# ANALIZA FILOZOFICZNA ROZPRAWY RICHARDA DEDEKINDA
## Stetigkeit und irrationale Zahlen

**Akademia Pedagogiczna**
**im. Komisji Edukacji Narodowej**
**w Krakowie**
**Prace Monograficzne nr 479**

PIOTR BŁASZCZYK

# ANALIZA FILOZOFICZNA ROZPRAWY RICHARDA DEDEKINDA
## Stetigkeit und irrationale Zahlen

Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej
Kraków 2007

**Recenzenci**
prof. dr hab. Jerzy Pogonowski
prof. dr hab. Jan Woleński

© Copyright by Piotr Błaszczyk & Wydawnictwo Naukowe AP,
Kraków 2007

redaktor Marta Łukaszczyk
projekt okładki i ilustracje Katarzyna Kopańska

ISSN 0239-6025
ISBN 978-83-7271-446-6

Redakcja/Dział Promocji
Wydawnictwo Naukowe AP
30-084 Kraków, ul. Podchorążych 2
tel./fax (012) 662-63-83, tel. (012) 662-67-56
e-mail: wydawnictwo@ap.krakow.pl

Zapraszamy na nasza stronę internetową:
http://www.wydawnictwoap.pl

łamanie Maciej Major
druk i oprawa Wydawnictwo Naukowe AP, zam. 46/07

# Spis treści

**Wstęp** . . . . . 7

**KONSTRUKCJA DEDEKINDA** . . . . . 13

Podstawowe fakty i definicje . . . . . 15
Richard Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872 . . . . . 20
Ku paradygmatowi teoriomnogościowemu . . . . . 69
Edmund Landau, *Grundlagen der Analysis*, 1930 . . . . . 71

**O CIĄGŁOŚCI LINII PROSTEJ** . . . . . 77

Aksjomat Cantora-Dedekinda . . . . . 79
Karol Borsuk, Wanda Szmielew, *Podstawy geometrii*, 1972 . . . . . 81
O aspektach linii prostej . . . . . 102

**KONSTRUKCJA CANTORA** . . . . . 107

Konstrukcja . . . . . 109
Zupełność . . . . . 113
Georg Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, 1872 . . . . . 122
Georg Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, 1883 . . . . . 134
Ernest Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable and The Theory of Fourier's Series*, 1907 . . . . . 138
Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914 . . . . . 148
Przestrzeń Baire'a . . . . . 156
Pierścień ilorazowy . . . . . 159

**O PRZEDMIOCIE MATEMATYCZNYM. CZĘŚĆ I** . . . . . 161

O przedmiocie matematycznym . . . . . 163

**NIESTADARDOWE LICZBY RZECZYWISTE** . . . . . 179

Niestandardowe liczby rzeczywiste . . . . . 181

**EUDOXOS versus DEDEKIND** . . . . . 189

Euklides, *Elementy* . . . . . 191
*Teza* Heatha . . . . . 208
Heinrich Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 1895 . . . . . 222
Wielkość mierzalna . . . . . 236

Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* 1888 . . . . . 247
**ARCHIMEDES, ARCHIMEDS** . . . . . 255
Ciało uporządkowane . . . . . 257
Ciało formalnie rzeczywiste . . . . . 264
Ciało szeregów formalnych Laurenta . . . . . 269
Ciało zupełne w sensie Archimedesa . . . . . 276
Ciało unormowane . . . . . 282
Ciało topologiczne . . . . . 291
**AKSJOMATY** . . . . . 301
David Hilbert, *Über den Zahlbegriff*, 1900 . . . . . 303
Lew Pontragin, *Grupy topologiczne*, 1961 . . . . . 312
Klasycy współczesnej filozofii matematyki o liczbach rzeczywistych . . . . . 315
**O PRZEDMIOCIE MATEMATYCZNYM. CZĘŚĆ II** . . . . . 331
Odrzucenie *tertium non datur* . . . . . 333
Ontologia bez czystych jakości idealnych . . . . . 353
*Zurück zum Text selbst* . . . . . 372
**Bibliografia** . . . . . 377

# Wstęp

**1.** Niniejsza praca jest z pogranicza ontologii i filozofii matematyki. Pokazujemy w niej, że przedmiot matematyczny jest przedmiotem intencjonalnym. Teza przeprowadzona jest na przykładzie liczb rzeczywistych w ramach ontologii wypracowanej przez Romana Ingardena.

Przez ontologię rozumiemy ogólną teorię przedmiotu. W ontologii Ingardena scharakteryzowanych jest wiele form przedmiotowych: idee, rzeczy, wytwory świadomości. Przedmiot intencjonalny to rodzaj przedmiotu indywidualnego, coś, co w pewnym zakresie może być uznane za wytwór świadomości.

Przedmioty intencjonalne po raz pierwszy analizował Ingarden na przykładzie dzieła literackiego w książce *Das literarische Kunstwerk* (1931). Z czasem, rozwijając ideę dzieła sztuki jako przedmiotu intencjonalnego, uwzględniając specyfikę innych dziedzin, przedstawił analogiczną koncepcję dzieła muzycznego, teatralnego, malarskiego i architektonicznego. W rezultacie przedmiot intencjonalny jest formą przedmiotową, która ma jeszcze różne odmiany. Tak więc przedmiotem intencjonalnym jest dzieło literackie, a jego specyficzna forma polega na budowie warstwowej. Przedmiotem intencjonalnym jest też *fragment* dzieła literackiego, mianowicie postać literacka, a jego specyficzna forma polega na dwustronności budowy oraz schematyczności. W pracy opisujemy liczby rzeczywiste jako przedmiot intencjonalny charakteryzujący się dwustronnością budowy i schematycznością.

Cechą charakterystyczną dzieła literackiego i postaci literackiej, rozumianych jako przedmioty intencjonalne, jest ich szczególny związek z konkretnym tekstem. Tym wyróżnionym tekstem, z którym związane są liczby rzeczywiste jest rozprawa Richarda Dedekinda *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872). W niniejszej pracy analizujemy ją w kategoriach ontologii Romana Ingardena, stąd tytuł „Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda *Stetigkeit und irrationale Zahlen*".

**2.** Teza pracy jest uzasadniana w dwóch rozdziałach o wspólnym tytule *O przedmiocie matematycznym*. Pozostałe części to bardzo rozbudowane przypisy i dopowiedzenia. Przedstawiamy w nich analizy różnych tekstów matematycznych i fragmenty wybranych teorii matematycznych.

Referując teorie, podając twierdzenia czasami przywołujemy tylko samą tezę, innym razem prezentujemy również dowód. Zwykle nie jest to pełny dowód, lecz fragment, do którego odwołujemy się w argumentacji filozoficznej.

**3.** W rozdziale pierwszym *Konstrukcja Dedekinda* omawiamy rozprawę *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. W tej części tekst matematyczny traktujemy jako twór warstwowy wyróżniając w nim warstwy: (1) odniesień do problemów, (2) odniesień historycznych, (3) oznaczeń symbolicznych, (4) dedukcyjną oraz (5) przedmiotową.

(Ad 1) Warstwa odniesień do problemów jest wyznaczona jasno i wyraźnie, chodzi w niej o ustalenie „czysto arytmetycznych i w pełni ściśle ugruntowanych zasad analizy infinitezymalnej".[1] Celem rozprawy jest zatem określenie, zdefiniowanie struktury, w której można zrekonstruować analizę matematyczną. Podstawowym pojęciem, kluczem do tej rekonstrukcji jest dla Dedekinda „rzeczywista definicja istoty ciągłości".[2] W ostatnim paragrafie rozprawy pokazuje on, że z zasady ciągłości (sformułowanej w trzecim paragrafie) można wyprowadzić „podstawowe twierdzenia analizy infinitezymalnej".[3]

(Ad 2) Warstwa odniesień historycznych to odniesienia do *Elementów* Euklidesa związane z deklarowanym w rozprawie przeciwstawieniem arytmetyczne *versus* geometryczne. Z jednej strony polega to na nowym, *niegeometrycznym* rozumieniu liczb wymiernych, z drugiej – wiąże się z pytaniem o ciągłość linii prostej. Odwołując się do „dobrze znanych rozważań",[4] Dedekind pokazuje, że „na prostej znajduje się nieskończenie wiele punktów, które nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej", co „prowadzi do stwierdzenia luk, niezupełności, czyli nieciągłości" dziedziny liczb wymiernych.[5] Dalej jednak, podawszy swoją słynną zasadę ciągłości, dowodzi w sposób „czysto arytmetyczny", że porządek liczb wymiernych nie jest ciągły. Nie zakłada wówczas jakichkolwiek związków liczb wymiernych z linią prostą, ale *implicite* przyjmuje, że tworzą one ciało uporządkowane i archimedesowe.

[1] [Dedekind 1872], s. 136.
[2] [Dedekind 1872], s. 137.
[3] [Dedekind 1872], s. 148.
[4] Zob. „Dotychczasowe rozważania są wszystkim tak dobrze znane, że wielu uzna powtarzanie ich za zbyteczne" [Dedekind 1872], s. 140.
[5] Zob. [Dedekind 1872], s. 140-141.

(Ad 3) Warstwa oznaczeń symbolicznych wyróżnia się w dowodzie twierdzenia o ciągłości liczb rzeczywistych. Problemem jest tu podwójne przedstawienie liczb wymiernych. Odtwarzając konstrukcję Dedekinda w teorii mnogości, liczby wymierne raz są elementami zbioru $\mathbb{Q}$, czyli klasami abstrakcji znanej relacji w zbiorze liczb całkowitych, a raz odpowiednimi przekrojami zbioru $(\mathbb{Q}, <)$. Te dwa przedstawienia powiązane są pojęciem izomorfizmu ciał uporządkowanych: z jednej strony (wyjściowego) ciała liczb wymiernych, z drugiej – ciała ułamków ciała liczb rzeczywistych. W *Stetigkeit und irrationale Zahlen* ani wyjściowe liczby wymierne nie są zbiorami, ani ułamki w ciele liczb rzeczywistych nie są utożsamiane z przekrojami liczb wymiernych. Efekt, który w redukcji teoriomnogościowej daje pojęcie izomorfizmu, Dedekind osiąga poprzez odpowiednie oznaczenia i związane z tym pojęcie „stwarzania".

(Ad 4) Przez warstwę dedukcyjną *Stetigkeit und irrationale Zahlen* rozumiemy to, co powszechnie uważa się za istotę matematyki, czyli definicje, twierdzenia i dowody. Tak więc do tej warstwy zaliczamy m.in. definicję przekroju zbioru uporządkowanego, definicję ciągłości porządku, definicję ciągłości funkcji, dowód ciągłości porządku liczb rzeczywistych oraz dowody twierdzeń, które – jak pisze Dedekind – „wyjaśniają związek, jaki zachodzi między naszymi dotychczasowymi rozważaniami a pewnymi podstawowymi twierdzeniami analizy infinitezymalnej".[6]

(Ad 5) W warstwie przedmiotowej *Stetigkeit und irrationale Zahlen* wyróżniamy trzy obiekty: liczby wymierne, linię prostą i liczby rzeczywiste. Zasadniczym celem niniejszej pracy jest opisać liczby rzeczywiste jako przedmiot intencjonalny charakteryzujący się dwustronnością budowy i schematycznością.

**4.** Współczesne komentarze do *Stetigkeit und irrationale Zahlen* w zdecydowanej większości skupiają się na dwóch fragmentach rozprawy: słowach Dedekinda, że „liczby niewymierne są stwarzane"[7] oraz na tym, że definicja ciągłości oddaje „istotę ciągłości"[8]; a przy tym jedno i drugie traktowane jest niemal literalnie.

W pracy pokazujemy, że fakt, iż liczby niewymierne „są stwarzane" wiąże się z konkretnym problemem matematycznym, a nie z jakimś stanowiskiem filozoficznym. Otóż wspomniane wyżej podwójne przedstawienie liczb wymiernych sprawia, że Dedekind nie identyfikuje ułamków w ciele liczb rzeczywistych z odpowiednimi przekrojami zbioru liczb wymiernych, ale przyjmuje, że ułamki są jedynie aspektami tych przekrojów. Z kolei słynna zasada

[6] [Dedekind 1872], s. 148.
[7] Zob. [Dedekind 1872], s. 143.
[8] Zob. [Dedekind 1872], s. 141.

ciągłości Dedekinda mówiąca – w nieznacznie zmienionej postaci – że żaden przekrój zbioru liniowo uporządkowanego nie wyznacza ani luki, ani skoku, nie jest „istotą" ciągłości już chociażby dlatego, że charakteryzuje tylko zbiory uporządkowane, a nie odnosi się np. do ciągłości funkcji, to po pierwsze, a po drugie, nie charakteryzuje zbioru uporządkowanego z dokładnością do izomorfizmu.

Trzecim najczęściej spotykanym nieporozumieniem występującym w komentarzach do *Stetigkeit und irrationale Zahlen* jest przeświadczenie, że w rozprawie tej Dedekind ustanawia związek (bijekcję) między linią prostą a liczbami rzeczywistymi; kwestia ta wiąże się z tak zwanym aksjomatem Cantora-Dedekinda. W rozdziale drugim *O ciągłości linii prostej* pokazujemy, jak faktycznie we współczesnej geometrii przedstawiany jest ten związek. W tym celu omawiamy twierdzenie o istnieniu miary na prostej, bo właśnie w nim ustalana jest bijekcja między linią prostą a liczbami rzeczywistymi. Analizując jego dowód pokazujemy, że powtarzane w komentarzach do *Stetigkeit* jako wciąż aktualne przeciwstawienie arytmetyczne *versus* geometryczne jest bezpodstawne.

**5.** W tym samym roku co *Stetigkeit und irrationale Zahlen* ukazał się artykuł Georga Cantora *Über die Ausdehnung eines Satz aus der Theorie der trigonometrische Reihen*. Powszechnie uważa się, że jest tam przedstawiona inna niż ta przedłożona przez Dedekinda konstrukcja liczb rzeczywistych. W rozdziale trzecim *Konstrukcja Cantora* omawiamy wskazaną rozprawę, pokazujemy też, jak trudności związane z dowodem twierdzenia o zupełności liczb rzeczywistych doprowadziły do teoriomnogościowej rekonstrukcji tego, co dzisiaj nazywamy Cantora konstrukcją liczb rzeczywistych. Podstawowy sens redukcji teoriomnogościowej polega właśnie na pokonaniu tych czysto matematycznych przeszkód.

**6.** Odniesienia do filozoficznych interpretacji rozpraw *Stetigkeit und irrationale Zahlen* oraz *Über die Ausdehnung eines Satz aus der Theorie der trigonometrische Reihen* zamieszczamy w rozdziale pierwszym i trzecim w formie dygresji. Interpretacje te nie są ani na tyle liczne, ani na tyle rozbudowane, aby poświęcać im osobny rozdział.

**7.** Zasadniczą część pracy stanowi rozdział czwarty *O przedmiocie matematycznym. Część I*. Przedstawiamy w nim kategorie ontologiczne odnoszące się do przedmiotu intencjonalnego oraz ich bezpośrednie zastosowanie do opisu liczb rzeczywistych. W kolejnych rozdziałach omówione są najważniejsze kwestie, najpierw matematyczne, a później ontologiczne, związane z przedstawionym opisem.

**8.** Rozdział piąty *Niestandardowe liczby rzeczywiste* związany jest z warstwą odniesień do problemów. Pokazujemy w nim, że liczby rzeczywiste są tylko jednym z możliwych rozwiązań problemu, przed którym stanął Dedekind w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Otóż wyniki klasycznej analizy matematycznej można zrekonstruować w ciele niestandardowch liczb rzeczywistych, a więc w strukturze, która nie jest ciągła w sensie Dedekinda.

**9.** Rozdział szósty *Eudoxos versus Dedekind* poświęcony jest historyczności przedmiotu matematycznego, czy mówiąc technicznym językiem ontologii: pochodności bytowej przedmiotu intencjonalnego. Jego zasadniczym celem jest zweryfikowanie powtarzanej przez cały wiek XX tezy o bliskim związku, czy podobieństwie konstrukcji Dedekinda i definicji proporcji z Księgi V *Elementów* Euklidesa, tezy, którą doskonale ilustrują słowa Johna Conway'a:

„Dedekind (a przed nim autor piątej księgi [*Elementów* – P.B.] Euklidesa – uważa się, że był to Eudoxos) skonstruował liczby rzeczywiste z liczb wymiernych. Konstrukcja polegała na podziale liczb wymiernych na dwa takie zbiory $L$ i $R$, że żaden element zbioru $L$ nie jest większy od żadnego elementu zbioru $R$, i na ustaleniu, że wtedy, gdy w klasach $L$ i $R$ nie ma elementów skrajnych, to za pomocą 'podziału' $\{L, R\}$ definiowana jest nowa liczba".[9]

W rozdziale szóstym pokazujemy, że teza ta wynika stąd, iż Księga V *Elementów* jest interpretowana i odczytywana przez pryzmat rozprawy *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

**10.** Rozdziały siódmy *Archimedes, Archimedes* oraz ósmy *Aksjomaty* poświęcone są definicjom liczb rzeczywistych. W matematyce liczby rzeczywiste są zazwyczaj definiowane jako ciało uporządkowane w sposób ciągły. Ujęcie to pochodzi z artykułu Davida Hilberta *Über den Zahlbegriff* (1900), a uzasadniane jest twierdzeniem o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych: istnieje jedno, z dokładnością do izomorfizmu, ciało uporządkowane w sposób ciągły. Obok tego są jednak twierdzenia, które pozwalają zdefiniować liczby rzeczywiste jako szczególne ciało unormowane (twierdzenie Ostrowskiego), lub szczególne ciało topologiczne (twierdzenie Pontriagina).

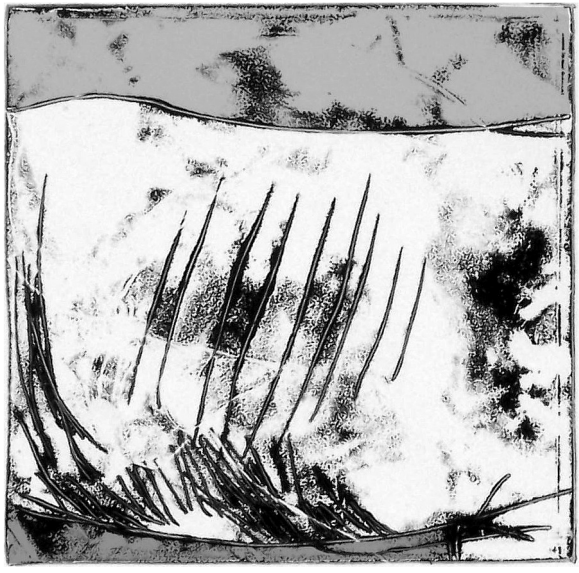
W rozdziale *Aksjomaty* omawiamy wspomniany artykuł Hilberta i czwarty rozdział książki Lwa Pontriagina *Grupy topologiczne* poświęcony ciałom topologicznym. Ujęcia liczb rzeczywistych związane z tymi tekstami – tj. liczby rzeczywiste rozumiane jako szczególne ciało uporządkowane i liczby

[9] [Conway 2001], s. 3.

rzeczywiste rozumiane jako szczególne ciało topologiczne – można uznać za ujęcia aksjomatyczne, ale takie, które odnoszą się do różnych partii *Stetigkeit und irrationale Zahlen* i w których aksjomatycznie są charakteryzowane różne pojęcia. Otóż pojęcie ciała uporządkowanego wyróżnia w *Stetigkeit* dowód twierdzenia o ciągłości liczb rzeczywistych i pozwala wypełnić luki występujące w warstwie dedukcyjnej rozprawy. Aksjomaty operacji domknięcia, które są dla Pontriagina aksjomatycznym opisem pojęcia granicy, pozwalają połączyć dwa rozumienia ciągłości występujące w *Stetigkeit*, mianowicie ciągłość porządku i ciągłość funkcji.

**11.** W ostatnim rozdziale pracy pokazujemy ograniczenia ontologii Ingardena oraz przedstawiamy taką jej modyfikację, w której możemy mówić o miejscach niedookreślenia przedmiotu matematycznego. Rzecz dotyczy pojęcia własności. W ontologii Ingardena własność, *via* pojęcie konkretyzacji, związana jest ze sferą czystych jakości idealnych. Takiej koncepcji nie sposób jednak odnieść do przedmiotu matematycznego, bo o jakich czystych jakościach idealnych można mówić w związku z liczbami rzeczywistymi? Dlatego, aby być jak najbliżej praktyki matematycznej, przyjmujemy, że o przedmiocie matematycznym można orzekać, to co jest orzekane w teoriach matematycznych. Proponowane rozwiązanie wiążemy z interpretacją wprost wypowiedzianej przez Ingardena tezy, że w sferze przedmiotów intencjonalnych nie obowiązuje ontologiczna zasada wyłączonego środka. Dzięki modyfikacji pojęcia własności, zdania niezależne teorii mnogości, takie jak hipoteza kontinuum i hipoteza Suslina możemy interpretować jako miejsca niedookreślenia liczb rzeczywistych. Kwestie te są opisane w rozdziale *O przedmiocie matematycznym. Część II* i zamykają uzasadnienie tezy, że liczby rzeczywiste są przedmiotem intencjonalnym.

# KONSTRUKCJA DEDEKINDA



# Podstawowe fakty i definicje

W pracach matematycznych terminologia związana z ciągłością porządku nie jest jeszcze jednolita, dlatego, aby uniknąć nieporozumień, ustalimy nazewnictwo.

