Warszawa 1976.

Liddell Henry George, Scott Robert, Jones Henry Stuart, *A Greek-English Lexicon*, Oxford University Press, Oxford 1966.

Mueller Ian, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Dover, New York 2006 (reprint wydania: MIT Press, Cambridge, Massachusetts 1981).

Newton Isaac, *Arithmetica Universalis*, Londini 1707.

Netz Reviel, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, Cambridge UP, Cambridge 1999.

Proclos, *Commentaires sur le Ier livre des Éléments d'Euclide*, tłum. P. Ver Eecke, Bruges 1948.

Saito Ken, *Duplicate Ratio in Book VI of Euclid's Elements*, Historia Scientiarum 2-3, 1993, 115-135.

Stobaeus, *Ioannis Stobaei Eclogarum physicarum et ethicarum*, t. 1-2, wydanie August Meineke, Leipzig 1860-1864.

Stolz Otto, *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, Teubner, Leipzig 1885.

Weber Heinrich, *Lehrbuch der Algebra. Einleitung*, Vieweg, Braunschweig 1898.

Vitrac Bertrand, *Euclide. Les Eléments*, Vol. 1-4, traduits du texte de Heiberg, PUF, Paris 1990-2001.

Vitrac Bernard, Djebbar Ahmed, *Le Livre XIV des Éléments d'Euclide: versions grecques et arabes*, SCIAMVS 12, 2011, 29-158.

Spis treści