Przyjmujemy, że $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{C}$ – zbiór liczb zespolonych. Przyjmujemy, że ciało algebraiczne liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ oznaczamy jako $\mathcal{Q}$, ciało algebraiczne liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ oznaczamy jako $\mathcal{R}$, ciało algebraiczne liczb zespolonych $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ oznaczamy jako $\mathcal{C}$. Przyjmujemy, że ciało uporządkowane liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$ oznaczamy jako $\mathfrak{Q}$, ciało uporządkowane liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ oznaczamy jako $\mathfrak{R}$. Przyjęte oznaczenia będziemy stosowali w całej pracy.

**1.** Niech $(X, <)$ oznacza zbiór liniowo uporządkowany. Niech $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Element $a \in X$ nazywamy kresem górnym zbioru $A$, gdy spełnia warunek

$$(\forall y \in A[y \leqslant a]) \wedge \forall x \in X[\forall y \in A[y \leqslant x] \rightarrow a \leqslant x].$$

Kres górny zbioru $A$, o ile istnieje, jest dokładnie jeden i jest oznaczany jako $\sup A$.

Element $a \in X$ nazywamy kresem dolnym zbioru $A$, gdy spełnia warunek

$$(\forall y \in A[a \leqslant y]) \wedge \forall x \in X[\forall y \in A[x \leqslant y] \rightarrow x \leqslant a].$$

Kres dolny zbioru $A$, o ile istnieje, jest dokładnie jeden i jest oznaczany jako $\inf A$.

Zbiory liniowo uporządkowane $(X_1, <_1)$, $(X_2, <_2)$ nazywamy izomorficznymi, gdy istnieje taka bijekcja $f : X_1 \mapsto X_2$, że

$$\forall x, y \in X_1[x <_1 y \leftrightarrow f(x) <_2 f(y)].$$

**2.** Porządek $<$ w zbiorze $(X, <)$ nazywamy gęstym, gdy

$$\forall x, y \in X \exists z \in X[x < y \to x < z < y].$$

Parę uporządkowaną $(A, B)$ nazywamy przekrojem zbioru $(X, <)$, gdy $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = X$ oraz

$$\forall x \in A \forall y \in B[x < y];$$

zbiór $A$ nazywamy klasą dolną, zbiór $B$ – klasą górną przekroju $(A, B)$.

Możliwe są cztery rodzaje przekrojów; przekrój $(A, B)$ może być taki, że:

(1) w $A$ istnieje element największy i w $B$ istnieje element najmniejszy,
(2) w $A$ istnieje element największy i w $B$ nie istnieje element najmniejszy,
(3) w $A$ nie istnieje element największy i w $B$ istnieje element najmniejszy,
(4) w $A$ nie istnieje element największy i w $B$ nie istnieje element najmniejszy.

Mówimy, że przekrój $(A, B)$ wyznacza skok, gdy jest pierwszego rodzaju, tj.

$$(\exists x \in A \forall y \in A[y \leqslant x]) \wedge (\exists x \in B \forall y \in B[x \leqslant y]).$$

Porządek $<$ nazywamy dyskretnym, gdy każdy przekrój zbioru $(X, <)$ wyznacza skok.

Własność „żaden przekrój zbioru $(X, <)$ nie wyznacza skoku" jest równoważna gęstości porządku.

2.1. Zbiór $(X, <)$ nazywamy dobrze uporządkowanym, gdy w każdym niepustym podzbiorze $Y \subset X$ istnieje element najmniejszy.

Naturalny porządek zbioru liczb całkowitych $(\mathbb{Z}, <_Z)$ jest dyskretny i nie jest dobrym porządkiem. Porządek liczby porządkowej von Neumanna $\omega + 1$ jest dobrym porządkiem i nie jest dyskretny.[1]

**3.** Mówimy, że przekrój $(A, B)$ wyznacza lukę, gdy jest czwartego rodzaju, tj.

$$(\forall x \in A \exists y \in A[x < y]) \wedge (\forall x \in B \exists y \in B[y < x]).$$

Żaden przekrój zbioru liczb naturalnych z naturalnym porządkiem $(\mathbb{N}, <_N)$ nie wyznacza luki, a jednocześnie istnieje taki przekrój, który wyznacza skok, w istocie każdy przekrój zbioru $(\mathbb{N}, <_N)$ wyznacza skok.

Z drugiej strony, żaden przekrój zbioru liczb wymiernych z naturalnym porządkiem $(\mathbb{Q}, <_Q)$ nie wyznacza skoku, a jednocześnie przekrój $(A, B)$, gdzie $A = \mathbb{Q} \backslash B$, $B = \{q \in \mathbb{Q}_+ : 2 <_Q q^2\}$, wyznacza lukę.

[1] Liczby porządkowe von Neumanna są zdefiniowane w [Kuratowski, Mostowski 1978], rozdz. VII, §9.

3.1. Własność „żaden przekrój zbioru $(X, <)$ nie wyznacza luki" jest równoważna zasadzie supremum: każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór $Y$ zbioru $X$ posiada w $X$ kres górny.

Istotnie, niech para $(A, B)$ będzie przekrojem zbioru $(X, <)$. Wówczas zbiór $A$, jako że jest ograniczony z góry, posiada kres górny $a = \sup A$. Można pokazać, że $a$ jest albo największym elementem w klasie dolnej, albo najmniejszym elementem w klasie górnej.

Z drugiej strony, gdy $Y \subset X$ jest zbiorem niepustym i ograniczonym z góry, to para $(A, B)$, gdzie

$$A = \{x \in X : \exists y \in Y [x \leqslant y]\}, \quad B = X \backslash A,$$

jest przekrojem zbioru $(X, <)$. Z tego, że przekrój $(A, B)$ nie wyznacza luki wynika, że zachodzi jeden z warunków: (1) w zbiorze $A$ istnieje element największy i w zbiorze $B$ nie istnieje element najmniejszy, (2) w zbiorze $A$ nie istnieje element największy i w zbiorze $B$ istnieje element najmniejszy, (3) w zbiorze $A$ istnieje element największy i w zbiorze $B$ istnieje element najmniejszy. W każdym z tych przypadków istnieje supremum zbioru $A$.[2]

3.2. Podobnie jak wyżej można pokazać, że własność „żaden przekrój zbioru $(X, <)$ nie wyznacza luki" jest równoważna zasadzie infimum: każdy niepusty i ograniczony z dołu podzbiór $Y$ zbioru $X$ posiada w $X$ kres dolny.

Zauważmy, że w zbiorze $(\mathbb{N}, <_N)$ spełniona jest zasada supremum, a zasada infimum to po prostu zasada indukcji: w każdym niepustym podzbiorze $A \subset \mathbb{N}$ istnieje element najmniejszy.

**4.** Mówimy, że porządek $<$ zbioru $X$ jest ciągły w sensie Dedekinda, gdy jest on gęsty i żaden przekrój zbioru $(X, <)$ nie wyznacza luki. Ciągłość w sensie Dedekinda oznaczamy skrótem (DC).

Ciągłość w sensie Dedekinda jest równoważna warunkowi: żaden przekrój zbioru $(X, <)$ nie wyznacza luki i żaden przekrój zbioru $(X, <)$ nie wyznacza skoku.

4.1. W zbiorze liniowo uporządkowanym $(X, <)$ wprowadza się topologię porządkową $\tau_<$: bazę topologii stanowią przedziały otwarte $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$, gdzie $a, b \in X$. Pokazuje się, że przestrzeń topologiczna $(X, \tau_<)$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy porządek $<$ jest ciągły w sensie Dedekinda.[3]

[2] Własność „żaden przekrój zbioru $(X, <)$ nie wyznacza luki" jest czasami nazywana zupełnością w sensie Dedekinda; zob. [Cichoń et al. 1995], s. 142, [Schechter 1997], s. 87.

[3] Zob. [Mioduszewski 2003], s. 17–18. W dalszym ciągu mówiąc o przedziale zbioru uporządkowanego $(X, <)$ będziemy zawsze mieli na uwadze niepusty przedział.

**5.** Zbiór $Y \subset X$ nazywamy gęstym w $X$, gdy

$$\forall x, z \in X \exists y \in Y [x < z \to x < y < z].$$

Zbiór uporządkowany $(X, <)$ nazywamy przestrzenią ośrodkową, gdy istnieje taki przeliczalny zbiór $Y$, który jest gęsty w $X$; zbiór $Y$ nazywamy wówczas ośrodkiem.

Jeżeli $(X, <)$ jest przestrzenią ośrodkową, to porządek $<$ jest gęsty.

Gdy $(X, <)$ jest przestrzenią ośrodkową, a porządek $<$ jest ciągły w sensie Dedekinda, to porządek $<$ nazywamy ciągłym.

Przykłady. (1) Oś liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, <_R)$, tj. zbiór liczb rzeczywistych z naturalnym porządkiem;[4] ośrodkiem jest zbiór $\mathbb{Q}$, ale obok tego można wskazać wiele innych ośrodków. (2) Przedział domknięty liczb rzeczywistych $[0, 1]$ z naturalnym porządkiem $<_R$; porządek $<_R$ musi być oczywiście zawężony do przedziału $[0, 1]$; dalej, gdy z kontekstu jednoznacznie wynika, o jaki porządek chodzi, nie będziemy powtarzać zastrzeżenia o zawężeniu porządku.

5.1. Gdy $(X, <)$ jest uporządkowany w sposób ciągły, a ponadto w zbiorze $X$ nie ma ani elementu najmniejszego, ani elementu największego, to porządek $<$ jest nazywany porządkiem typu $\lambda$. Każde dwa zbiory typu $\lambda$ są izomorficzne.[5]

5.2. Pokażemy, że ciągłość w sensie Dedekinda oraz ośrodkowość porządku są *własnościami niezależnymi.*

Zbiór $(\mathbb{Q}, <_Q)$ jest przestrzenią ośrodkową i nie jest ciągły w sensie Dedekinda.

Zdefiniujemy teraz taki zbiór $(X, <)$, że porządek $<$ jest ciągły w sensie Dedekinda, a przestrzeń $(X, <)$ nie jest ośrodkowa. Przyjmijmy $X = (0, 1) \times [0, 1]$, gdzie $(0, 1)$ i $[0, 1]$ są przedziałami liczb rzeczywistych. W $X$ definiujemy porządek:

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \leftrightarrow_{df} x_1 <_R x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 <_R y_2).$$

Łatwo zobaczyć, że zdefiniowany porządek jest gęsty. Pokażemy, że żaden przekrój zbioru $(X, <)$ nie wyznacza luki.

Niech $(A, B)$ będzie przekrojem zbioru $(X, <)$. Przyjmijmy

$$A_x = \{z \in (0, 1) : \exists y \in [0, 1][(z, y) \in A]\}.$$

[4] W rozdziale *Archimedes, Archimedes*, pkt. 4–7 wyjaśniamy, co to znaczy, z matematycznego punktu widzenia, że porządek jest „naturalny".

[5] Zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], rozdz. VI, §3, tw. 4. Twierdzenie to pochodzi od Georga Cantora; zob. [Cantor 1895].

Zbiór $A_x$ jest niepusty, bo $A \neq \emptyset$, i ograniczony z góry, bo $B \neq \emptyset$. Niech $x_0 = supA_x$. Następnie przyjmujemy

$$B_y = \{z \in [0,1] : (x_0, z) \in B\}.$$

Definiujemy element $y_0$ jak następuje

$$y_0 = \begin{cases} \sup B_y, & \text{gdy } B_y \neq \emptyset \\ 0, & \text{gdy } B_y = \emptyset. \end{cases}$$

Można pokazać, że element $(x_0, y_0)$ jest albo największy w klasie $A$, albo najmniejszy w klasie $B$.[6]

Przypuśćmy teraz, że $(X, <)$ jest przestrzenią ośrodkową i niech zbiór $Y$ będzie ośrodkiem. Podobnie jak wyżej definiujemy

$$Y_x = \{z \in (0,1) : \exists y \in [0,1] : (z, y) \in Y\}.$$

Zbiór $Y_x$ jest co najwyżej przeliczalny, niech zatem $x_0$ będzie dowolnym elementem zbioru $(0,1) \setminus Y_x$. Zachodzi $\{x_0\} \times [0,1] \cap Y = \emptyset$, stąd zaś wynika, że

$$\neg\exists (x, y) \in Y[(x_0, 0) < (x, y) < (x_0, 1)].$$

Pokażemy jeszcze, że wyżej zdefiniowany zbiór $(X, <)$ oraz $(\mathbb{R}, <_R)$ nie są zbiorami izomorficznymi. Przypuśćmy bowiem, że istnieje izomorfizm

$$f : \mathbb{R} \mapsto X.$$

Zbiór $f(\mathbb{Q})$ nie jest ośrodkiem w przestrzeni $(X, <)$, istnieją zatem takie dwa punkty $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie $x <_R y$, że dla każdego $q \in \mathbb{Q}$ jest

$$(f(q) < f(x) < f(y)) \vee (f(x) < f(y) < f(q)).$$

Jednocześnie, na podstawie gęstości $\mathbb{Q}$ w $(\mathbb{R}, <_R)$ dla pewnego $q$ zachodzi $x <_R q <_R y$, co oznacza, że $f(x) < f(q) < f(y)$. Sprzeczność.

[6] Zob. [Huntington 1905], [Veblen 1905].

# Richard Dedekind
# *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872

**6.** W *Przedmowie* jasno jest wyznaczony cel rozprawy:

znaleźć „czysto arytmetyczne i w pełni ścisłe ugruntowanie zasad analizy infinitezymalnej".[7]

Na czym polega problem?

„Mówi się często, że rachunek różniczkowy zajmuje się wielkościami ciągłymi, nigdzie jednak nie podaje się żadnego wyjaśnienia tej ciągłości, co więcej, nawet w najściślejszych wykładach tego rachunku dowody bazują nie na ciągłości, ale odwołują się albo do pewnych mniej czy bardziej geometrycznych, czy przez geometrię podsuwanych wyobrażeń, albo też do pewnych twierdzeń, które nigdy nie zostały dowiedzione w sposób czysto arytmetyczny".[8]

Jaką drogę obiera Dedekind? Twierdzenie

„każda wielkość, która rośnie stale ale nie w sposób nieograniczony, musi dążyć do pewnej wartości granicznej [...] może być w pewnym sensie traktowane jako wystarczający fundament analizy infinitezymalnej".[9]

W ostatnim paragrafie Dedekind podaje „czysto arytmetyczny" dowód tego twierdzenia.

---

[7] [Dedekind 1872], s. 136.

[8] [Dedekind 1872], s. 136. Por. „Podstawowym celem, jaki [Dedekind – P.B] postawił sobie w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* było zastąpienie niezdefiniowanych pojęć (mniej lub bardziej geometrycznych) i opartych na nich tak zwanych intuicyjnych uzasadnień, dowodami wyprowadzonymi z jasno sformułowanych definicji. Szukał on przede wszystkim takich definicji, z których można wyprowadzić podstawowe twierdzenia o istnieniu granic. W tym celu potrzebował zdefiniować system w pewnym sensie zupełny, czy też ciągły" [Bunn 2000], s. 222. Otóż, po pierwsze, mówiąc o „ugruntowaniu zasad analizy infinitezymalnej" Dedekind bynajmniej nie wymienia pojęcia granicy, po drugie, Bunn przyjmuje – błędnie – że w owym czasie pojęcie granicy było już jasno określone; zob. niżej pkt. 17.

[9] [Dedekind 1872], s. 136–137.

**7.** Pierwszy paragraf rozprawy jest zatytułowany *Własności liczb wymiernych*. Tytułowe własności podzielone są na dwie grupy: związane z działaniami i związane z porządkiem.

O działaniach w zbiorze liczb wymiernych Dedekind pisze niewiele, jedną kwestię uznał natomiast za wartą wyszczególnienia:

„System ten, który oznaczać będę przez $R$, charakteryzuje się przede wszystkim pewną zupełnością i zamkniętością [...], które polegają na tym, że cztery podstawowe operacje są zawsze wykonalne na dwu indywiduach z $R$, tzn. wynik jest zawsze pewnym określonym indywiduum z $R$, jeśli tylko wykluczyć jedyny przypadek dzielenia przez zero”,[10]

co oznacza, że dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie są działaniami wewnętrznymi.[11]

Z paragrafu szóstego *Działania na liczbach rzeczywistych* wiadomo ponadto, że dodawanie i mnożenie liczb wymiernych są przemienne oraz, że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

7.1. O porządku liczb wymiernych czytamy:

„Dla naszych dalszych celów ważniejsza jest jednak inna własność systemu $R$, którą można wyrazić mówiąc, że system $R$ jest dziedziną jednowymiarową dobrze uporządkowaną, nieskończoną w dwu przeciwnych kierunkach. Co należy pod tym rozumieć wskazuje wyraźnie wybór wyrażeń zapożyczonych z pewnych wyobrażeń geometrycznych; tym bardziej konieczne jest więc podkreślenie odpowiednich czysto arytmetycznych własności, także po to, by się nie wydawało, że arytmetyka potrzebuje takich obcych sobie wyobrażeń”.[12]

Dalej przedstawione są „czysto arytmetyczne własności” porządku.

(i) „Różność dwóch liczb wymiernych objawia się w tym, że różnica $a - b$ ma albo wartość dodatnią, albo ujemną. W pierwszym przypadku liczbę $a$ nazywamy większą od $b$, $b$ mniejszą niż $a$, co wyraża się też za pomocą symboli $a > b$, $b < a$. Ponieważ w drugim przypadku $b - a$ ma wartość dodatnią, więc $b > a$, $a < b$. Ze względu na tę podwójną możliwość w przypadku różności liczb zachodzą teraz następujące prawa”.[13]

[10] [Dedekind 1872], s. 138.

[11] Dedekind jako pierwszy w historii zwrócił uwagę na wewnętrzność działań i uznał to za cechę charakterystyczną ciała liczbowego; zob. [Dedekind 1964], s. 2.

[12] [Dedekind 1872], s. 138.

[13] [Dedekind 1872], s. 138.

Owe „prawa" to trzy własności oznaczone rzymskimi cyframi I, II, III. Dwie pierwsze

„Jeżeli $a > b$ i $b > c$, to $a > c$";[14]

„Jeżeli $a$, $c$ są dwoma różnymi liczbami, to zawsze istnieje nieskończenie wiele różnych liczb $b$, które leżą między $a$, $c$",[15]

możemy zapisać krótko:
(ii) $(a > b,\ b > c) \to a > c$,
(iii) $a > c \to \exists b[a > b > c]$.

Opis kolejnej własności przytoczymy *in extenso*:

(iv) „Jeżeli $a$ jest pewną określoną liczbą, to wszystkie liczby systemu $R$ rozpadają się na dwie klasy $A_1$ i $A_2$, z których każda zawiera nieskończenie wiele elementów. Pierwsza klasa $A_1$ zawiera wszystkie liczby $a_1$, które są $< a$, druga klasa $A_2$ wszystkie liczby $a_2$, które są $> a$. Sama liczba $a$ może być zaliczona albo do pierwszej, albo do drugiej klasy i jest ona wtedy odpowiednio największą liczbą pierwszej lub najmniejszą liczbą drugiej klasy. W każdym z przypadków rozkład systemu $R$ na dwie klasy $A_1$, $A_2$ jest tego rodzaju, że każda liczba pierwszej klasy $A_1$ jest mniejsza od każdej liczby drugiej klasy $A_2$".[16]

7.2. Tak więc w *Stetigkeit* ani liczby wymierne, ani ich porządek nie są definiowane – jest przyjęte, że liczby wymierne są uporządkowane i podana jest charakterystyka tego porządku.

Warunek (i)

$$a > b \leftrightarrow a - b > 0$$

w żadnej mierze nie jest definicją. Na podstawie równoważności

$$(a > b \leftrightarrow a - b > 0) \leftrightarrow (a > b \to a + c > b + c),$$

która zachodzi przy założeniu, że porządek $<$ jest liniowy, oznacza on zgodność porządku z dodawaniem.[17]

[14] [Dedekind 1872], s. 139. Warto przytoczyć też następne zdanie: „Za każdym razem, gdy $a$, $c$ są dwoma różnymi (czy nierównymi) liczbami i gdy $b$ jest większe niż jedna z nich i mniejsze niż druga, to wyrażać będziemy to krótko, bez lęku przed podobieństwem z wyobrażeniami geometrycznymi, mówiąc, że $b$ leży pomiędzy dwoma liczbami $a$ i $c$" [Dedekind 1872], s. 139.

[15] [Dedekind 1872], s. 139.

[16] [Dedekind 1872], s. 139.

[17] W innym miejscu zgodność porządku liczb wymiernych z dodawaniem jest wprost stosowana: „mamy $a_1 \leqslant \alpha$, $b_1 \leqslant \beta$ i stąd $a_1 + b_1 \leqslant \alpha + \beta$" [Dedekind 1872], s. 146.

Dlaczego warunek ten nie został wyróżniony tak, jak trzy pozostałe i nie został uznany za „prawo"?

W następnym paragrafie przeprowadzona jest analogia między linią prostą a liczbami wymiernymi. Jest ona – jak zobaczymy – po pierwsze, ograniczona do uporządkowania elementów, a po drugie, porządki te są podobne tylko ze względu na własności oznaczone cyframi I, II, III.

Własności (ii) i (iii) są oczywiste.

Warunek (iv) to osobliwy wyraz spójności porządku (przechodniego i antysymetrycznego):

$$(\text{iv}) \leftrightarrow \forall a, b[a \neq b \rightarrow (a < b \vee a > b)].^{18}$$

Przy okazji jednak Dedekind wprowadza pojęcie pozwalające mu wyrazić nie tylko spójność, ale i ciągłość porządku.

W punkcie (iv) jest też powiedziane, że nie ma ani największej, ani najmniejszej liczby wymiernej.

7.3. W paragrafie czwartym *Utworzenie liczb niewymiernych* Dedekind wykazuje, że „istnieje nieskończenie wiele przekrojów, które nie są wyznaczone przez liczby wymierne". Wówczas to *implicite* przyjmuje kolejne własności: (v) aksjomat Archimedesa,[19] (vi) liczby całkowite dodatnie spełniają aksjomat indukcji,[20] (vii) zgodność porządku z mnożeniem.[21] Dokładniej, zakładając np. zgodność porządku z mnożeniem można udowodnić to, co Dedekind uznaje za oczywiste, mianowicie: $a^2 < b^2 \rightarrow a < b$, dla $a, b > 0$.

7.4. Jest w *Stetigkeit* jedno miejsce, które pozwala wnosić, że liczba wymierna jest ilorazem liczb całkowitych:

[18] Pomijamy tu aspekt, że „każda klasa zawiera nieskończenie wiele elementów".

[19] Zob. „Niech $D$ będzie liczbą całkowita dodatnią, ale niech nie będzie kwadratem żadnej liczby całkowitej. Wtedy istnieje liczba całkowita dodatnia $\lambda$ taka, że zachodzi $\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$" [Dedekind 1872], s. 142.

[20] Zob. „Gdyby istniała liczba wymierna, której kwadrat $= D$, to istniałaby też dwie liczby całkowite $t, u$, które spełniałyby równanie $t^2 - Du^2 = 0$, i można przyjąć, że $u$ jest najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą, która posiada tę własność, że jej kwadrat pomnożony prze $D$ staje się kwadratem pewnej liczby całkowitej $t$" [Dedekind 1872], s. 142.

[21] Zob. „Zaliczmy teraz do drugiej klasy $A_2$ wszystkie liczby wymierne dodatnie $a_2$, których kwadrat $> D$, a do pierwszej klasy $A_1$ wszystkie pozostałe liczby wymierne $a_1$. Podział ten tworzy przekrój $(A_1, A_2)$, tzn. każda liczba $a_1$ jest mniejsza od każdej liczby $a_2$" [Dedekind 1872], s. 142, tj. $a^2 < b^2 \rightarrow a < b$, dla $a, b > 0$.

„Gdyby istniała liczba wymierna, której kwadrat = $D$, to istniałyby też dwie liczby całkowite, $t$, $u$, które spełniałyby równanie

$$t^2 - Du^2 = 0\ ".^{22}$$

Ostatecznie, na podstawie tego, co w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* powiedziane jest wprost lub *implicte* można uznać, że liczby wymierne to ciało proste spełniające warunki (i)-(vii).[23] Stąd oczywiście jeszcze daleko do pojmowania liczb wymiernych w sposób, jaki znajdujemy w teorii mnogości, tj. jako klasy abstrakcji pewnej relacji określonej na zbiorze par liczb całkowitych.[24]

7.5. W *Stetigkeit und irrationale Zahlen* zbiór liczb wymiernych oznaczony jest literą $R$, a liczb rzeczywistych – dużą gotycką literą $\mathfrak{R}$. Dlatego w niniejszym rozdziale, symbol $\mathfrak{R}$ będzie oznaczał także zbiór liczb rzeczywistych, a nie tak jak w pozostałych częściach pracy ciało uporządkowane liczb rzeczywistych. Aby uniknąć nieporozumień będziemy wyraźnie zaznaczyć, czy chodzi o zbiór, czy o ciało liczb rzeczywistych. Mając natomiast na uwadze współczesną konstrukcję liczb rzeczywistych, zbiory liczb wymiernych i rzeczywistych będziemy oznaczać tak, jak to już wcześniej ustaliliśmy, tj. jako $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$.

**8.** W paragrafie drugim *Porównanie liczb wymiernych z punktami prostej* Dedekind ujawnia wspomnianą już analogię między liczbami wymiernymi a linią prostą:

---

[22] [Dedekind 1872], s. 142.

[23] Philip Kitcher w książce *The Nature of Mathematical Knowlegde*, podsumowując omówienie *Stetigkeit und irrationale Zahlen* pisze: „Terminologia przyjęta przez Dedekinda zawierała nie tylko pojęcia czysto arytmetyczne, ale także wyrażenia z języka teorii mnogości. Te odniesienia zrodziły wśród matematyków nowe pytania. Czy można ustalić wprost zasady dotyczące istnienia zbiorów, które nie wprost są zakładane w rozumowaniach Dedekinda? Historia prób odpowiedzi na to pytanie jest dobrze znana" [Kitcher 1984], s. 267–268. Otóż, po pierwsze, Kitcher nie wskazał żadnych faktów potwierdzających sugestie, że „te odniesienia zrodziły wśród matematyków nowe pytania". W matematyce, w kontekście konstrukcji Dedekinda, po dzień dzisiejszy w ogóle nie są stawiane kwestie teoriomnogościowe. Po drugie, i to jest ważniejsze, Kitcher przyjmuje określenie „czysto arytmetyczne" bez żadnej analizy, chociaż w *Stetigmeit* występuje ono w opozycji arytmetyczne–geometryczne. Jednym z kluczowych pojęć rozprawy Dedekinda jest pojęcie porządku, które obecnie znajdujemy i w podstawach geometrii, i w arytmetyce liczb rzeczywistych. Nie sposób zatem uznać, że pojęcie to jest „czysto" arytmetyczne lub „czysto" geometryczne.

[24] Zob. [Rasiowa 1979], rozdz. VII, §3.

„Wyszczególnione przed chwilą własności liczb wymiernych przypominają związki wzajemnego położenia, jakie mają miejsce między punktami prostej $L$".[25]

Rzecz sprowadza się do uporządkowania z jednej strony punktów, z drugiej – liczb, mianowicie porządek $<_L$ ma być przechodni, gęsty i spójny; własności te są oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III, przy czym spójność Dedekind znów wyraża za pomocą przekroju:

„Jeżeli $p$ jest określonym punktem $L$, to wszystkie punkty $L$ rozpadają się na dwie klasy $P_1$, $P_2$, z których każda zawiera nieskończenie wiele indywiduów; pierwsza klasa $P_1$ zawiera wszystkie punkty $p_1$, które leżą na lewo od $p$, a druga klasa $P_2$ zawiera wszystkie punkty $p_2$, które leżą na prawo od $p$; sam punkt $p$ może być zaliczony albo do $P_1$, albo do $P_2$. W każdym razie rozkład punktów prostej na dwie klasy lub części $P_1$, $P_2$ jest zawsze tego rodzaju, że każdy punkt klasy $P_1$ leży na lewo od każdego punktu klasy $P_2$".[26]

8.1. W kolejnym akapicie opisane jest odwzorowanie przyporządkowujące liczbom wymiernym punkty prostej

$$\varrho : R \mapsto L.$$

„Ta analogia pomiędzy liczbami wymiernymi i punktami prostej staje się, jak wiadomo, rzeczywistym związkiem, gdy wybierzemy na prostej pewien określony punkt początkowy lub zerowy $o$ i pewną określoną jednostkę długości do mierzenia odcinków. Za pomocą tej ostatniej można dla każdej liczby wymiernej $a$ skonstruować odpowiadającą jej długość; jeżeli długość tę umieścimy z prawej lub lewej strony punktu $o$ zależnie od tego, czy $a$ jest dodatnie czy ujemne, to otrzymamy określony punkt końcowy $p$, który może być określony jako odpowiadający liczbie $a$; liczbie wymiernej 0 odpowiada punkt $o$. W ten sposób każdej liczbie wymiernej $a$, tj. każdemu indywiduum z $R$, odpowiada jeden i tylko jeden punkt $p$, tzn. indywiduum z $L$. Jeżeli dwom liczbom $a$, $b$ odpowiadają punkty odpowiednio $p$, $q$ i jeżeli $a > b$, to $p$ leży na prawo od $q$. Prawom I, II, III poprzedniego paragrafu odpowiadają w pełni prawa I, II, III tego paragrafu".[27]

8.2. Rozumowanie to, zwłaszcza zdania:

„gdy wybierzemy na prostej pewien określony punkt początkowy lub zerowy $o$ i pewną określoną jednostkę długości do mierzenia odcinków. Za pomocą

[25] [Dedekind 1872], s. 139.
[26] [Dedekind 1872], s. 139.
[27] [Dedekind 1872], s. 139–140.

tej ostatniej można dla każdej liczby wymiernej $a$ skonstruować odpowiadającą jej długość",

nawiązuje wprost do Euklidesa. Rozszyfrowując je, zacznijmy od przytoczenia pierwszych definicji z Księgi X *Elementów*:

„Those magnitudes are said to be commensurable which are measured by the same measure, and those incommensurable which cannot have any common measure".[28]

„With these hypotheses, it is proved that there exist straight lines infinite in multitude which are commensurable and incommensurable respectively [...] with an assigned straight line. Let then the assigned straight line be called rational, and those straight lines which are commensurable with it, [...], rational, but those which are incommensurable with it irrational".[29]

W pierwszym przybliżeniu można je tak objaśnić.[30] „Magnitude" to wielkość geometryczna. „Straight line" to odcinek. Odcinek jest szczególną wielkością geometryczną.

Dwa odcinki $A$, $B$ są współmierne, jeżeli istnieje odcinek $C$ oraz dwie takie liczby naturalne $n$, $m$, że zachodzi $A = mC$, $B = nC$.

„The assigned straight line" to ustalony odcinek, który na mocy definicji nazywany jest wymiernym. Odcinki współmierne z nim nazywane są wymiernymi.

Występująca w cytowanym fragmencie *Stetigkeit* „długość", to nie długość odcinka w dzisiejszym rozumieniu, tj. pewna liczba rzeczywista, a po prostu sam odcinek; „określona jednostka długości", to ów wyróżniony odcinek wymierny *Elementów* – oznaczmy go literą $I$ – czyli to, co zwykle nazywa się odcinkiem jednostkowym.

Kluczowe dla przedstawionego wywodu jest zdanie:

„Za pomocą tej ostatniej można dla każdej liczby wymiernej $a$ skonstruować odpowiadającą jej długość".

[28] [Euklides], Księga X, def. 1; „Współmiernymi nazywamy te wielkości, które są mierzone wspólną miarą, a niewspółmiernymi te, które nie mogą mieć żadnej wspólnej miary".

[29] [Euklides], Księga X, def. 3; „Przy tym założeniu pokazuje się, że istnieje nieskończenie wiele linii prostych, które są współmierne i odpowiednio niewspółmierne z pewną ustaloną linią [...]. Tę ustaloną linię nazwijmy wymierną, a linie proste, które są z nią współmierne [...] wymiernymi, te zaś, które są z nią niewspółmierne – niewymiernymi".

[30] Szerzej piszemy o tym w rozdziale *Eudoxos versus Dedekind*. Przyjęte tu uproszczenie polega na tym, że w *Elementach* definiowane są dwa rodzaje wymierności: „rational in length" oraz „rational in square". To drugie jest najwyraźniej zaliczone przez Dedekinda do przypadku „incommensurable".

Tak więc, gdy dany jest odcinek jednostkowy $I$, zaś liczba $a$ jest postaci $\frac{m}{n}$, to na podstawie twierdzenia VI.9:

„From a given straight line to cut off a prescribed part",[31]

można skonstruować odcinek $\frac{1}{n}I$, a następnie, biorąc jego $m$-krotność, odcinek $\frac{m}{n}I$. Wobec powyższego, wartościami funkcji $\varrho$ są „punkty końcowe" odcinków $\frac{m}{n}I$ odkładanych „z prawej lub lewej strony punktu $o$ zależnie od tego, czy $a$ jest dodatnie, czy ujemne".

Do tego należy jednak dodać, że w *Elementach* twierdzenie VI.9 oparte jest na twierdzeniu VI.2 (zwanym twierdzeniem Talesa):

„If a straight line be drawn parallel to one of the sides of a triangle, it will cut the sides of the triangle proportionally; and, if the sides of the triangle be cut proportionally, the line joining the points of section will be parallel to the remaining side of the triangle".[32]

Z kolei w dowodzie twierdzenia VI.2 wykorzystywany jest pewnik Euklidesa o prostych równoległych.[33] Tak więc w tej części rozumowanie Dedekinda bynajmniej nie jest „czysto arytmetyczne".

8.3. Charakterystyka liczb wymiernych jest w *Stetigkeit* jednoznaczna. Prostą $L$ można natomiast rozumieć na dwa sposoby: albo sens tego pojęcia jest wyznaczony przez *Elementy*, albo Dedekind nadaje mu jakieś nowe znaczenie.

W pierwszym przypadku nie wiemy, które aksjomaty, postulaty, definicje i twierdzenia *Elementów* należą do charakterystyki prostej. W szczególności nie wiemy, czy dla ustalenia związku między liczbami wymiernymi a prostą, istotne są zależności zachodzące na płaszczyźnie, w przestrzeni, czy rzeczy-

[31] [Elementy], Księga VI, tw. 9, „Z danego odcinka odciąć wyznaczoną część"; „Z danej linii prostey odciąć część żądaną" [Czech 1817], s. 193.

[32] [Euklides], Księga VI, tw. 2, „Gdy linia prosta poprowadzona jest równolegle do jednego z boków trójkąta, to przetnie boki tego trójkąta proporcjonalnie. Gdy boki trójkąta są przecięte proporcjonalnie, to linia łącząca punkty przecięcia jest równoległa do pozostałego boku trójkąta"; „Jeżeli w troykącie poprowadzona będzie linia prosta równoległa do iednego z boków iego, ta przetnie pozostałe boki troykąta, lub boki przedłużone, proporcjonalnie. I jeżeli boki troykąta, lub boki przedłużone przecięte są proporcjonalnie, linia prosta łącząca punkta przecięć, będzie do pozostałego boku troykąta równoległa" [Czech 1817], s. 181.

[33] Zob. „That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on the same side on which are the angles less than the two right angles" [Euklides], Postulat 5.

wiście trzeba przyjąć aksjomat o prostych równoległych, aby zdefiniować funkcję $\varrho$?

W drugim przypadku o prostej wiemy tylko tyle, ile jest powiedziane w rozprawie: prosta to taki zbiór uporządkowany $(L, <_L)$, w którym porządek $<_L$ jest liniowy, gęsty i – co będzie powiedziane w następnym paragrafie – ciągły w sensie Dedekinda.

8.4. Pozostając przy drugiej interpretacji powiemy, że Dedekind nie tyle ustanawia pewien związek między liczbami wymiernymi a linią prostą, ile definiuje prostą, dokładniej, w tym miejscu rozpoczyna się proces nowego – w stosunku do *Elementów* – określania linii prostej, proces, którego kolejne ogniwa to praca Moritza Pascha *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882), *Grundlagen der Geometrie* (1899) Davida Hilberta i *Podstawy geometrii* (1955) Karola Borsuka i Wandy Szmielew. Pasch jako pierwszy wydzielił w podstawach geometrii aksjomaty uporządkowania,[34] natomiast w książce *Podstawy geometrii* jest już ustalona bijekcja między liczbami rzeczywistymi a linią prostą.[35]

I jeszcze jedna uwaga. W rozprawie nie jest powiedziane czy $(L, <_L)$ jest, czy też nie jest przestrzenią ośrodkową. Zważywszy, że można wskazać dwa nieizmomorficzne zbiory ciągłe w sensie Dedekinda, przyjmujemy, że prosta $L$ jest *niedookreślona* z uwagi na własność ośrodkowości.

**9.** Paragraf trzeci *Ciągłość linii prostej* ma *filozoficzny* charakter i gdyby nie to, że właśnie w nim podana jest zasada ciągłości nie miałby on żadnego matematycznego znaczenia. Tę część rozprawy otwiera akapit, w którym Dedekind raz jeszcze nawiązuje do *Elementów*. Czytamy:

„Rzeczą najważniejszą jest teraz fakt, że na prostej znajduje się nieskończenie wiele punktów, które nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej. Jeżeli mianowicie punkt $p$ odpowiada liczbie wymiernej $a$, to jak wiadomo długość $op$ jest współmierna z użytą do konstrukcji niezmienną jednostką długości, tj. istnieje pewna trzecia długość, tzw. wspólna miara, której całkowitymi wielokrotnościami są obie te długości. Jednakże już starożytni Grecy wiedzieli i udowodnili, że istnieją długości, które ze względu na daną, ustaloną jednostkę długości są niewspółmierne, np. przekątna kwadratu, którego bok jest jednostką długości. Jeżeli odłożyć taką długość z punktu $o$ na prostej, to otrzyma się pewien punkt, który nie odpowiada żadnej liczbie wymiernej.

[34] Zob. [Coxeter 1967], rozdz. 12.

[35] Dodajmy, że przy ustalaniu owej bijekcji istotną rolę – rolę ośrodka – odgrywają nie liczby wymierne, ale dwójkowe, zaś obok uporządkowania punktów ważna jest też druga relacja – przystawanie; zob. rozdz. *O ciągłości linii prostej*.

Ponieważ łatwo udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele długości, które są niewspółmierne z jednostką długości, więc możemy stwierdzić, iż prosta $L$ zawiera nieskończenie więcej punktów niż dziedzina $R$ liczb wymiernych".[36]

Ustęp ten to osobliwy melanż przesądów i faktów, skrzyżowanie gasnącego już echa matematyki dawnej i źródeł matematyki współczesnej. Krótko i po kolei.

Współmierność to pojęcie definiowane w Księdze X *Elementów*; długość to po prostu sam odcinek, a pojęcie „długość współmierna z użytą do konstrukcji niezmienną jednostką długości" odsyła do definicji odcinka wymiernego z Księgi X *Elementów*.[37]

Przywołany dowód niewspółmierności przekątnej i boku kwadratu do końca XIX wieku był zamieszczany jako twierdzenie 117 Księgi X.[38] Od czasu edycji greckiego tekstu *Elementów* opracowanej przez Johana Heiberga i wydanej w latach 1883–1888 przyjmuje się, że jest to interpolacja, tj. fragment dodany przez komentatorów.[39]

A wreszcie liczba wymierna w rozumieniu z §1 *Stetigkeit* w ogóle nie występuje w matematyce greckiej w dobie Euklidesa.[40]

9.1. Cytowany wyżej akapit pozwala wnosić, że pojęcie „prosta $L$" winno być interpretowane na gruncie geometrii Euklidesa. Lecz w *Stetigkeit* Dedekind bynajmniej nie przeprowadza egzegezy *Elementów*, a ustanawia nowy sposób rozumienia prostej: składa się ona z punktów, które są uporządkowane – *nomen omen* – liniowo. W ten sposób konstruuje warunki możliwości owego „dobrze znanego rozumowania": na prostej można wyróżnić pewien szczególny punkt $o$, a następnie punkty, które „odpowiadają" liczbom wymiernym, na prostej leżą punkty, które „nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej".

Definiując funkcję $\varrho$ Dedekind nawiązuje do argumentów Euklidesa, a jednocześnie pojęciu liczby wymiernej nadaje znaczenie, które w *Elementach* w ogóle nie występuje.

Kolejne zdania świadczą o tym, że przedstawione rozumowanie należało do potocznej wiedzy matematycznej owego czasu:

---

[36] [Dedekind 1872], s. 140.

[37] Zob. wyżej pkt. 8.

[38] Zob. [Heath 1956], t. III, s. 2. Na twierdzenie to powołuje się jeszcze Klaus Mainzer numerując je jako 115a, lecz, co znamienne, nie wskazuje on żadnego wydania *Elementów*; zob. [Mainzer 1995(b)]. Twierdzenie to przywołuje też Bertrand Russell; zob. [Russell 1919], s. 100.

[39] Zob. [Heath 1956], t. III, s. 2. W edycji Thomasa Heatha Księga X zawiera 115 twierdzeń.

[40] Zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 1–6.

„Dotychczasowe rozważania są wszystkim tak dobrze znane, że wielu uzna powtarzanie ich za zbyteczne. Niemniej jednak uważam tę rekapitulację za konieczną, aby należycie i porządnie przygotować pytanie główne".[41]

9.2. A oto, jak Dedekind dochodzi do tego „pytania głównego".

„Jeżeli chce się teraz, a taki przecież jest nasz zamiar, zbadać arytmetycznie wszystkie zjawiska mające miejsce na prostej, to liczby wymierne nie wystarczają do tego i nieodzowne staje się ulepszenie instrumentu $R$, który otrzymany został poprzez stworzenie liczb wymiernych. Ulepszenia tego dokonać można poprzez stworzenie liczb tego rodzaju, że dziedzina liczb uzyska tę samą zupełność, czy jak równoważnie chcemy to wyrazić, tę samą ciągłość, która przysługuje prostej".[42]

Tak więc, po pierwsze, chodzi o „arytmetyczne zbadanie wszystkich zjawisk, które mają miejsce na prostej". Na podstawie §6 wnosimy, że „arytmetyczne badanie" to badanie prowadzone za pomocą operacji „tzw. arytmetyki elementarnej": obok dodawania są to „tworzenie różnicy, iloczynu, ilorazu, potęgi, pierwiastka, logarytmu".[43]

Po drugie – o rozszerzenie, „ulepszenie", systemu liczb wymiernych, bo „na prostej znajduje się nieskończenie wiele punktów, które nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej".

Po trzecie – o sposób, w jaki jest przeprowadzone to rozszerzenie:

„Znane dotąd wprowadzenie liczb niewymiernych nawiązuje mianowicie do pojęcia wielkości rozciągłych – które jednak same nie są nigdzie ściśle zdefiniowane – i wyjaśnia liczbę jako wynik mierzenia pewnej takiej wielkości za pomocą innej z nią jednorodnej. Zamiast tego żądam, by arytmetyka rozwijała się sama z siebie".[44]

Chodzi zatem o to, aby pojęcie liczby niewymiernej nie było związane z niezdefiniowanym pojęciem wielkości rozciągłej (geometrycznej), ale z „arytmetycznym" pojęciem liczby wymiernej:

„Tak jak trzeba i można wprowadzić liczby ujemne i ułamkowe liczby wymierne poprzez wolny akt twórczy i jak prawa rachowania na tych liczbach powinny i mogą być sprowadzone do praw rachowania na liczbach całkowitych dodatnich, tak też należy dążyć do tego, by liczby niewymierne zdefiniować w pełni za pomocą liczb wymiernych".[45]

[41] [Dedekind 1872], s. 140.
[42] [Dedekind 1872], s. 140.
[43] [Dedekind 1872], s. 147.
[44] [Dedekind 1872], s. 140.
[45] [Dedekind 1872], s. 140.

9.3. Zatrzymajmy się przy ostatnim zdaniu. W *Elementach* nie występuje pojęcie wielkości niewymiernej, jest natomiast zdefiniowane pojęcie odcinków niewspółmiernych.[46] W komentarzach do *Elementów* z parą odcinków wiązano często stosunek (ratio) i na tej podstawie odróżniano stosunki wymierne i niewymierne. Dedekind przyjmuje, że odkładając na prostej $L$ przekątną kwadratu jednostkowego i umieszczając jeden koniec w punkcie $o$, drugi koniec wyznaczy punkt, „który nie odpowiada żadnej liczbie wymiernej", tj. taki, który nie należy do obrazu $\varrho(R)$. Dlatego liczba (ratio) „odpowiadająca" temu punktowi będzie nazwana niewymierną.

W rozprawie nie jest powiedziane, czy każdej liczbie niewymiernej – pojmowanej zgodnie z definicją podaną w następnym paragrafie – odpowiada pewien punkt prostej $L$. Kwestia ta nie jest rozstrzygnięta między innymi dlatego, że jedne fragmenty rozprawy wskazują na to, aby „prostą $L$" rozumieć na gruncie *Elementów*, inne zaś na to, że „prosta $L$" to pewien wzorzec, który *de facto* jest w rozprawie definiowany. Czytamy:

„Przeprowadzone powyżej porównanie dziedziny $R$ liczb wymiernych i linii prostej doprowadziło do stwierdzenia luk, niezupełności, czyli nieciągłości tej pierwszej, podczas gdy prostej przypisujemy zupełność, brak luk, czyli ciągłość".[47]

Dedekind nie pokazuje jednak, że linia prosta w *Elementach* musi posiadać ciągłość – ciągłość, która zostanie zdefiniowana w następnych zdaniach. Skądinąd dzisiaj wiadomo, że tego nie można udowodnić. Dokładniej, przyjmując współczesną aksjomatyczną wykładnię geometrycznych ksiąg *Elementów* pokazuje się, że aksjomat ciągłości jest niezależny od pozostałych aksjomatów „geometrii Euklidesa".[48]

W świetle tego faktu, często spotykane, zwłaszcza we wstępach do analizy matematycznej, uwagi uzasadniające rozszerzenie liczb wymiernych rozważaniami geometrycznymi należy traktować jako nadużycie, które nie respektuje wyżej przytoczonego twierdzenia.[49]

---

[46] Zob. *Elementy*, Księga X, def. 1; zob. też wyżej pkt. 8.

[47] [Dedekind 1872], s. 141.

[48] Zob. [Borsuk, Szmielew 1972], §93.

[49] Por. „Niemożność przyporządkowania wszystkim odcinkom miary wymiernej była również jednym z ważniejszych powodów wprowadzenia liczb niewymiernych" [Fichtenholtz 1985], s. 30; „Oprócz punktów wymiernych są jeszcze inne punkty na prostej, które nazwiemy niewymiernymi. Zbudujmy np. kwadrat, którego bok równa się $OE$ i odłużmy odcinek $OJ$, równy jego przekątnej. Punkt $J$ nie może być punktem wymiernym. [...] Punkt niewymierny $J$ prowadzi do podziału wszystkich punktów wymiernych na dwie klasy. [...] Jeżelibyśmy każdy punkt wymierny zastąpili liczbą, której jest obrazem, to otrzymalibyśmy przekrój. Niech ten przekrój wyznacza liczbę $\alpha$. [...] Punkt $J$ uważamy za obraz liczby niewymiernej $\alpha$ i nazywamy go krótko punktem $\alpha$" [Kowalewski 1923], s. 48;

9.4. Dalej w związku z „pytaniem głównym" czytamy:

„Na czym jednak polega ta ciągłość? [...] Na nic się tu nie zdały opowiadania o jakiejś nieprzerwanej jednolitości w najmniejszych cząsteczkach; chodzi więc o to, aby podać pewną precyzyjną cechę ciągłości, która mogłaby służyć jako baza prawdziwej, rzeczywistej dedukcji. [...] Istotę ciągłości widzę [...] w następującej zasadzie:

Jeżeli wszystkie punkty prostej rozpadają się na dwie klasy tego typu, że każdy element pierwszej klasy leży na lewo od każdego elementu drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który tworzy ten podział wszystkich punktów na dwie klasy, czyli rozcięcie prostej".[50]

Podaną własność porządku przyjęło się nazywać zasadą ciągłości Dedekinda.

Zważywszy, że „prosta" oznacza tu ni mniej ni więcej jak tylko zbiór liniowo uporządkowany, uwzględniając następnie to, co oznacza zwrot „punkt, który tworzy podział", zasadę ciągłości Dedekinda można tak wyrazić:

Każdy przekrój zbioru liniowo uporządkowanego $(X, <)$ jest tego rodzaju, że albo w klasie dolnej istnieje element największy, albo w klasie górnej istnieje element najmniejszy i nie jest tak, że zarazem w klasie dolnej istnieje element największy i w klasie górnej istnieje element najmniejszy.

To zaś odpowiada definicji: żaden przekrój zbioru $(X, <)$ nie wyznacza ani luki, ani skoku. Zasada ciągłości Dedekinda jest zatem równoważna własności, którą nazwaliśmy ciągłością w sensie Dedekinda i oznaczyliśmy skrótem (DC).[51]

**10.** W paragrafie czwartym *Utworzenie liczb niewymiernych* podana jest definicja liczby niewymiernej.

„Ostatnie słowa wskazują już na to, w jaki sposób nieciągła dziedzina $R$ liczb wymiernych musi zostać uzupełniona do dziedziny ciągłej".[52]

Następnie Dedekind wskazuje dwa rodzaje przekrojów zbioru $(R, <)$: takie, które są „wyznaczone przez liczbę" i takie, które nie są „wyznaczone przez liczbę". Czytamy:

---

„Określenie pojęcia liczby niewymiernej wypełniło więc te luki, które wykazywał zbiór liczb wymiernych w razie przyporządkowania ich punktom prostej" [Pogorzelski 1951], s. 6.

[50] [Dedekind 1872], s. 141.

[51] Zob. wyżej pkt. 4.

[52] [Dedekind 1872], s. 142.

„Jeżeli teraz dany jest jakikolwiek podział systemu $R$ na dwie klasy $A_1$, $A_2$, który posiada tylko tę charakterystyczną własność, że każda liczba $a_1$ z $A_1$ jest mniejsza od każdej liczby $a_2$ z $A_2$, to dla krótkości podział taki nazywać będziemy przekrojem i będziemy oznaczać przez $(A_1, A_2)$. Możemy wtedy powiedzieć, że każda liczba wymierna $a$ wyznacza pewien przekrój, czy właściwie dwa przekroje, których jednak nie chcemy traktować jako dwóch różnych; przekrój ten ma poza tym tę własność, że albo wśród liczb pierwszej klasy istnieje największa, albo wśród liczb drugiej klasy istnieje najmniejsza. I na odwrót, jeżeli jakiś przekrój posiada tę własność, to jest on wyznaczony przez tę największą czy najmniejszą liczbę wymierną".[53]

Tak więc jeżeli w przekroju $(A_1, A_2)$ istnieje liczba $a$, która jest albo największą w klasie $A_1$, albo najmniejszą w klasie $A_2$, to „wyznacza" ona przekrój $(A_1, A_2)$.

Istnieją też przekroje zbioru $(R, <)$, które nie są „wyznaczone przez liczbę", czyli przekroje wyznaczające luki.

10.1. Oto, jak Dedekind dowodzi, że w zbiorze uporządkowanym liczb wymiernych $(R, <)$ istnieje „nieskończenie wiele" luk.

„Łatwo jednak przekonać się, że istnieje nieskończenie wiele przekrojów, które nie są wyznaczone przez liczby wymierne. Najprostszy przykład jest następujący. Niech $D$ będzie liczbą całkowitą dodatnią, ale niech nie będzie kwadratem żadnej liczby całkowitej. Wtedy istnieje liczba całkowita dodatnia $\lambda$, że zachodzi

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2 \text{ ".}^{54}$$

Liczbę $\lambda$ można wyznaczyć na podstawie aksjomatu indukcji

$$\lambda = inf\{n \in \mathbb{N} : D < (n+1)^2\}.$$

Dedekind oczywiście nie pisze wprost, że zbiór liczb naturalnych („całkowitych dodatnich") jest zbiorem dobrze uporządkowanym, ale korzysta z tej zasady.[55] To zaś, że zbiór $\{n \in \mathbb{N} : D < (n+1)^2\}$ jest niepusty może zagwarantować aksjomat Archimedesa.

Następnie definiowana jest para zbiorów $(A_1, A_2)$:

[53] [Dedekind 1872], s. 142.

[54] [Dedekind 1872], s. 142.

[55] Skądinąd tak rozumiana zasada indukcji jest już stosowana w *Elementach* Euklidesa; zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 1–6.

„Zaliczamy teraz do drugiej klasy $A_2$ wszystkie liczby wymierne dodatnie $a_2$, których kwadrat $> D$, a do klasy $A_1$ wszystkie pozostałe liczby wymierne $a_1$",[56]

czyli

$$A_1 = R \backslash A_2, \quad A_2 = \{a_2 \in R_+ : a_2^2 > D\}.$$

„Podział ten tworzy przekrój $(A_1, A_2)$, tzn. każda liczba $a_1$ jest mniejsza od każdej liczby $a_2$".[57]

W przypadku gdy $a_1, a_2 > 0$, sprawdzenie jest następujące:

$$a_1^2 \leqslant D < a_2^2 \rightarrow a_1 < a_2.$$

Implikacja $a_1^2 < a_2^2 \rightarrow a_1 < a_2$ jest dla Dedekinda oczywista. Dzisiaj, a dokładniej po *Über den Zahlbegriff* Davida Hilberta, mówimy, że wnioskowanie to jest oparte na założeniu o zgodności mnożenia liczb wymiernych z porządkiem. Dedekind nie sprawdza też, czy $A_2 \neq \emptyset$. Jest to owszem oczywiste, ale wtedy, gdy wiadomo, że liczby wymierne spełniają aksjomat Archimedesa.

Następnie Dedekind pokazuje, że ani w klasie $A_1$ nie ma elementu największego, ani w klasie $A_2$ nie ma elementu najmniejszego, czyli, że przekrój $(A_1, A_2)$ „nie jest wyznaczony przez żadną liczbę wymierną". Dowód rozpisany jest na dwa kroki.

„Aby to udowodnić musimy przede wszystkim pokazać, że nie ma żadnej liczby wymiernej, której kwadrat $= D$. Ponieważ jest to znane z początków teorii liczb możemy tu podać następujący dowód nie wprost. Gdyby istniała liczba wymierna, której kwadrat $= D$, to istniałyby też dwie liczby całkowite, $t$, $u$, które spełniałyby równanie

$$t^2 - Du^2 = 0,$$

i można przyjąć, że $u$ jest najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą, która posiada tę własność, że jej kwadrat pomnożony przez $D$ staje się kwadratem pewnej liczby całkowitej $t$".[58]

Definiując liczbę $u$ Dedekind kolejny raz *implicite* korzysta z aksjomatu indukcji:

$$u = inf\{n \in \mathbb{N} : \exists t \in \mathbb{N}[t^2 - Dn^2 = 0]\}.$$

[56] [Dedekind 1872], s. 142.
[57] [Dedekind 1872], s. 142.
[58] [Dedekind 1872], s. 142.

Dalej pokazuje, że wyjściowe założenie prowadzi do sprzeczności. Istotnie, dla liczb $\lambda$, $t$, $u$ – gdy mnożenie jest zgodne z porządkiem – zachodzi $\lambda u < t < (\lambda+1)u$. Przyjmując

$$u' = t - \lambda u, \qquad t' = Du - \lambda t,$$

dostajemy, że $t'^2 - Du'^2 = 0$ i zarazem $0 < u' < u$.

W drugim kroku Dedekind dowodzi, że ani w klasie $A_1$ nie ma elementu największego, ani w klasie $A_2$ nie ma elementu najmniejszego.[59]

„Zatem kwadrat dowolnej liczby wymiernej $x$ jest albo $< D$ albo $> D$. Stąd łatwo wynika, że w klasie $A_1$ nie ma liczby największej, ani w klasie $A_2$ nie ma liczby najmniejszej".[60]

Przyjmując $y = \frac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$ dostajemy

$$y - x = \frac{2x(D-x^2)}{3x^2+D}, \qquad y^2 - D = \frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2}.$$

„Jeżeli jako $x$ wziąć tu liczbę dodatnią z klasy $A_1$, to $x^2 < D$ i w konsekwencji $y > x$ i $y^2 < D$, a zatem $y$ należy do klasy $A_1$. Jeżeli jednak jako $x$ przyjąć liczbę z klasy $A_2$, to $x^2 > D$ i w konsekwencji $y < x$, $y > 0$ i $y^2 > D$, a więc $y$ też należy do klasy $A_2$. Zatem nasz przekrój nie jest wyznaczony przez żadną liczbę wymierną".[61]

W rozumowaniach tych *implicite* jest przyjęte, że dodawanie liczb wymiernych jest zgodne z porządkiem.[62]

10.2. W *Stetigkeit und irrationale Zahlen* nie jest powiedziane, że gdy $D = 2$, to odpowiedni przekrój wyznacza liczbę $\sqrt{2}$. O pierwiastku z liczby rzeczywistej, w szczególności o $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ Dedekind wspomina dopiero po uwadze na temat możliwości zdefiniowania operacji pierwiastkowania:

„Podobnie jak dodawanie dają się też zdefiniować pozostałe operacje tzw. arytmetyki elementarnej, mianowicie tworzenie różnicy, iloczynu, ilorazu, potęgi, pierwiastka, logarytmu i w ten sposób udaje się uzyskać prawdziwe dowody twierdzeń (jak np. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), które, o ile mi wiadomo, nigdy dotąd nie zostały udowodnione".[63]

[59] Obecnie, gdy jasna jest definicja porządku liniowego, krok ten jest pomijany, wystarczy bowiem pokazać, że istnieją cztery rodzaje przekrojów zbioru linniowo uporządkowanego; zob. wyżej pkt. 2. Dodając do tego gęstość porządku liczb wymiernych otrzymujemy, że przekrój $(A_1, A_2)$ musi wyznaczać lukę.

[60] [Dedekind 1872], s. 143.

[61] [Dedekind 1872], s. 143.

[62] Mianowicie: $y - x > 0 \to y > x$ oraz $y^2 - D < 0 \to y^2 < D$.

[63] [Dedekind 1872], s. 147.

Już Kartezjusz w swojej *Geometrii* pisał, że pierwiastkowanie jest działaniem arytmetycznym, jednakże dopiero w *Stetigkeit* pierwiastek jest rozumiany jako operacja wewnętrzna na zbiorze liczb rzeczywistych, a na gruncie Dedekinda konstrukcji liczb rzeczywistych można udowodnić istnienie pierwiastka z liczby dodatniej. Nikt przed Dedekindem nie udowodnił, że $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, bo nikt tak jak on nie rozumiał pierwiastka z liczby rzeczywistej.

Możliwa jest też inna interpretacja słów Dedekinda. Gdy $\sqrt{2}$ to taka liczba $r$, że $r \cdot r = 2$, i odpowiednio $\sqrt{3} = s \leftrightarrow_{df} s \cdot s = 3$, $\sqrt{6} = t \leftrightarrow_{df} t \cdot t = 6$, to łatwo pokazać, że $(rs) \cdot (rs) = 6$? Dedekind jest jednak przekonany, iż nikt przed nim nie umiał pokazać, że istnieje liczba $r$ spełniająca warunek $r^2 = 2$. Znane owszem było, ale jedynie geometryczne rozumowanie: kwadrat, którego bokiem jest przekątna kwadratu jednostkowego jest *równy* dwóm kwadratom jednostkowym.[64]

10.3. Tak więc obok przekrojów wyznaczonych przez liczbę wymierną istnieją też przekroje zbioru $(R, <)$, które nie są wyznaczone przez żadną liczbę wymierną.

„Właśnie na własności, że nie wszystkie przekroje są wyznaczone przez liczby wymierne polega niezupełność czy nieciągłość dziedziny $R$ wszystkich liczb wymiernych".[65]

Po tym zdaniu następuje definicja liczby niewymiernej:

„Za każdym więc razem, gdy dany jest przekrój $(A_1, A_2)$, który nie jest wyznaczony przez żadną liczbę wymierną, stwarzamy nową liczbę, liczbę niewymierną $\alpha$, którą traktować będziemy jako całkowicie wyznaczoną przez ten przekrój $(A_1, A_2)$; będziemy mówić, że liczba $\alpha$ odpowiada temu przekrojowi lub że wyznacza ten przekrój. Odtąd więc każdemu przekrojowi odpowiada jedna i tylko jedna określona liczba wymierna lub niewymierna i dwie liczby traktujemy jako różne zawsze wtedy, gdy odpowiadają one rzeczywiście różnym przekrojom".[66]

10.4. W definicji tej na uwagę zasługuje zwrot: „$\alpha$ odpowiada przekrojowi $(A_1, A_2)$ lub wyznacza ten przekrój". Wiąże się on z szeroko komentowaną kwestią „stwarzania" liczby niewymiernej.

[64] Por. [Quine 1974], §51, [Russell 1919], rozdz. VII, [Shapiro 2000(b)]. Autorzy ci nie definiują operacji pierwiastkowania, natomiast piszą o $\sqrt{2}$, czy $\sqrt{3}$. Najwyraźniej rozumieją przez to obiekty, które mogą być rozważane bez związku z definicją operacji pierwiastkowania.

[65] [Dedekind 1872], s. 143.

[66] [Dedekind 1872], s. 143.

W kolejnym punkcie pokażemy, jak można rozumieć to, że liczba niewymierna jest „stwarzana" i jaki jest matematyczny sens tego, że liczba rzeczywista jest czymś różnym od przekroju $(A_1, A_2)$ uporządkowanego zbioru liczb wymiernych $(R, <)$. Teraz, tytułem wprowadzenia, wyliczymy zależności między przekrojem a liczbą rzeczywistą przyjmowane w dzisiejszej matematyce.

(1) W konstrukcji ciała liczb rzeczywistych sama liczba rzeczywista, na mocy definicji, jest przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}, <)$. W tym sposób powstają dwa przedstawienia liczby wymiernej: raz jest to element zbioru $\mathbb{Q}$, a raz przekrój zbioru $(\mathbb{Q}, <)$. Wówczas elementom zbioru $\mathbb{Q}$ odpowiadają przekroje zbioru $(\mathbb{Q}, <)$. Pokazuje się mianowicie, że przy odwzorowaniu

$$q \mapsto ((-\infty, q), [q, +\infty)),$$

ciało liczb wymiernych $\mathfrak{Q}$ jest izomorficzne z ciałem ułamków ciała liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}$.[67]

(2) Z definicji przekroju wynika, że liczba rzeczywista wyznacza przekrój zbioru $(\mathbb{R}, <)$.

(3) Przekrój zbioru $(\mathbb{R}, <)$ wyznacza dokładnie jedną liczbę rzeczywistą; to właśnie stanowi treść twierdzenia o ciągłości liczb rzeczywistych.

(4) Gdy zbiór $O$ jest ośrodkiem przestrzeni $(\mathbb{R}, <)$, to każda liczba rzeczywista wyznacza przekrój zbioru $(O, <)$ oraz każdy przekrój tego zbioru wyznacza dokładnie jedną liczbę rzeczywistą.[68] Gdy $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, to zbiór $\mathbb{Q}$ jest ośrodkiem przestrzeni $(\mathbb{R}, <)$. Gdy zaś liczby rzeczywiste są traktowane jako przekroje zbioru $(\mathbb{Q}, <)$, to ośrodkiem przestrzeni $(\mathbb{R}, <)$ jest zbiór przekrojów $\{((-\infty, q), [q, +\infty)) : q \in \mathbb{Q}\}$.

W *Stetigkeit* nie ma wskazanego wyżej podwójnego przedstawienia liczb wymiernych i to właśnie rzutuje na kwestię „stwarzania" liczb niewymiernych.

**11.** Co to jest liczba? Tak ogólne pytanie jest natury filozoficznej w tym sensie, że w matematyce nie podaje się ogólnej definicji liczby.

Dedekind odróżnia liczbę rzeczywistą od przekroju zbioru $(R, <)$, natomiast w komentarzach filozoficznych do konstrukcji ciała liczb rzeczywistych metodą przekrojów Dedekinda liczba rzeczywista jest utożsamia z przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}, <)$.[69] Podobnie postępuje wielu matematyków.[70] Ale obok

[67] W istocie rzecz jest trochę bardziej złożona, bo liczbie wymiernej $q$ „odpowiadają" dwa przekroje: $((-\infty, q), [q, +\infty))$ oraz $((-\infty, q], (q, +\infty))$. Dalej, dla prostoty wyrazu, pomijamy ten drugi przypadek.

[68] Zob. rozdz. *O ciągłości linii prostej*, pkt. 15.

[69] Zob. [Quine 1974], §51, [Russell 1919], rozdz. VII, [Shapiro 2000(b)].

[70] Zob. np. [Mainzer 1995(b)], §2, [Schechter 1997], rozdz. X.

tego są też i tacy, którzy, tak jak Dedekind, po pierwsze, bynajmniej nie utożsamiają liczby wymiernej z jakimkolwiek zbiorem, po drugie, nie utożsamiają liczby rzeczywistej z przekrojem, a przyjmują, że „określa on liczbę niewymierną", że liczba niewymierna jest „związana" z przekrojem.[71]

Pokażemy, jak w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* uzasadnione jest odróżnienie liczby rzeczywistej od odpowiadającego jej przekroju zbioru liczb wymiernych, innymi słowy, co to jest liczba rzeczywista według Dedekinda? Proponowana interpretacja oparta jest na analizie dowodu twierdzenia o ciągłości. Pokażemy, że przekrój $(A_1, A_2)$ zbioru $(R, <)$ jest liczbą wtedy, gdy jest wzięty pod pewnym względem. Pod jakim? O tym niżej.

Zaczniemy od kilku wyjaśnień. Najpierw warstwa symboliczna *Stetigkeit*.

11.1. Przekroje uporządkowanego zbioru liczb wymiernych $(R, <)$ oznaczane są dużymi literami alfabetu łacińskiego z indeksem odpowiadającym klasie dolnej lub górnej, np. $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$. Liczby wymierne należące do klasy dolnej lub górnej oznaczane są małymi literami alfabetu łacińskiego z odpowiednim indeksem, np. $a_1 \in A_1$, $b_2 \in B_2$; pełnią one rolę zmiennych, natomiast ustalony element klasy dolnej lub górnej, np. element największy lub najmniejszy, jest oznaczany małą literą alfabetu łacińskiego z odpowiednim indeksem i primem, np. $a_1'$ jest największym elementem klasy $A_1$. Przekroje zbioru $(R, <)$ traktowane jako liczby rzeczywiste, niewymierne lub wymierne, oznaczane są małymi, pierwszymi literami greckiego alfabetu. Zbiór liczb rzeczywistych oznaczany jest dużym gotyckim $\mathfrak{R}$, przekroje zbioru $(\mathfrak{R}, <)$ – dużymi gotyckimi literami z odpowiednimi indeksami $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$,[72] a wreszcie elementy klas $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ – małymi greckimi literami z odpowiednimi indeksami: $\alpha_1 \in \mathfrak{A}_1$, $\beta_2 \in \mathfrak{B}_2$. Pamiętając, że w *Stetigkeit* zbiór liczb wymiernych oznaczono literą $R$, widzimy tu konsekwentnie przeprowadzony plan.

Skąd ta skrupulatność? Otóż problemem jest podwójne rozumienie liczb wymiernych: raz są to elementy zbioru $R$, raz przekroje zbioru $(R, <)$ „odpowiadające" elementom zbioru $R$. W pierwszym przypadku liczba wymierna jest oznaczana, zależnie od tego czy jest zmienną czy stałą, jako $a$, lub $a_1$, lub $a_1'$; w drugim przypadku – małą literą greckiego alfabetu. W kluczowych momentach, gdy dochodzi np. do porównania liczby $a_1'$ z wyznaczonym przez nią przekrojem $((-\infty, a_1'), [a_1', +\infty))$, Dedekind pisze $a_1' = \alpha$, gdzie $\alpha$ oznacza przekrój $((-\infty, a_1'), [a_1', +\infty))$.

Chodzi tu zatem o trudność, którą w dzisiejszej matematyce rozwiązuje się za pomocą izomorfizmu ciała liczb wymiernych $\mathfrak{Q}$ i ciała ułamków ciała liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}$.

[71] Zob. [Fichtenholtz 1985], *Wstęp*.

[72] W polskim tłumaczeniu użyto małych liter: $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$.

Czysto matematyczne znaczenie warstwy symbolicznej odsłoni się przy omawianiu dowodów twierdzeń o ciągłości i ośrodkowości liczb rzeczywistych, teraz skupimy się na ontologicznej różnicy między liczbą rzeczywistą $\alpha$ i „odpowiadającym" jej przekrojem $(A_1, A_2)$.

11.2. W trzecim paragrafie rozprawy czytamy, że „system liczb wymiernych" jest rozszerzany po to, aby „zbadać arytmetycznie wszystkie zjawiska mające miejsce na prostej". Jakie to zjawiska?

W *Stetigkeit* badana jest przede wszystkim ciągłość, ale w innym miejscu znajdujemy, że linii prostej przysługuje „niezliczenie wiele innych własności":

„Bardzo mi miło, że wszyscy uważają powyższą zasadę [tj. ciągłość w sensie Dedekinda – P.B.] za oczywistą i zgodną z ich wyobrażeniami linii prostej; nie jestem bowiem w stanie podać żadnego dowodu jej poprawności i nikt nie jest w stanie tego uczynić. Przyjęcie tej własności linii nie jest niczym innym jak aksjomatem, za pomocą którego dopiero przyznajemy linii ciągłość, za pomocą którego wkładamy w nią ciągłość. Jeżeli przestrzeń w ogóle realnie istnieje, to przecież niekoniecznie musi być ciągła; niezliczenie wiele jej własności pozostałoby niezmienionych, gdyby nie była ona ciągła".[73]

W rozprawie własności te nie są wymienione, tym niemniej jest jasne, że podobieństwo między liczbami rzeczywistymi a linią prostą (ciągłą w sensie Dedekinda) ogranicza się jedynie do struktury porządkowej.

A na czym polegają różnice? Między innymi na tym, że liczby są dodawane czy mnożone, a punkty nie podlegają takim operacjom.

Reasumując, linia prosta i liczby rzeczywiste nie są utożsamiane, są one porównywane tylko jako struktury porządkowe.

11.3. Czym różni się liczba $\alpha$ od „odpowiadającego" jej przekroju $(A_1, A_2)$? Liczba $\alpha$ to przekrój $(A_1, A_2)$, ale wzięty pod pewnym względem. Pod jakim? Jest to pokazane w dalszej części §4, a więc przede wszystkim ze względu na równość oraz relację większości, a następnie w §6 pokazane jest, że przekroje mogą być poddane operacjom arytmetycznym, czyli takim, jakie są wykonywane na liczbach. Ale aspekty *arytmetyczne* bynajmniej nie wyczerpują wszystkiego, co można powiedzieć o przekroju $(A_1, A_2)$.[74]

[73] [Dedekind 1872], s. 141.

[74] Mówimy oczywiście o tym, jak rzecz jest rozumiana w *Stetigkeit*. Przypomnijmy chociażby to, że Kartezjusz jako pewne *novum* podawał w *Geometrii*, że obok dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia liczby można także pierwiastkować. U Dedekinda, obok tych działań mamy ponadto potęgowanie i logarytmowanie. Tak więc owe aspekty arytmetyczne są historycznie zmienne, tak jak historycznie zmienia się pojęcie liczby.

11.4. Równość:

„dwie liczby traktujemy jako różne zawsze wtedy, gdy odpowiadają one rzeczywiście różnym przekrojom".[75]

Co to są „rzeczywiście różne przekroje"? Czytamy:

„Możemy wtedy powiedzieć, że każda liczba wymierna $a$ wyznacza pewien przekrój czy właściwie dwa przekroje, których jednak nie chcemy traktować jako różnych".[76]

Liczba wymierna $q$ „wyznacza" dwa przekroje: $((-\infty, q), [q, +\infty))$ oraz $((-\infty, q], (q, +\infty))$. Wzięte jako pary uporządkowane zbiorów są one „rzeczywiście różne", wzięte jako liczby nie są „rzeczywiście różne", „nie są istotnie różne", ale dopowiedzmy: „nie są istotnie różne" *ex definitione*.

11.5. Porządek. Czytamy:

„Aby uzyskać teraz pewne podstawy do uporządkowania wszystkich liczb rzeczywistych, tj. wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych, musimy zbadać związki, jakie mogą zachodzić pomiędzy dwoma dowolnymi przekrojami $(A_1, A_2)$ i $(B_1, B_2)$".[77]

Przede wszystkim

„Przekrój $(A_1, A_2)$ jest już w pełni określony, jeżeli znana jest jedna z dwu klas, np. pierwsza, ponieważ druga $A_2$ składa się z wszystkich liczb wymiernych nie należących do $A_1$".[78]

Następnie rozważane są przypadki: (1) $A_1 = B_1$, (2) , $A_1 \backslash B_1 \neq \emptyset$.

(1) „Jeżeli porównać teraz obie klasy pierwsze $A_1$, $B_1$ z sobą, to może się zdarzyć, że są one całkowicie identyczne, tzn. że każda liczba $a_1$ należąca do $A_1$ należy także do $B_1$ i każda liczba $b_1$ należy także do $A_1$. W takim przypadku oczywiście również $A_2$ i $B_2$ są identyczne i oba przekroje są w pełni identyczne, co symbolicznie wyrażamy jako $\alpha = \beta$ lub $\beta = \alpha$".[79]

(2) „Jeżeli jednak obie klasy $A_1$, $B_1$ nie są identyczne, wtedy w jednej z nich, np. w $A_1$ istnieje pewna liczba $a_1' = b_2'$, która nie należy do $B_1$ i która w związku z tym należy do $B_2$".[80]

[75] [Dedekind 1872], s. 143.
[76] [Dedekind 1872], s. 142.
[77] [Dedekind 1872], s. 143.
[78] [Dedekind 1872], s. 144.
[79] [Dedekind 1872], s. 144. W pierwszym zdaniu mamy tu niemal wprost sformułowany aksjomat ekstensjonalności zbiorów: $\forall x[(x \in A_1 \leftrightarrow x \in B_1)] \rightarrow A_1 = B_1$.
[80] [Dedekind 1872], s. 144.

Gdy $A_1 \backslash B_1 \neq \emptyset$, to należy rozróżnić dwa kolejne przypadki.

(2a) „Jeżeli teraz liczba $a_1'$ jest jedyną, która nie należy do $B_1$, to każda inna liczba $a_1$ należąca do $A_1$ należy też do $B_1$ i w konsekwencji jest mniejsza niż $a_1'$, tzn. $a_1'$ jest największą wśród wszystkich liczb $a_1$, a zatem przekrój $(A_1, A_2)$ jest wyznaczony przez liczbę wymierną $\alpha = a_1' = b_2'$".[81]

Wówczas – pokazuje Dedekind – liczba $b_2'$ jest najmniejszą w klasie $B_2$ zatem

„przekrój $(B_1, B_2)$ jest wyznaczony przez tę liczbę wymierną $\beta = b_2' = a_1' = \alpha$. Oba przekroje nie są więc istotnie różne".[82]

(2b) „Jeżeli jednak w $A_1$ istnieją co najmniej dwie liczby $a_1' = b_2'$ i $a_1'' = b_2''$, które nie należą do $B_1$, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb",[83]

co wynika z gęstości porządku liczb wymiernych.

„W tym przypadku liczby $\alpha$ i $\beta$ odpowiadające tym dwóm istotnie różnym przekrojom $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$ nazywamy również różnymi, mówimy mianowicie, że $\alpha$ jest większe niż $\beta$, że $\beta$ jest mniejsze niż $\alpha$, co symbolicznie wyrażamy jako $\alpha > \beta$ i $\beta < \alpha$. Podkreśla się też w ten sposób, że definicja ta całkowicie pokrywa się z wcześniejszą, gdy obie liczby $\alpha$, $\beta$ są wymierne".[84]

Analogiczne dwa przypadki związane z warunkiem $A_1 \subset B_1$ są odnotowane bez szczegółowego sprawdzenia.

W podsumowaniu tego wątku czytamy:

„Ponieważ wyczerpaliśmy w ten sposób wszystkie możliwości, otrzymujemy więc jako wniosek, że z dwu różnych liczb jedna musi być większa, druga mniejsza – są więc dwie możliwości. Trzeciej możliwości nie ma".[85]

Ostatecznie otrzymujemy więc prawo: dla dowolnych liczb rzeczywistych zachodzi:

$$\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \alpha > \beta.$$

Ta własność liczb rzeczywistych jest jeszcze dzisiaj nazywana prawem trychotomii, chociaż nie jest to nic innego jak spójność porządku.

[81] [Dedekind 1872], s. 144.
[82] [Dedekind 1872], s. 144.
[83] [Dedekind 1872], s. 144.
[84] [Dedekind 1872], s. 144.
[85] [Dedekind 1872], s. 144.

11.6. Historycznie prawo trychotomii sięga *Elementów* Euklidesa, gdzie było odnoszone do wielkości geometrycznych. W *Elementach*, w dowodach dotyczących wielkości geometrycznych i prowadzonych nie wprost sprzeczność często polega na tym, że nie może być tak, iż dla pewnych $A$, $B$ jest zarazem $A > B$ i $A = B$.[86] A są też i takie dowody, w których prawo trychotomii jest wprost przyjmowane.[87]

W *Elementach* wielkości geometryczne są przedstawiane jako odcinki. Z czasem – a tak jest już w *Geometrii* Kartezujsza – gdy z odcinkami związano liczby, uznano, że prawo trychotomii przysługuje liczbom. W *Elementach* natomiast liczby, tj. liczby naturalne, nie są porównywane jako większe czy mniejsze.[88]

11.7. Fakt, że odpowiadający liczbie $q$ przekrój $((-\infty, q), [q, +\infty))$ posiada własności, których Dedekind nie wiązał z liczbą sprawia, iż dopiero pewien aspekt przekroju, ten mianowicie, który jest wyznaczony przez działania arytmetyczne i porządek jest liczbą. Innymi słowy liczba wymierna to pewien aspekt zbioru $((-\infty, q), [q, +\infty))$. To samo odnosi się do liczby niewymiernej: przekrój uporządkowanego zbioru liczb wymiernych $(R, <)$ nie jest liczbą, ale dopiero aspekt danego przekroju jest liczbą.

Liczba niewymierna „jest stwarzana", bo „stwarzane", definiowane są aspekty, z uwagi na które, przekroje zbioru $(R, <)$ są liczbami.

„Stwarzanie liczby", o którym pisze Dedekind, jest w pierwszym rzędzie próbą rozwiązania konkretnego technicznego problemu – izomorfizmu ciała liczb wymiernych $\mathfrak{Q}$ i ciała ułamków ciała $\mathfrak{R}$ – a nie, jak się zazwyczaj podaje, jakimś metafizycznym rozstrzygnięciem.[89]

**12.** Wracamy do dalszego ciągu rozprawy Dedekinda. W zakończeniu paragrafu czwartego znajdujemy rozważania podsumowane zdaniem:

„Jeżeli $\alpha > \beta$, a zatem jeśli istnieje nieskończenie wiele liczb w $A_1$, które nie należą do $B_1$, to istnieje również nieskończenie wiele takich liczb, które są jednocześnie różne od $\alpha$ i $\beta$; każda taka liczba wymierna $c$ jest $< \alpha$, ponieważ należy do $A_1$ i jednocześnie $> \beta$, ponieważ należy do $B_2$".[90]

[86] Zob. np. [Euklides], I, tw. 7, 14.

[87] Zob. „I say that the angle $BAC$ is also greater than the angle $EDF$. For, if not, it is either equal to it or less" [Euklides], I, tw. 25, lub: „For, if $AB$ is unequal to $DE$, one of them is greater" [Euklides], I, tw. 26. Zob. także rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 1–6.

[88] Zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 1-3.

[89] Por. [McCarty 1995].

[90] [Dedekind 1872], s. 145.

Mamy tu zatem i gęstość porządku liczb rzeczywistych,

$$\forall\alpha,\beta\in\mathfrak{R}\exists\gamma\in\mathfrak{R}[\alpha<\beta\rightarrow\alpha<\gamma<\beta], \tag{1}$$

i gęstość liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych,

$$\forall\alpha,\beta\in\mathfrak{R}\exists c\in R[\alpha<\beta\rightarrow\alpha<c<\beta], \tag{2}$$

a wreszcie specyficzną własność związaną z konstrukcją liczb rzeczywistych, która w rozprawie Dedekinda nie zyskała nazwy:

Gdy $\alpha$ jest liczbą rzeczywistą wyznaczoną przez przekrój $(A_1, A_2)$, zaś $c$ liczbą wymierną, wtedy zachodzi:

$$c<\alpha\rightarrow c\in A_1,\quad c>\alpha\rightarrow c\in A_2. \tag{3}$$

Własności (1)–(3) nie są podane w formie teza–dowód jako odrębne twierdzenia, ale w ciągu rozważań wokół nierówności $\alpha>\beta$, jako uwagi do szczególnego przypadku, gdzie jedna z liczb $\alpha$ lub $\beta$ jest wymierna. Spójrzmy, jak są uzasadniane.

„Jeżeli rozważyć jeszcze raz dokładnie przypadek $\alpha>\beta$, to otrzyma się, że mniejsza z liczb, $\beta$, jeżeli jest wymierna, to z pewnością należy do klasy $A_1$; istotnie, ponieważ w $A_1$ istnieje liczba $a_1'=b_2'$, która należy do $B_2$, więc liczba $\beta$, czy jest największa w $B_1$, czy najmniejsza w $B_2$, na pewno $\leqslant a_1$ [z rozumowania wynika, że powinno być $\leqslant a_1'$ – P.B.] w konsekwencji należy do $A_1$. Podobnie z $\alpha>\beta$ wynika, że większa liczba $\alpha$, jeżeli jest wymierna, to należy do klasy $B_2$, ponieważ $\alpha\geqslant a_1'$".[91]

Stosując konwencje symboliczne Dedekinda, powyższe zdania można tak zapisać:

$$\alpha>\beta=c\rightarrow c\in A_1,\qquad c=\alpha>\beta\rightarrow c\in B_2,$$

gdzie $c$ jest liczbą wymierną, $\alpha$ jest wyznaczona przez przekrój $(A_1, A_2)$, $\beta$ jest wyznaczona przez przekrój $(B_1, B_2)$.

Dalej czytamy:

„Łącząc obydwa te rozumowania otrzymuje się następujący wynik: Jeżeli przekrój $(A_1, A_2)$ jest wyznaczony przez liczbę $\alpha$, to wtedy jakaś liczba wymierna należy do klasy $A_1$ lub do klasy $A_2$, zależnie od tego, czy jest mniejsza czy większa od $\alpha$",[92]

[91] [Dedekind 1872], s. 143; dopowiedzmy: ponieważ $\alpha\geqslant a_1'=b_2'$.

[92] [Dedekind 1872], s. 143.

co można zapisać w postaci:

$$c = \beta < \alpha \to c \in A_1, \quad \alpha < \beta = c \to c \in A_2.$$

W rezultacie dostajemy cytowany już wniosek:

„Jeżeli $\alpha > \beta$, a zatem jeśli istnieje nieskończenie wiele liczb w $A_1$, które nie należą do $B_1$, to istnieje również nieskończenie wiele takich liczb, które są jednocześnie różne od $\alpha$ i $\beta$; każda taka liczba wymierna $c$ jest $< \alpha$, ponieważ należy do $A_1$ i jednocześnie $> \beta$, ponieważ należy do $B_2$".[93]

Cóż więc zostało tu wykazane? W rozprawie nie jest to wyraźnie sformułowane. Charakteryzując porządek liczb rzeczywistych Dedekind wymieni własność (1), a w dowodzie twierdzenia o ciągłości liczb rzeczywistych będzie korzystał z własności (2) i (3).

**13.** W paragrafie piątym *Ciągłość dziedziny liczb rzeczywistych* jest pokazane, że „system $\mathfrak{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych tworzy dziedzinę dobrze uporządkowaną jednowymiarową", co znaczy, że zdefiniowany w poprzednim paragrafie porządek przekrojów jest przechodni, gęsty i spójny, przy czym spójność, podobnie jak w przypadku liczb wymiernych, Dedekind wyraża za pomocą przekrojów:

„Jeżeli $\alpha$ jest pewną określoną liczbą, to wszystkie liczby systemu $\mathfrak{R}$ rozpadają się na dwie klasy $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$, z których każda zawiera nieskończenie wiele elementów; pierwsza klasa $\mathfrak{A}_1$ zawiera wszystkie liczby $\alpha_1$, które są $< \alpha$, druga klasa $\mathfrak{A}_2$ wszystkie liczby $\alpha_2$, które są $> \alpha$; sama liczba $\alpha$ może być dowolnie zaliczona albo do pierwszej, albo do drugiej klasy i jest wtedy odpowiednio największą liczbą pierwszej lub najmniejszą liczbą drugiej klasy. W każdym z przypadków rozkład systemu $\mathfrak{R}$ na dwie klasy $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ jest tego rodzaju, że każda liczba pierwszej klasy $\mathfrak{A}_1$ jest mniejsza od każdej liczby drugiej klasy $\mathfrak{A}_2$; mówimy, że podział ten jest wyznaczony przez liczbę $\alpha$".[94]

W uzasadnieniu czytamy:

„Dla krótkości, aby nie nużyć czytelnika, pominę dowody tych twierdzeń; wynikają one bezpośrednio z definicji poprzedniego paragrafu".[95]

Z pewnością liniowość porządku wynika z „definicji poprzedniego paragrafu". Ale to, że porządek liczb rzeczywistych jest gęsty nie jest bynajmniej

[93] [Dedekind 1872], s. 145.

[94] [Dedekind 1872], s. 145. Uwzględniając konwencje symboliczne, o których pisaliśmy wyżej jest to powtórzenie, niemal słowo w słowo, własności III liczb wymiernych.

[95] [Dedekind 1872], s. 145.

oczywiste i końcowe akapity §4 należy rozumieć jako dowód tej własności, natomiast spójność porządku to udowodnione w poprzednim paragrafie prawo trychotomii.

13.1. Dalej czytamy:

„Oprócz wymienionych własności dziedzina $\mathfrak{R}$ posiada jeszcze ciągłość, tj. zachodzi następujące twierdzenie:

IV. Jeżeli system $\mathfrak{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych rozpada się na dwie klasy $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ tego rodzaju, że każda liczba $\alpha_1$ klasy $\mathfrak{A}_1$ jest mniejsza od każdej liczby $\alpha_2$ klasy $\mathfrak{A}_2$, to istnieje jedna i tylko jedna liczba $\alpha$, która jest wyznaczona przez ten rozkład".[96]

Dowód podany przez Dedekinda jest następujący. Przekrój $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ zbioru $(\mathfrak{R}, <)$ „daje jednocześnie przekrój $(A_1, A_2)$ systemu $R$ wszystkich liczb wymiernych", mianowicie „$A_1$ zawiera wszystkie liczby wymierne klasy $\mathfrak{A}_1$, a $A_2$ wszystkie pozostałe liczby wymierne, tzn. wszystkie liczby wymierne klasy $\mathfrak{A}_2$", tj.

$$A_1 = \{c \in R : c \in \mathfrak{A}_1\}, \quad A_2 = \{c \in R : c \in \mathfrak{A}_2\}.$$

To, że para $(A_1, A_2)$ jest przekrojem uporządkowanego zbioru liczb wymiernych $(R, <)$ Dedekind uznał za fakt oczywisty i nie wymagający uzasadnienia, a jest to jeden z ważniejszych kroków omawianego dowodu. Zauważmy, że definicje zbiorów $A_1$ i $A_2$ są poprawne, gdy nie odróżnia się liczb wymiernych będących elementami $R$ i „odpowiadających" im przekrojów zbioru $(R, <)$. Następnie czytamy:

„Niech $\alpha$ będzie w pełni określoną liczbą, która wyznacza przekrój $(A_1, A_2)$".[97]

Pozostała część dowodu polega na pokazaniu, że liczba $\alpha$ jest albo największa w klasie $\mathfrak{A}_1$, albo najmniejsza w klasie $\mathfrak{A}_2$, tj.

$$\beta \in \mathfrak{A}_1 \to \beta \leqslant \alpha, \quad \beta \in \mathfrak{A}_2 \to \alpha \leqslant \beta.$$

[96] [Dedekind 1872], s. 146.

[97] [Dedekind 1872], s. 146. K woli jednoznaczności należy powiedzieć, że przekrój $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ zbioru $(\mathfrak{R}, <)$ „wyznacza" przekrój $(A_1, A_2)$ zbioru $(R, <)$, a ten *ex definitione* „wyznacza" liczbę rzeczywistą $\alpha$. Sam Dedekind zgodził się na dwuznaczność i pisze, że przekrój wyznacza liczbę oraz liczba wyznaczona przekrój: „Za każdym więc razem, gdy dany jest przekrój $(A_1, A_2)$, który nie jest wyznaczony przez żadną liczbę wymierną, stwarzamy nową liczbę, liczbę niewymierną $\alpha$, którą traktować będziemy jako całkowicie wyznaczoną przez ten przekrój $(A_1, A_2)$; będziemy mówić, że liczba $\alpha$ odpowiada temu przekrojowi lub że wyznacza ten przekrój" [Dedekind 1872], s. 143.

Wobec prawa trychotomii oraz własności $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{R}$, warunki te sprowadzają się do implikacji

$$\beta < \alpha \to \beta \in \mathfrak{A}_1, \qquad \alpha < \beta \to \beta \in \mathfrak{A}_2.$$

I właśnie te implikacje są dowodzone w rozprawie:

„Jeżeli teraz $\beta$ jest jakąkolwiek liczbą różną od $\alpha$, to istnieje zawsze nieskończenie wiele liczb wymiernych $c$, które leżą pomiędzy $\alpha$ a $\beta$. Jeżeli $\beta < \alpha$, to $c < \alpha$; zatem $c$ należy do klasy $A_1$ i w konsekwencji także do klasy $\mathfrak{A}_1$".[98]

W tym wnioskowaniu Dedekind korzysta z własności (2) i (3) udowodnionych w §4, a omówionych przez nas wyżej w punkcie 12:

$$\beta < \alpha \to \exists c \in R[\beta < c < \alpha],$$

$$(c \in R,\ c < \alpha) \to c \in A_1.$$

Wniosek „$c$ należy do klasy $A_1$ i w konsekwencji także do klasy $\mathfrak{A}_1$" jest oczywiście poprawny przy założeniu, że nie odróżnia się liczb wymiernych należących do $R$ i przekrojów zbioru $(R, <)$ „odpowiadających" liczbom wymiernym.

Dalej dowód jest już prosty:

„a ponieważ jednocześnie $\beta < c$, więc także $\beta$ należy do tej samej klasy $\mathfrak{A}_1$".[99]

Zupełnie tak samo jest pokazane, że zachodzi $\alpha < \beta \to \beta \in \mathfrak{A}_2$.

„Jeżeli jednak $\beta > \alpha$, to $c > \alpha$; zatem $c$ należy do klasy $A_2$, i w konsekwencji także do klasy $\mathfrak{A}_2$, ale ponieważ równocześnie $\beta > c$, więc także $\beta$ należy do tej samej klasy $\mathfrak{A}_2$".[100]

Ostatecznie:

„A zatem każda liczba $\beta$ różna od $\alpha$ należy do klasy $\mathfrak{A}_1$ lub klasy $\mathfrak{A}_2$ zależnie od tego, czy $\beta < \alpha$, czy $\beta > \alpha$; a więc $\alpha$ jest albo największa liczbą klasy $\mathfrak{A}_1$, albo najmniejszą liczbą klasy $\mathfrak{A}_2$".[101]

**14.** Dowód twierdzenia o ciągłości liczb rzeczywistych można przeprowadzić w ramach paradygmatu teoriomnogościowego, bez owego *filozoficznego*

[98] [Dedekind 1872], s. 146.
[99] [Dedekind 1872], s. 146.
[100] [Dedekind 1872], s. 146.
[101] [Dedekind 1872], s. 146.

utożsamienia liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ i odpowiadających im przekrojów zbioru $(\mathbb{Q}, <)$, korzystając z operacji sumy rodziny zbiorów – operacji, której Dedekind nie znał.

Przyjmijmy zatem, że liczby wymierne utożsamiamy teraz ze zbiorami, tj. z odpowiednimi klasami abstrakcji.[102] Dla prostoty wyrazu, w miejsce przekroju wprowadzimy pojęcie przedziału początkowego.

Niepusty podzbiór właściwy $Y$ zbioru $X$ nazywamy przedziałem początkowym zbioru liniowo uporządkowanego $(X, <)$, gdy

$$\forall x \in X[x \in Y \leftrightarrow \exists y \in Y[x < y]].^{103}$$

Przyjmijmy, że $y^*$, gdzie $y \in X$, oznacza przedział początkowy zbioru $(X, <)$ wyznaczony przez $y$, tj.

$$y^* = \{x \in X : x < y\}.$$

Niech $\mathcal{P}$ oznacza zbiór wszystkich przedziałów początkowych zbioru $(\mathbb{Q}, <)$; przedziały te będziemy oznaczali małymi literami greckiego alfabetu. Przedział początkowy $\alpha$ nazywamy wymiernym, gdy jest wyznaczony przez liczbę wymierną $q$.

Porządek w zbiorze $\mathcal{P}$ sprowadza się do relacji inkluzji:

$$\alpha < \beta \leftrightarrow_{df} \alpha \subsetneq \beta.$$

Pokażemy, że zbiór $(\mathcal{P}, <)$ jest uporządkowany w sposób ciągły.

(1) Ośrodkowość. Zbiór przedziałów wymiernych $\mathbb{Q}^* = \{q^* \in \mathcal{P} : q \in \mathbb{Q}\}$ jest gęsty w $(\mathcal{P}, <)$. Istotnie, gdy $\alpha < \beta$, to zbiór $\beta \backslash \alpha$ jest nieskończony i dla dowolnego $q \in \beta \backslash \alpha$ zachodzi $\alpha < q^* < \beta$.

(2) W zbiorze $(\mathcal{P}, <)$ spełniona jest zasada supremum.[104] Niech $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}$ będzie zbiorem niepustym i ograniczonym z góry. Przyjmijmy

$$\gamma = \bigcup \{\alpha : \ \alpha \in \mathfrak{A}\}.$$

Pokażemy, że $\gamma$ jest przedziałem początkowym zbioru $(\mathbb{Q}, <)$.

Oczywiście jest $\emptyset \neq \gamma \subset \mathbb{Q}$ oraz $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Jeżeli $q \in \gamma$, to $\exists \alpha \in \mathfrak{A}[q \in \alpha]$. Na podstawie założenia, że $\alpha$ jest przedziałem początkowym dostajemy, że dla pewnej liczby wymiernej $p$ zachodzi $p \in \alpha$ i $q < p$. Zatem gdy $q \in \gamma$, to istnieje takie $p$, że $p \in \gamma$ i $q < p$. Podobnie pokazujemy drugą implikację: $(\exists p \in \gamma[q < p]) \rightarrow q \in \gamma$.

[102] Zob. [Rasiowa 1979], rozdz. VII, §3.

[103] Na mocy tej definicji w zbiorze $Y$ nie ma elementu największego. Zob. definicję odcinka w: [Kuratowski, Mostowski 1978], s. 209.

[104] Zob. wyżej pkt. 3.1.

Z definicji operacji $\bigcup$ wynika, że $\forall\alpha \in \mathfrak{A}[\alpha \subset \gamma]$ oraz to, że $\gamma$ jest najmniejszym ze względu na relację inkluzji zbiorem o tej własności, czyli $\gamma = sup\mathfrak{A}$.[105]

14.1. Dowód twierdzenia o ciągłości liczb rzeczywistych czasami jest ograniczony do wykazania zasady supremum.[106] Jest to usprawiedliwione faktem, że w ciele uporządkowanym porządek jest gęsty. Mając to na uwadze można by przypuszczać, że *filozoficzne* trudności związane z podwójnym przedstawieniem liczb wymiernych można ominąć, bo jest ono wykorzystywane w dowodzie gęstości porządku liczb rzeczywistych. Problem ten powraca jednak w związku z pytaniem o ośrodkowość liczb rzeczywistych. Właśnie dlatego w teoriomnogościowej rekonstrukcji konstrukcji Dedekinda wyraźnie odróżnia się ciało liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$ i ciało ułamków ciała, którego elementami są przekroje wymierne $q^*$. W miejsce *filozoficznego* utożsamienia liczb wymiernych i odpowiednich przekrojów liczb wymiernych, jakie znaleźliśmy w *Stetigkeit*, we współczesnej matematyce występuje pojęcie izomorfizmu.[107]

14.2. W teoriomnogościowej konstrukcji liczb rzeczywistych bez odpowiedzi pozostaje pytanie, czym jest liczba wymierna? Jeżeli jest zbiorem, to mamy np. dwie różne liczby $\frac{1}{2}$: raz jest to element zbioru $\mathbb{Q}$, a więc odpowiednia klasa abstrakcji, innym razem jest to przedział początkowy zbioru $(\mathbb{Q}, <)$, mianowicie $\frac{1}{2}^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < \frac{1}{2}\}$. W ramach paradygmatu teoriomnogościowego jedyną odpowiedzią na pytanie dlaczego te dwa różne zbiory są uważane za tę samą liczbę jest pojęcie izomorfizmu.

Po części jest tak dlatego, że samo pojęcie liczby można w ogóle wyeliminować z tych rozważań, a po części dlatego, że pytanie to nie jest związane z żadnym problemem, który można wyrazić matematycznie.

Dla porównania zobaczmy, do jakich konkretnych, wyrażalnych matematycznie pytań prowadzi to rozumienie liczby, jakie znaleźliśmy u Dedekinda.

---

[105] Taka konstrukcja liczb rzeczywistych jest zarysowana w [Russell 1919], rozdz. VII. Znamienne, że Russell w kilku miejscach zwraca uwagę na to, co „opóźniało ścisłą teorię liczb niewymiernych", a bagatelizuje „metodę dzielenia wszystkich elementów ciągu na dwie klasy", a więc pojęcie przekroju Dedekinda – pojęcie kluczowe w konstrukcji, którą przeprowadza.

[106] Zob. [Rudin 1982], s. 20, [Shapiro 2000(b)], s. 342–343.

[107] Zob. „zastąpienie liczb wymiernych odpowiednimi 'przekrojami wymiernymi' jest operacją zachowującą sumy, iloczyny i porządek. Fakt ten, może być wyrażony przez stwierdzenie, że ciało uporządkowane $Q$ jest izomorficzne z ciałem uporządkowanym $Q^*$, którego elementami są przekroje wymierne. Oczywiście $r^*$ nie jest tym samym co $r$, jednak własności, o które nam chodzi (arytmetyczne oraz porządkowe) są identyczne dla obu ciał. Dzięki tej identyfikacji $Q$ z $Q^*$, możemy traktować $Q$ jako podciało [ciała liczb rzeczywistych – P.B.] $R$" [Rudin 1982], s. 22–23.

Dedekind – jak pamiętamy – pojmuje liczby wymierne jako ciało algebraiczne, w którym określony jest porządek liniowy i gęsty. Zupełnie naturalne jest zatem pytanie, czy takie ciało w ogóle istnieje; postawił je Heinrich Weber, a w odpowiedzi zarysował klasyczną i powszechnie dziś znaną konstrukcję liczb wymiernych.[108] Gdy jednak liczba wymierna jest zbiorem, to odtwarzając konstrukcję Dedekinda, liczby wymierne należy *sklonować* i przedstawić je także jako przekroje wyjściowego zbioru liczb wymiernych. Wówczas własność (3) z §4

$$c = \beta < \alpha \to c \in A_1,$$

jest istotnie paradoksalna, tj. jeżeli $c = \beta$ i $\beta$ jest przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}, <)$, to nie może być tak, że $\beta \in \mathbb{Q}$.

Rozwiązaniem tego problemu jest wyżej przedstawiona parafraza konstrukcji Dedekinda. W przedstawionym ujęciu własność (3) w ogóle nie jest użyta, chociaż można ją jasno wyrazić:

$$q^* < \alpha \to q \in \alpha. \tag{4}$$

Wówczas można też odtworzyć oryginalny dowód ze *Stetigkeit*. W tym celu postępowanie Dedekinda należy jeszcze tak uzupełnić. Gdy dany jest przekrój $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ zbioru $(\mathcal{P}, <)$, to w miejsce definicji

$$A_1 = \{c \in R : c \in \mathfrak{A}_1\}, \quad A_2 = \{c \in R : c \in \mathfrak{A}_2\},$$

trzeba przyjąć

$$A_1 = \{q \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in \mathfrak{A}_1[\alpha = q^*]\}, \quad A_2 = \{q \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in \mathfrak{A}_2[\alpha = q^*]\}$$

i pokazać, że para $(A_1, A_2)$ jest przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}, <)$. To zaś można otrzymać wykazując izomorficzność struktur porządkowych $(\mathbb{Q}, <)$ oraz $(\{q^* : q \in \mathbb{Q}\}, <)$, mianowicie:

$$p^* < q^* \leftrightarrow p < q.$$

Zauważmy, że przyjmując opisaną wyżej teoriomnogościową rekonstrukcję, mimo izomorficzności struktur porządkowych $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\{q^* : q \in \mathbb{Q}\}, <)$ można wskazać własność matematyczną, która je odróżnia: zbiór $\{q^* : q \in \mathbb{Q}\}$ jest gęsty w $(\mathcal{P}, <)$, natomiast zbiór $\mathbb{Q}$ nie jest gęsty w $(\mathcal{P}, <)$, bo w ogóle nie jest zawarty w $\mathcal{P}$.

14.3. W XX-wiecznej literaturze Dedekinda konstrukcję liczb rzeczywistych jako wstęp do wykładu analizy matematycznej powtarzają, m.in. G.M.

[108] Zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 14.

Fichtenholtz, G. Kowalewski, Franciszek Leja, Witold Pogorzelski.[109] Wszyscy ci autorzy, podobnie jak Dedekind, nie odróżniają liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ i odpowiadających im przekrojów zbioru $(\mathbb{Q}, <)$, ale tylko Fichtenholtz, tak jak Dedekind, czyni to zupełnie świadomie: odróżnia przekrój od liczby niewymiernej $\alpha$ i przyjmuje, że „przekrój określa liczbę niewymierną $\alpha$", albo że liczba niewymierna $\alpha$ jest „związana" z przekrojem, i odpowiednio pisze: „dla jednolitości często będziemy to czynili także mówiąc o liczbach wymiernych $r$".[110]

**15.** Co to jest ciągłość? Dedekind pisze, że „dziedzina $\mathfrak{R}$" obok uporządkowania liniowego i gęstości „posiada jeszcze ciągłość" – „tę samą ciągłość, która przysługuje prostej"; jest też przekonany, że ciągłość linii prostej bada „czysto arytmetycznie".

Rozumowanie kulminujące zasadą ciągłości rozpoczyna opis związku między linią prostą i liczbami wymiernymi, a kluczową rolę odgrywają w nim pojęcia porządku i przekroju. Otóż tak punkty prostej, jak i liczby wymierne są uporządkowane liniowo i w sposób gęsty. Ponadto tak jak „na prostej znajduje się nieskończenie wiele punktów, które nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej", tak i na osi $(\mathbb{Q}, <)$ „istnieje nieskończenie wiele przekrojów, które nie są wyznaczone przez liczby wymierne". Uzasadniając to Dedekind przywołuje z jednej strony geometryczne twierdzenia *Elementów*, a z drugiej przedstawia „czysto arytmetyczny" dowód, bo przekroje osi $(\mathbb{Q}, <)$ wyznaczające luki są definiowane za pomocą mnożenia w ciele liczb wymiernych.

Matematyka współczesna adaptowała te pomysły Dedekinda, w których wykorzystana jest struktura algebraiczna liczb wymiernych, tj. wszystko to, co znajdujemy w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* poczynając od §4. Rozwiązania odsyłające do matematyki greckiej, rozumowania z §3 mówiące o linii prostej są dzisiaj prawie niedostępne niczym kody źródłowe, gdyż opierają się na zapomnianej już teorii proporcji z Księgi V *Elementów*.

15.1. Przejdźmy do pytania o „istotę ciągłości". Formułując zasadę ciągłości Dedekind wyraźnie ma na uwadze dwa rodzaje przekrojów osi $(\mathbb{Q}, <)$ i związane z tym szczególne rozumienie nieciągłości: nieciągłość polega na tym, że istnieją przekroje wyznaczające luki. Odpowiednio porządek jest ciągły, gdy nie ma przekrojów tego typu. Ale nawet gdy zaakceptujemy Dedekinda rozumienie nieciągłości, to i tak nie możemy przyjąć, że „istota ciągłości leży w odwróceniu" tej zasady, że „istota ciągłości" polega na tym, by każdemu przekrojowi odpowiadał dokładnie jeden punkt.

[109] Zob. [Fichtenholtz 1985], [Leja 1979], [Kowalewski 1923], [Pogorzelski 1951].
[110] Zob. [Fichtenholtz 1985], s. 12.

Zasada ciągłości nie jest „istotą" ciągłości, bo nie jest kategoryczną charakterystyką zbioru liniowo uporządkowanego. Przyjmując, że oś liczb rzeczywistych jest wzorcem zbioru uporządkowanego w sposób ciągły za „istotę" ciągłości uznajemy koniunkcję dwóch warunków: ciągłości w sensie Dedekinda i ośrodkowości. Fakt ten już w roku 1895 ustalił Georg Cantor.[111] Natomiast w roku 1905 Edward Huntington i Oswald Veblen pokazali, że ośrodkowość i ciągłość w sensie Dedekinda są *własności niezależnymi*.[112]

Wskazane twierdzenia znane są więc od dawna, mimo to spotykamy jeszcze filozofów skłonnych powtarzać za Dedekindem, że zasada ciągłości ujmuje jej „istotę" i charakteryzuje porządek liczb rzeczywistych. Czytamy na przykład:

„Posiadanie najmniejszego górnego ograniczenia przez każdą klasę liczb rzeczywistych mających górne ograniczenie jest podstawową formalną różnicą, jaka zachodzi między liczbami rzeczywistymi a ilorazami [tj. liczbami wymiernymi – P.B.]. W tym właśnie sensie mówi się, że ciąg liczb rzeczywistych jest *ciągły*, podczas gdy ciąg ilorazów nie jest ciągły. Z drugiej strony oba ciągi są *gęste* w tym sensie, że między dwoma liczbami znajdzie się jeszcze trzecia".[113]

Lecz, po pierwsze, ciągłość liczb rzeczywistych nie jest cechą relatywną: struktura $(\mathbb{R}, <)$ jest charakteryzowana nie w porównaniu z $(\mathbb{Q}, <)$, a tylko jako zbiór liniowo uporządkowany. Po drugie, ciągłość „ciągu liczb rzeczywistych" nie sprowadza się do własności (DC), bo nie charakteryzuje ona zbioru uporządkowanego z dokładnością do izomorfizmu.[114]

15.2. Drugie typowe nieporozumienie dotyczące „istoty ciągłości" pochodzi stąd, że w *Stetigkeit* ciągłość jest własnością porządku, natomiast w dzisiejszej matematyce ciągłość liczb rzeczywistych jest rozumiana jako własność albo samej struktury porządkowej $(\mathbb{R}, <)$, albo ciała uporządkowanego $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$.[115] Aby uzyskać jednoznaczną charakterystykę ciała uporządkowanego $\mathfrak{F} = (F, +, \cdot, 0, 1, <)$ wystarczy przyjąć, że żaden przekrój zbioru $(F, <)$ nie wyznacza luki, a zatem nawet *mniej* niż własność (DC).

[111] Zob. [Cantor 1895]; zob. także wyżej pkt. 5.

[112] Zob. [Huntington 1905], [Veblen 1905].

[113] [Quine 1974], s. 266.

[114] Zob. wyżej pkt. 4–5.

[115] Zob. np. „Kontynuując wysiłki Weierstrassa, kolejną próbę sformułowania rygorystycznej definicji ciągłości oraz liczb rzeczywistych podjął Richard Dedekind (1831–1916). Dedekind skupił się na pytaniu: co dokładnie odróżnia dziedziny ciągłe od nieciągłych?" [Bell 2005], s. 149; „Obiektem matematycznym motywującym pojęcie spójności jest zbudowana przez Dedekinda prosta rzeczywista. Podstawową strukturą prostej rzeczywistej jest jej uporządkowanie" [Mioduszewski 2003], s. 9.

Jest tak, bo, po pierwsze, porządek każdego ciała uporządkowanego jest gęsty,[116] a po drugie, gdy w ciele uporządkowanym $\mathfrak{F}$ żaden przekrój zbioru $(F, <)$ nie wyznacza luki, to ciało $\mathfrak{F}$ jest archimedesowe, a wtedy zbiór ułamków $F_Q$ ciała $\mathfrak{F}$ jest gęsty w zbiorze $(F, <)$.[117]

15.3. Błąd związany z nieodróżnieniem struktury porządkowej i struktury ciała uporządkowanego zilustrujemy na przykładzie artykułu Stewarta Shapiro *Frege meets Dedekind: A Neologicist Treatment of Real Analysis*.[118] Czytamy tam:

„Sądzę, że istotną własnością liczb rzeczywistych jest ciągłość, dlatego neologistyczna charakterystyka [liczb rzeczywistych – P.B] powinna zawierać tę własność. Niniejsze opracowanie [...] czyni zadość temu warunkowi. I to jest chyba najważniejszy punkt, w którym jesteśmy dłużnikami Dedekinda, który pokazał nam, jedynie za pomocą środków logicznych, czym jest ciągłość".[119]

W artykule tym liczby rzeczywiste są rozumiane jako ciało uporządkowane, a ciągłość to zasada supremum („zasada zupełności"). Nic nie jest natomiast powiedziane ani o gęstości, ani o ośrodkowości. Nie jest to oczywiście błąd, bo można uznać, że tekst jest kierowany do czytelnika znającego te kwestie. Ale jeden moment zdradza, że Shapiro nie panuje nad referowanym materiałem. Otóż omawiając działania na liczbach rzeczywistych, w związku z definicją mnożenia cytowany jest następujący fragment *Stetigkeit und irrationale Zahlen*:

„Podobnie jak dodawanie dają się też zdefiniować pozostałe operacje tzw. arytmetyki elementarnej, mianowicie tworzenie różnicy, iloczynu, ilorazu, potęgi, pierwiastka, logarytmu i w ten sposób udaje się uzyskać prawdziwe dowody twierdzeń ... które, o ile mi wiadomo, nigdy dotąd nie zostały udowodnione. Rozwlekłość, której należy się obawiać przy definiowaniu bardziej skomplikowanych operacji, ma swoje źródło częściowo w naturze przedmiotu, jednakże w dużej części da się jej uniknąć".[120]

A powyższy passus jest tak komentowany:

„Dedekind, poza kilkoma uwagami o ciągłości, nie przedstawił jednak żadnych szczegółów, jak uniknąć owej 'rozwlekłości' ".[121]

[116] Jeżeli $x, y \in F$ i $x < y$, to $x < \frac{x+y}{2} < y$.
[117] Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 1–2.
[118] Zob. [Shapiro 2000(b)].
[119] [Shapiro 2000(b)], s. 361.
[120] Zob. [Shapiro 2000(b)], s. 341 oraz [Dedekind 1872], s. 147.
[121] [Shapiro 2000(b)], s. 341.

Dalej pada sugestia, że owa 'rozwlekłość' wynika stąd, iż definiując mnożenie trzeba rozpatrzyć przypadki liczb różnych znaków. Uwagi Dedekinda wskazują jednak na coś innego. Po zdaniach przytoczonych przez Shapiro Dedekind definiuje przedział i pisze:

„Wydaje się, że jeszcze większe rozwlekłości powinny się pojawić, gdy przejdzie się do tego, by liczne twierdzenia arytmetyki liczb wymiernych (jak np. twierdzenie $(a+b)c = ac+bc$) przenieść na dowolne liczby rzeczywiste".[122]

Zarysowane dalej rozwiązanie polega na wykorzystaniu ośrodkowości przestrzeni liczb rzeczywistych i jest obecnie standardowym zabiegiem analizy matematycznej.[123]

Znamienne, że omawiając arytmetykę liczb rzeczywistych Shapiro poprzestaje na zdefiniowaniu dodawania i mnożenia, a działania te można owszem zdefiniować przez proste odniesie do struktury algebraicznej liczb wymiernych. Definiując pierwiastek, potęgowanie, czy logarytm trzeba już przywołać gęstość liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych.

Quine, podobnie jak Shapiro, nie zauważa ośrodkowości, a w związku z definicją operacji innych niż dodawanie oraz mnożenie pisze:

„Definicja potęgi [...] liczb rzeczywistych zostanie w tym szkicu pominięta".[124]

Następnie:

„Pojęcie pierwiastka jest takim samym odwróceniem potęgi, jak dzielenie jest przeciwieństwem mnożenia; można je ekwiwalentnie zdefiniować za pomocą dzielenia i potęgowania".[125]

Kolejność jest tu jednak inna: najpierw trzeba zdefiniować pierwiastek $m$-tego stopnia z liczby rzeczywistej, $\sqrt[m]{\alpha}$, później potęgę o wykładniku wymiernym $\alpha^{\frac{n}{m}}$, a wreszcie potęgę o wykładniku niewymiernym $\alpha^r$.[126] Gdyby Quine podjął się zdefiniować potęgę, to musiałby zauważyć i tę kolejność, i ośrodkowość liczb rzeczywistych, a wówczas by przyznał, że nie tylko (DC), ale i ośrodkowość charakteryzuje porządek liczb rzeczywistych.

Niżej, referując kolejny paragraf *Stetigkeit* omówimy definicje działań.

---

[122] [Dedekind 1872], s. 147.

[123] Zob. niżej pkt. 16.5.

[124] [Quine 1974], s. 268.

[125] [Quine 1974], s. 269.

[126] Gdy zdefiniowana jest funkcja $a^r$, można zdefiniować pierwiastek $r$-tego stopnia $\sqrt[r]{a}$. To prawdopodobnie miał na uwadze Quine pisząc, że „pojęcie pierwiastka jest odwróceniem potęgi".

**16.** Szósty paragraf rozprawy jest zatytułowany *Działania na liczbach rzeczywistych*. Czytamy:

„Aby jakiekolwiek działania na dwóch liczbach rzeczywistych $\alpha$, $\beta$ sprowadzić do działań na liczbach wymiernych, trzeba za pomocą przekrojów $(A_1, A_2)$ i $(B_1, B_2)$, które wyznaczone są przez liczby $\alpha$, $\beta$ w systemie $R$, wydefiniować przekrój $(C_1, C_2)$, który odpowiadać ma wynikowi działania $\gamma$. Ograniczę się tu do najprostszego przykładu – dodawania".[127]

Co to są „jakiekolwiek działania na dwóch liczbach rzeczywistych"? Odpowiedź znajdujemy dwa akapity dalej: „tworzenie różnicy, iloczynu, ilorazu, potęgi, pierwiastka, logarytmu".[128]

Czy w każdym z tych przypadków wynik działania na liczbach rzeczywistych $\alpha$, $\beta$ można „sprowadzić do działań na liczbach wymiernych"? Odczytując *Stetigkeit und irrationale Zahlen* literalnie bynajmniej nie jest to powiedziane. Gdybyśmy jednak chcieli podążać tym tropem, to podstawowa trudność polega na interpretacji owego „sprowadzić". Powiedzmy, że zdefiniowaliśmy przekrój $(C_1, C_2)$, który „wyznacza" potęgę $\alpha^\beta$, ale by wykazać, że $(C_1, C_2)$ jest przekrojem, a następnie, że zachodzi prawo $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ przywołujemy gęstość liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych. Czy w takim przypadku potęgowanie liczb rzeczywistych zostało „sprowadzone do działań na liczbach wymiernych"?

16.1. Dedekind pokazał, jak dodawanie liczb rzeczywistych można „sprowadzić do działań na liczbach wymiernych". Definicja zbiorów $C_1$, $C_2$ podana w *Stetigkeit* jest następująca:

$$C_1 = \{c_1 \in R : \exists a_1 \in A_1 \exists b_1 \in B_1 [a_1 + b_1 \geqslant c_1]\}, \qquad C_2 = R \backslash C_1.$$

Dedekind dowodzi, że para $(C_1, C_2)$ istotnie jest przekrojem, a gdy obie liczby $\alpha$, $\beta$ są wymierne, to zachodzi

$$\forall c_1 \in C_1 \forall c_2 \in C_2 [c_1 \leqslant \alpha + \beta \leqslant c_2].$$

„Zatem w tym przypadku przekrój $(C_1, C_2)$ będzie wyznaczony przez sumę $\alpha + \beta$".[129]

Przy założeniu, że nie odróżnia się liczb wymiernych $R$ i odpowiadających im przekrojów, zdefiniowane dodawanie zacieśnione do zbioru liczb wymiernych pokrywa się z dodawaniem w ciele liczb wymiernych.

[127] [Dedekind 1872], s. 146.
[128] [Dedekind 1872], s. 147.
[129] [Dedekind 1872], s. 147.

„Nie będziemy zatem w sprzeczności z definicją obowiązującą w arytmetyce liczb wymiernych, kiedy we wszystkich przypadkach pod sumą $\alpha + \beta$ dwu liczb rzeczywistych $\alpha$, $\beta$ będziemy rozumieć tę liczbę $\gamma$, przez którą wyznaczony jest przekrój $(C_1, C_2)$".[130]

Dalej czytamy:

„Podobnie jak dodawanie dają się też zdefiniować pozostałe operacje tzw. arytmetyki elementarnej, mianowicie tworzenie różnicy, iloczynu, ilorazu, potęgi, pierwiastka, logarytmu i w ten sposób udaje się uzyskać prawdziwe dowody twierdzeń (jak np. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), które, o ile mi wiadomo, nigdy dotąd nie zostały udowodnione".[131]

16.2. „Podobnie jak dodawanie". Jeżeli podobieństwo ma polegać na tym, żeby „za pomocą przekrojów $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$ wydefiniować przekrój $(C_1, C_2)$", to mnożenie (dodatnich) liczb rzeczywistych $\alpha$, $\beta$ można tak określić:

$$C_1 = \{c_1 \in R : \exists a_1 \in A_1 \exists b_1 \in B_1 [a_1 \cdot b_1 \geqslant c_1]\}, \qquad C_2 = R \backslash C_1.$$

Można pokazać, że zdefiniowane działanie zawężone do zbioru liczb wymiernych sprowadza się do mnożenia w ciele liczb wymiernych.

Tak samo można zdefiniować odejmowanie i dzielenie liczb rzeczywistych oraz pokazać, że odejmowanie i dzielenie zawężone do zbioru liczb wymiernych sprowadzają się do odejmowania i dzielenia w ciele liczb wymiernych.

Poprzestając na definicjach działań nie zauważymy tej specyficznej własności liczb rzeczywistych jaką jest ośrodkowość, a jest ona potrzeba do zdefiniowania pierwiastka, potęgi i logarytmu. Chyba to te funkcje miał na uwadze Dedekind pisząc o „bardziej skomplikowanych operacjach".

16.3. „Rozwlekłość, której należy się obawiać przy definiowaniu bardziej skomplikowanych operacji, ma swoje źródło częściowo w naturze przedmiotu, jednakże w dużej części da się jej uniknąć".[132]

Jak można uniknąć owej „rozwlekłości"? W odpowiedzi Dedekind definiuje przedział zbioru $(R, <)$ i zbioru $(\mathfrak{R}, <)$.

Najpierw definiowany jest przedział liczb wymiernych, tj.

[130] [Dedekind 1872], s. 147.
[131] [Dedekind 1872], s. 147.
[132] [Dedekind 1872], s. 147.

„pewien system liczb wymiernych $A$, który posiada następującą charakterystyczną własność: jeżeli $a$ i $a'$ są liczbami z tego systemu, to należą doń też wszystkie liczby wymierne leżące między $a$ i $a'$";[133]

symbolicznie:

$$\forall p, q \in A \forall r \in R[p < r < q \rightarrow r \in A].$$

„System $R$ wszystkich liczb wymiernych, jak również obydwie klasy dowolnego przekroju są przedziałami".[134]

Gdy dany jest przedział liczb wymiernych $A$, to definiowany jest przedział liczb rzeczywistych. Jeśli $A$ jest ograniczony z góry, i z dołu, to

„cała dziedzina $R$ rozpada się na trzy części $A_1$, $A$, $A_2$ i pojawiają się dwie w pełni określone liczby wymierne lub niewymierne $\alpha_1$, $\alpha_2$, takie, że mogą one być nazwane odpowiednio górną lub dolną (czy najmniejszą i największą) granicą przedziału $A$".[135]

Przekrój $(A_1, A \cup A_2)$ wyznacza liczbę $\alpha_1$, przekrój $(A_1 \cup A, A_2)$ – liczbę $\alpha_2$. I wreszcie ostateczna definicja:

„O każdej liczbie, wymiernej lub niewymiernej $\alpha$, która leży między $\alpha_1$ i $\alpha_2$, można powiedzieć, że leży ona wewnątrz przedziału $A$".[136]

16.4. Uzbrojony w te ustalenia Dedekind wraca do kwestii „rozwlekłości". Czytamy:

„Wydaje się, że jeszcze większe rozwlekłości powinny się pojawić, gdy przejdzie się do tego, by liczne twierdzenia arytmetyki liczb wymiernych (jak np. twierdzenie $(a + b)c = ac + bc$) przenieść na dowolne liczby rzeczywiste. Tak jednak nie jest; przekonujemy się bowiem, że wszystko sprowadza się tu do udowodnienia, że same operacje arytmetyczne posiadają pewną ciągłość. Wyjaśnię co mam tu na myśli w postaci następującego twierdzenia ogólnego".[137]

Następne zdania należy rozumieć jako definicję ciągłości operacji:

„Jeżeli liczba $\lambda$ jest wynikiem pewnego rachunku wykonywanego na liczbach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... oraz $\lambda$ leży wewnątrz przedziału $L$, to można podać przedziały

[133] [Dedekind 1872], s. 147.
[134] [Dedekind 1872], s. 147.
[135] [Dedekind 1872], s. 147.
[136] [Dedekind 1872], s. 147.
[137] [Dedekind 1872], s. 147.

$A$, $B$, $C$, ..., wewnątrz których leżą liczby $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i będące tego rodzaju, że wynik tego samego rachunku, ale wykonywanego nie na $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., a na dowolnych liczbach przedziałów $A$, $B$, $C$, ... będzie za każdym razem liczbą leżącą wewnątrz przedziału $L$".[138]

Mamy tu zatem tak zwaną otoczeniową definicję ciągłości funkcji określonej na zbiorze liniowo uporządkowanym. Czy odnosi się ona tylko do działań na liczbach rzeczywistych?

Wcześniej zdefiniowano pojęcie przedziału liczb wymiernych, a przez funkcje rozumie się m.in. działania arytmetyczne, można zatem wnosić, że ciągłość funkcji, np. dodawania, bynajmniej nie jest związana z ciągłością dziedziny. Na podstawie powyższych definicji można na przykład pokazać, że działania arytmetyczne w ciele liczb wymiernych są ciągłe. Dlatego przyjmujemy, że w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* obok ciągłości porządku zbioru liniowo uporządkowanego znajduje się też definicja ciągłości funkcji określonej na zbiorze liniowo uporządkowanym.

16.5. W zakończeniu omawianego paragrafu czytamy:

„Ogromna rozwlekłość wysłowienia tego twierdzenia [tj. definicji ciągłości funkcji – P.B.], sugeruje, że trzeba dokonać pewnych zmian językowych; istotnie, da się to zrobić w sposób doskonały wprowadzając pojęcie wielkości zmiennej, funkcji, granicy; najbardziej celowe będzie też oprzeć na tych pojęciach już definicje najprostszych operacji arytmetycznych, czego tu jednakże dalej rozwijać nie możemy".[139]

Naszkicowany tu pomysł rozszerzenia operacji algebraicznych za pomocą pojęcia granicy został w matematyce zrealizowany.[140] Nie będziemy opisywać związanej z tym konstrukcji, bo zbyt daleko by nas to odwiodło od samej rozprawy. Zwrócimy natomiast uwagę tylko na jedną kwestię.

Jak można wykazać prawo rozdzielności mnożenia liczb rzeczywistych względem dodawania? Zdaniem Dedekinda można tego dokonać pokazując, że „same operacje arytmetyczne posiadają pewną ciągłość". O co tu chodzi?

Postępowanie to zilustrujemy na przykładzie prawa rozdzielności mnożenia względem dodawanie, a przy tym posłużymy się pojęciem granicy.

Przyjmijmy jako dane ciągłość dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych oraz to, że każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych. Zakładając – tak, jak to jest u Dedekinda – że $R \subset \mathfrak{R}$ oraz roz-

[138] [Dedekind 1872], s. 147–148.

[139] [Dedekind 1872], s. 147-148.

[140] Zob. [Brokwin 1978], rozdz. IV, §2, tw. 4; zob. też rozdz. *Archimedes. Archimedes*, pkt. 13.

dzielność mnożenie liczb wymiernych względem dodawania, otrzymujemy – przy jeszcze jednym założeniu, o którym niżej – rozdzielność mnożenia liczb rzeczywistych względem dodawania:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot (b_n + c_n)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n + a_n \cdot c_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) + \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma,$$

gdzie $(a_n), (b_n), (c_n) \subset R$, $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$, $\gamma = \lim_{n\to\infty} c_n$.

Tym kolejnym założeniem jest gęstość liczb wymiernym w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zapewne takie właśnie rozumowanie miał na uwadze Dedekind, gdy szkicował *krótki* dowód prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania liczb rzeczywistych.

16.6. Wróćmy do kwestii definicji operacji pierwiastka, potęgi i logarytmu. W związku z tym Dedekind pisze, że „przydatne okazuje się pojęcie przedziału", a dalej „granicy górnej lub dolnej przedziału".

Istnienie supremum zbioru ograniczonego zostanie wykazane dopiero w kolejnym paragrafie i być może dlatego myśl o tym, jak uniknąć „rozwlekłości" przy „definiowaniu bardziej skomplikowanych operacji" urywa się i Dedekind przechodzi do tego, co już wyżej omówiliśmy: jak za pomocą ciągłości dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych udowodnić prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania. W rezultacie potęga, pierwiastek i logarytm nie zostały w *Stetigkeit* zdefiniowane. Niżej pokażemy, jak można to uzupełnić. W tym celu zreferujemy odpowiednie fragmenty książki G.M. Fichtenholtza *Rachunek różniczkowy i całkowy*.[141]

*Rachunek różniczkowy i całkowy* to tradycyjny wykład analizy matematycznej. We *Wstępie* autor konstruuje liczby rzeczywiste metodą przekrojów Dedekinda. Podobieństwo do wykładu samego Dedekinda jest daleko idące. Fichtenholtz, tak jak Dedekind, nie konstruuje liczb wymiernych, ale definiuje je jako ciało uporządkowane, archimedesowe, a *implicite* przyjmuje, że liczby całkowite dodatnie spełniają aksjomat indukcji; podobnie jak Dedekind, nie odróżnia liczb wymiernych od odpowiadających im przekrojów i jest to zabieg najzupełniej świadomy, a wreszcie, podobnie jak Dedekind, wykazuje gęstość liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych.

W odróżnieniu od Dedekinda, Fichtenholtz nie przywiązuje wagi do tego, aby działania na liczbach rzeczywistych sprowadzać do działań na liczbach wymiernych. Działania są definiowane po twierdzeniu o ciągłości liczb rzeczywistych i już w definicji dodawania wykorzystana jest zasada supremum.

[141] Zob. [Fichtenholtz 1985], *Wstęp*.

Wprowadzając te „bardziej skomplikowane" operacje Fichtenholtz korzysta nie tylko z zasady supremum, ale i z ośrodkowości.

Przyjmując oznaczenia z rozprawy Dedekinda pokażemy, jak Fichtenholtz definiuje pierwiastek, potęgę i logarytm.

16.7. Niech liczby rzeczywiste $\alpha$, $\beta$ będą wyznaczone przez przekroje $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$ zbioru liczb wymiernych $(R, <)$.

Pierwiastek $\xi = \sqrt[m]{\alpha}$, gdzie $\alpha > 0$, jest definiowany jako przekrój $(C_1, C_2)$ zbioru $(R, <)$ w następujący sposób:

$$C_1 = R_- \cup \{0\} \cup \{c_1 \in R_+ : c_1^m < \alpha\}, \qquad C_2 = \{c_2 \in R_+ : c_2^m \geqslant \alpha\}.^{142}$$

Dowodząc, że liczba $\xi$ spełnia równanie $\xi^m = \alpha$, Fichtenholtz korzysta z gęstości liczb wymiernych $R$ w uporządkowanym zbiorze liczb rzeczywistych $(\mathfrak{R}, <)$. Następnie pisze:

„Skoro udowodniono istnienie pierwiastka, w zwykły sposób ustala się pojęcie potęgi o dowolnym wykładniku wymiernym $r$".[143]

W „zwykły sposób", czyli za pomocą mnożenia liczb rzeczywistych: $\alpha^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{\alpha})^n$.[144]

Potęgę liczby rzeczywistej $\alpha > 1$ o dowolnym rzeczywistym wykładniku $\beta$ Fichtenholtz definiuje jako przekrój zbioru $(\mathfrak{R}, <)$, a dokładniej za pomocą operacji supremum:

$$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^b : b \in R,\ b \leqslant \beta\}.$$

„Jeżeli $\beta$ jest wymierne, to podana wyżej definicja sprowadza się do zwykłego rozumienia liczby $\alpha^\beta$".[145]

I dalej:

„Łatwo sprawdzić, że dla potęg o dowolnym wykładniku rzeczywistym zachowują się wszystkie reguły działań na potęgach".[146]

Następnie pokazuje, że zachodzi prawo:

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma},$$

[142] Zauważmy, że definicja zbiorów $C_2$, $C_2$ nie „sprowadza się do działań na liczbach wymiernych", bo warunek „$c_1^m > \alpha$" jest relacją w ciele uporządkowanym liczb rzeczywistych.

[143] [Fichtenholtz 1985], s. 27.

[144] Przy okazji pokazuje się, że dowolną liczbę wymierną $r$ Fichtenholtz przedstawia w postaci $\frac{n}{m}$.

[145] [Fichtenholtz 1985], s. 29.

[146] [Fichtenholtz 1985], s. 29.

a w dowodzie korzysta z gęstości R w $(\mathfrak{R}, <)$.

Logarytm o podstawie $\alpha > 1$ z liczby $\beta > 0$, $\log_\alpha \beta = \gamma$, jest definiowany jako przekrój $(C_1, C_2)$ zbioru $(R, <)$:

$$C_1 = \{c_1 \in R : \alpha^{c_1} < \beta\}, \qquad C_2 = \{c_2 \in R : \alpha^{c_2} \geqslant \beta\}.$$

W tym przypadku, aby wykazać, że para $(C_1, C_2)$ jest przekrojem, Fichtenholtz korzysta z ośrodkowości liczb rzeczywistych.

**17.** Ostatni paragraf *Stetigkeit und irrationale Zahlen* jest zatytułowany *Analiza infinitezymalna*. Dedekind wraca tu do punktu wyjścia:

„Na zakończenie powinniśmy jeszcze wyjaśnić związek, jaki zachodzi między naszymi dotychczasowymi rozważaniami a pewnymi podstawowymi twierdzeniami analizy infinitezymalnej".[147]

Te podstawowe twierdzenia to:

(1) „Jeżeli wielkość $x$ rośnie stale, ale nie ponad wszelką granicę, to wielkość ta zbliża się do pewnej granicy",[148]

(2) „Jeżeli przy procesie zmieniania się wielkości $x$, do każdej liczby dodatniej $\delta$ można dobrać odpowiednie miejsce, od którego począwszy $x$ zmienia się mniej niż o $\delta$, to wówczas $x$ zbliża się do pewnej wartości granicznej".[149]

W obydwu przypadkach interpretacji wymaga pojęcie „wielkość zmienna $x$". W *Stetigkeit* jest ono tak definiowane:

„Mówimy, że wielkość zmienna $x$, przebiegająca kolejne wartości liczbowe, zbliża się do pewnej stałej granicy $\alpha$, jeśli w ciągu tego procesu $x$ znajdzie się ostatecznie pomiędzy każdymi dwoma liczbami, pomiędzy którymi leży również $\alpha$ lub, co na jedno wychodzi, jeżeli różnica $x - \alpha$ staje się co do wartości bezwzględnej ostatecznie mniejsza od każdej liczby danej różnej od zera".[150]

W zależności od przyjętej interpretacji zwrotu „wielkość zmienna $x$", odpowiednio należy też zinterpretować zwrot „zbliża się do pewnej stałej granicy $\alpha$".

„Wielkość zmienna $x$" może być rozumiana albo jako ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)$, albo po prostu jako podzbiór liczb rzeczywistych $X \subset \mathfrak{R}$.

[147] [Dedekind 1872], s. 148.
[148] [Dedekind 1872], s. 148.
[149] [Dedekind 1872], s. 148.
[150] [Dedekind 1872], s. 148.

W pierwszym przypadku zwrot „wielkość zmienna $x$ zbliża się do pewnej stałej granicy $\alpha$" będzie interpretowany jako $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$. W drugim – może być interpretowany jeszcze na trzy różne sposoby: kres zbioru, tj. $\alpha = \sup X$, pochodna zbioru, tj. $\alpha \in X^d$, domknięcie zbioru, tj. $\alpha \in \overline{X}$.

Sens twierdzeń (1), (2) jest następujący: podać taką charakterystykę „wielkości zmiennej $x$", z której wynika istnienie pewnej „wielkości granicznej" $\alpha$.

17.1. Gdy zwrot „wielkość zmienna $x$" jest interpretowany jako „podzbiór $X \subset \mathfrak{R}$", to twierdzenie (1) przyjmuje postać:

(1a) Jeżeli podzbiór $X \subset \mathfrak{R}$ jest ograniczony z góry, to w $\mathfrak{R}$ istnieje kres górny zbioru $X$.

Jest to więc zasada supremum, krótko (ZS). W *Stetigkeit* podany jest następujący dowód implikacji $(DC) \to (ZS)$.

Niech $X \subset \mathfrak{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z góry. Definiowana jest para zbiorów $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$:

„istnieje jedna, a w konsekwencji nieskończenie wiele liczb $\alpha_2$ tego rodzaju, że zawsze zachodzi $x < \alpha_2$; układ wszystkich takich liczb $\alpha_2$ oznaczę przez $\mathfrak{A}_2$, a przez $\mathfrak{A}_1$ układ wszystkich pozostałych liczb $\alpha_1$; każda z liczb $\alpha_1$ ma tę własność, że w ciągu tego procesu ostatecznie będzie $x \geqslant \alpha_1$",[151]

czyli

$$\mathfrak{A}_1 = \{\alpha_1 \in \mathfrak{R} : \exists x \in X[x \geqslant \alpha_1]\}, \quad \mathfrak{A}_2 = \{\alpha_2 \in \mathfrak{R} : \forall x \in X[x < \alpha_2]\}.$$[152]

Dedekind sprawdza, że para $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ jest przekrojem, a następnie pisze:

„w konsekwencji istnieje liczba $\alpha$, która jest albo największa w klasie $\mathfrak{A}_1$, albo najmniejsza w klasie $\mathfrak{A}_2$ (por. §5, IV)".[153]

Z założenia, że „wielkość $x$ rośnie stale", co rozumiemy w ten sposób: $\forall x \in X \exists y \in X[x < y]$, wynika, że $\alpha$ nie należy do klasy $\mathfrak{A}_1$, a więc $\alpha \in \mathfrak{A}_2$.

„Pierwszy przypadek nie może zajść, ponieważ $x$ stale rośnie, a zatem $\alpha$ jest najmniejszą liczbą w klasie $\mathfrak{A}_2$",[154]

a stąd wynika, że $\forall x \in X[x < \alpha]$.

[151] [Dedekind 1872], s. 148.
[152] W zapisie tym wyszliśmy od definicji zbioru $\mathfrak{A}_2$, bo jest ona jednoznaczna.
[153] [Dedekind 1872], s. 148.
[154] [Dedekind 1872], s. 148.

W kolejnych zdaniach Dedekind pokazuje, że $\alpha$ jest „wartością graniczną zmiennej $x$": dowolna liczba $\alpha_1$ mniejsza od $\alpha$ należy do klasy $\mathfrak{A}_1$, stąd dla pewnego $x_0 \in X$ jest $x_0 \geqslant \alpha_1$. W rezultacie: $\forall x \in X[x > x_0 \to x > \alpha_1]$. Zatem:

„Jakąkolwiek liczbę $\alpha_1$ wzięłoby się teraz, zawsze będzie ostatecznie $\alpha_1 < x < \alpha$, tzn. $x$ zbliża się do wartości granicznej $\alpha$",[155]

co w naszej interpretacji oznacza $\alpha = \sup X$.[156]

W podsumowaniu tego wywodu znajdujemy:

„Twierdzenie to jest równoważne zasadzie ciągłości, tj. przestaje ono zachodzić, gdy tylko wyłączymy jedną liczbę z dziedziny $\mathfrak{R}$; albo mówiąc inaczej: jeżeli to twierdzenie zachodzi, to zachodzi też twierdzenie IV z §5 [tj. własność (DC) – P.B]".[157]

17.2. Gdy zwrot „wielkość zmienna $x$" jest interpretowany jako „ciąg $(x_n)$", wówczas twierdzenie (1) przyjmie postać:

(1b) Jeżeli ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)$ jest rosnący i ograniczony, to istnieje taka liczba rzeczywista $\alpha$, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Dowód tego twierdzenia jest parafrazą wyżej przedstawionego dowodu. Definiując zbiory

$$\mathfrak{A}_1 = \{\alpha_1 \in \mathfrak{R} : \exists n \in \mathbb{N}[x_n \geqslant \alpha_1]\}, \quad \mathfrak{A}_2 = \{\alpha_2 \in \mathfrak{R} : \forall n \in \mathbb{N}[x_n < \alpha_2]\},$$

można pokazać, że para $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ jest przekrojem zbioru liczb rzeczywistych $(\mathfrak{R}, <)$, a wyznaczona przezeń liczba $\alpha$ jest granicą ciągu $(x_n)$.

17.3. Przechodzimy do twierdzenia (2). Gdy zwrot „wielkość zmienna $x$" jest interpretowany jako „ciąg $(x_n)$", to twierdzenie (2) traktuje o zupełności w sensie Cauchy'ego:

$$(2a) \quad (\forall \delta \in \mathfrak{R}_+ \exists k \forall n > k[|x_k - x_n| < \delta]) \to (\exists \alpha \in \mathfrak{R}[\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha]);$$

zupełność w sensie Cauchy'ego będziemy dalej oznaczać skrótem (CC).

To, że ciąg $(x_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego jest interpretacją słów:

[155] [Dedekind 1872], s. 148.

[156] Dokładniej: jeżeli $\beta \in \mathfrak{A}_1 \to \neg\forall x \in X[x \leqslant \beta]$, jeżeli $\beta \in \mathfrak{A}_2 \to \alpha \leqslant \beta$.

[157] [Dedekind 1872], s. 148. Parafrazując słowa Dedekinda można powiedzieć, że twierdzenie to przestaje zachodzić także i wtedy, gdy *dołączymy* do $\mathbb{R}$ pewne liczby, np. w strukturze niestandardowych liczb rzeczywistych.

„Niech $\delta$ będzie dowolną wielkością dodatnią (tj. $\delta > 0$), na mocy założenia będzie więc istniała chwila, począwszy od której $x$ zmieniał się będzie mniej niż o $\delta$, tzn. jeżeli w tej chwili $x$ będzie miało wartość $a$, to następnie będzie stale $x > a - \delta$ i $x < a + \delta$".[158]

Gdy zwrot „wielkość zmienia $x$" oznacza ciąg $(x_n)$, to zwrot „jeżeli w tej chwili $x$ będzie miało wartość $a$, to następnie będzie stale $x > a - \delta$ i $x < a + \delta$" oznacza

$$\exists k \forall n > k[|x_k - x_n| < \delta], \qquad \text{gdzie } x_k = a.$$

O twierdzeniu (2) Dedekind pisze:

„To twierdzenie odwrotne do dającego się łatwo udowodnić twierdzenia głoszącego, iż każda wielkość zmienna, która zbliża się do pewnej granicy, zmienia się ostatecznie o mniej niż jakąkolwiek liczbę dodatnią",[159]

co w przyjętej interpretacji oznacza, że ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.

17.4. W *Stetigkeit* implikacja $(DC) \to (CC)$ jest tak dowodzona:

„Niech $\delta$ będzie dowolną wielkością dodatnią (tj. $\delta > 0$), na mocy założenia będzie więc istniała chwila, począwszy od której $x$ zmieniał się będzie mniej niż o $\delta$, tzn. jeżeli w tej chwili $x$ będzie miało wartość $a$, to następnie będzie stale $x > a - \delta$ i $x < a + \delta$".[160]

Co znaczy – w przyjętej interpretacji – że ciąg $(x_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego.

„Odrzućmy tymczasem założenie początkowe i zachowajmy jedynie fakt, że wszystkie późniejsze wartości zmiennej $x$ leżą pomiędzy danymi wartościami skończonymi".[161]

Zatem, gdy ustalone jest $\delta > 0$, to istnieje takie $k(\delta)$, że dla $n > k(\delta)$ zachodzi $|x_{k(\delta)} - x_n| < \delta$ i dalej rozważany jest nie cały ciąg $(x_n)$, ale prawie wszystkie wyrazy ciągu, czyli $\{x_n : n \geqslant k(\delta)\}$. Tak więc definicje, które niżej odtwarzamy powinny odnosić się do zbioru $\{x_n : n \geqslant k(\delta)\}$, lub inaczej: indeksy $n$, $j$, które wystąpią niżej spełniają warunek $j, n \geqslant k(\delta)$. Dla uproszczenia zapisów pominiemy to zastrzeżenie.

[158] [Dedekind 1872], s. 148–149.
[159] [Dedekind 1872], s. 148.
[160] [Dedekind 1872], s. 148–149.
[161] [Dedekind 1872], s. 148–149.

W kolejnym kroku Dedekind definiuje dwie pary zbiorów $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$:

„do systemu $\mathfrak{A}_2$ zaliczam liczbę $\alpha_2$ (np. $a+\delta$), gdy w ciągu danego procesu będzie ostatecznie $x \leqslant \alpha_2$; do systemu $\mathfrak{A}_1$ zaliczam każdą liczbę nie należącą do $\mathfrak{A}_2$; jeżeli $\alpha_1$ jest taką liczbą, to jakkolwiek daleko posuniemy się w przebiegu zmienności $x$, zawsze zdarzy się jeszcze nieskończenie wiele razy, że będzie $x > \alpha_1$”,[162]

czyli

$$\mathfrak{A}_1 = \{\alpha_1 \in \mathfrak{R} : \forall j \exists n > j[x_n > \alpha_1]\}, \quad \mathfrak{A}_2 = \{\alpha_2 \in \mathfrak{R} : \exists j \forall n > j[x_n \leqslant \alpha_2]\}.$$

„Ponieważ każda liczba $\alpha_1$ jest mniejsza od każdej liczby $\alpha_2$, zatem istnieje pewna w pełni określona liczba $\alpha$, która wyznacza przekrój $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ systemu $\mathfrak{R}$ i którą nazwiemy granicą górną zmiennej skończonej $x$”.[163]

Podobnie jest definiowana para $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$,

$$\mathfrak{B}_1 = \{\beta_1 \in \mathfrak{R} : \exists j \forall n > j[x_n \geqslant \beta_1]\}, \quad \mathfrak{B}_2 = \{\beta_2 \in \mathfrak{R} : \forall j \exists n > j[x_n < \beta_2]\}.$$

Liczbę $\beta$ wyznaczoną przez przekrój $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ Dedekind nazywa „granicą dolną zmiennej $x$”. Następnie czytamy:

„Obie liczby $\alpha$, $\beta$ są oczywiście scharakteryzowane przez następującą własność: jeżeli $\varepsilon$ jest dowolnie małą wielkością dodatnią, to ostatecznie zawsze będzie $x < \alpha + \varepsilon$ i $x > \beta - \varepsilon$, ale nigdy ostatecznie nie będzie $x < \alpha - \varepsilon$ czy $x > \beta + \varepsilon$”,[164]

co zapisujemy

$$\forall \varepsilon \in \mathfrak{R}_+ \exists j \forall n > j[x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap (\beta - \epsilon, \beta + \epsilon)].$$

Dalej czytamy:

„Możliwe są teraz dwa przypadki. Jeśli $\alpha$ i $\beta$ są różne, to koniecznie $\alpha > \beta$, ponieważ zawsze $\alpha_2 \geqslant \beta_1$; [...] a zatem pozostaje tylko drugi przypadek $\alpha = \beta$”.[165]

Tak więc, po pierwsze, ma być, że $\alpha \geqslant \beta$, ale to wykazane jest nader skrótowo.

[162] [Dedekind 1872], s. 149.
[163] [Dedekind 1872], s. 149.
[164] [Dedekind 1872], s. 149.
[165] [Dedekind 1872], s. 149. W polskim tłumaczeniu jest: „koniecznie $\alpha > \beta$, ponieważ zawsze $\alpha_2 \geqslant \beta$”.

Z przyjętych przez nas definicji istotnie wynika, że $\forall\alpha_2 \in \mathfrak{A}_2[\alpha_2 \geqslant \beta_1]$, a rozumując nie wprost, dowód własności $\neg(\alpha < \beta)$ można tak uzupełnić. Gdy $\alpha < \beta$, to dla pewnej liczby wymiernej $\beta_1$ zachodzi $\alpha < \beta_1 < \beta$. Z warunku $\alpha < \beta_1$ wynika istnienie takiej liczby wymiernej $\gamma$, że $\alpha < \gamma < \beta_1$. Z nierówności $\alpha < \gamma$ wnosimy, że $\gamma \in \mathfrak{A}_2$ i w rezultacie dochodzimy do sprzeczności:

$$(\forall\alpha_2 \in \mathfrak{A}_2[\alpha_2 \geqslant \beta_1]) \wedge \exists\alpha_2 \in \mathfrak{A}_2[\alpha_2 < \beta_1].$$

Po drugie, Dedekind pokazuje, że hipoteza $\alpha > \beta$ prowadzi do sprzeczności:

„zmienna $x$ oscyluje i jakkolwiek daleko posunie się proces zmienności $x$, zawsze istnieją zmiany przenoszące wartość $(\alpha - \beta) - 2\varepsilon$, gdzie $\varepsilon$ oznacza dowolnie małą wielkość dodatnią. Jednak początkowe założenie, do którego teraz powracam przeczy temu ostatniemu wnioskowi".[166]

O co tu chodzi? „Zmienna $x$ oscyluje" znaczy, że przy ustalonym $\delta$ prawie wszystkie wyrazy ciągu $(x_n)$ leżą w przedziale $(x_{k(\delta)} - \delta, x_{k(\delta)} + \delta)$. Przyjmijmy $\delta = (\alpha - \beta) - 2\varepsilon$, gdzie $\varepsilon$ spełnia warunek $(\alpha - \beta) - 2\varepsilon > 0$. „Wracając do początkowego założenia" dostajemy: dla $n > k(\delta)$ jest $|x_{k(\delta)} - x_n| < \delta$. Liczby $\delta$ i $\varepsilon$ są tak dobrane, że $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)\cap(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon) = \emptyset$. W rezultacie otrzymujemy sprzeczność z wyżej wykazaną zależnością:

$$\forall\varepsilon \in \mathfrak{R}_+\exists j\forall n > j[x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap (\beta - \epsilon, \beta + \epsilon)].$$

Skoro $\alpha \geqslant \beta$, a hipoteza $\alpha > \beta$ prowadzi do sprzeczności „zatem pozostaje tylko $\alpha = \beta$".[167]

Gdy $\alpha = \beta$, to zależność

$$\forall\varepsilon \in \mathfrak{R}_+\exists j\forall n > j[x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap (\beta - \epsilon, \beta + \epsilon)],$$

przyjmuje postać

$$\forall\varepsilon \in R_+\exists j\forall n > j[x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)],$$

„zatem $x$ zbliża się do wartości granicznej $\alpha$".[168]

17.5. W dowodzie Dedekinda istotą rolę odgrywa opozycja nieskończone-skończone. Nieskończony podzbiór ciągu $(x_n)$ jest opisywany zwrotami:

[166] [Dedekind 1872], s. 149.
[167] [Dedekind 1872], s. 149.
[168] [Dedekind 1872], s. 149.

„ostatecznie będzie" (prawie wszystkie wyrazy ciągu), „nieskończenie wiele razy będzie" (nieskończenie wiele wyrazów ciągu), „nigdy ostatecznie nie będzie" (zaprzeczenie „ostatecznie będzie").

Gdy zwrot „wielkość zmienna $x$" interpretujemy jako nieskończony i ograniczony podzbiór $X \subset \mathfrak{R}$, to otrzymamy twierdzenie Bolzano-Weierstrassa:

(2b) Nieskończony i ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych posiada punkt skupienia.

Przyjmijmy, że zbiór $X$ jest nieskończony wtedy, gdy dla pewnego podzbioru $Y \subset X$ zachodzi, że $Y$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$ ($Y \sim \mathbb{N}$).[169] Następnie zdefiniujmy zbiór:

$$\mathfrak{A}_1 = \{\alpha \in \mathfrak{R} : \{x \in X : \alpha < x\} \text{ jest nieskończony}\}.$$

Zbiór $\mathfrak{A}_1$ jest niepusty i ograniczony z góry. Można pokazać, że liczba $\sup \mathfrak{A}_1$ jest punktem skupienia zbioru $X$.

W tej interpretacji warunek „do każdej liczby dodatniej $\delta$ można dobrać odpowiednie miejsce, od którego począwszy $x$ zmienia się mniej niż o $\delta$" jest interpretowany jako ograniczoność zbioru $X$:

$$\exists\alpha \in \mathfrak{R}\forall x \in X[x > \alpha \to x < \alpha + \delta],$$

$$\exists\beta \in \mathfrak{R}\forall x \in X[x < \beta \to x > \beta - \delta].$$

17.6. Z dowodów twierdzeń (1), (2) wynika, że sens zwrotu „jest równoważne" ma znaczenie odmienne od tego, które jest dzisiaj powszechnie przyjmowane. Dedekind nie pokazuje, że przy ustalonych założeniach, na gruncie pewnej teorii zachodzi równoważność $(DC) \leftrightarrow (ZS)$, czy $(DC) \leftrightarrow (CC)$, ale to, że gdy skonstruowany zbiór liczb rzeczywistych $(\mathfrak{R}, <)$ ma własność (DC), wtedy posiada też własność $(ZS)$ oraz $(CC)$. W *Stetigkeit* liczby rzeczywiste są bowiem pojmowane jako szczególna konstrukcja, a nie jako ciało uporządkowane w sposób ciągły.

Warto też już w tym miejscu powiedzieć, że w ciele uporządkowanym $\mathfrak{F} = (F, +, \cdot, 0, 1, <)$ istotnie zachodzi równoważność $(DC) \leftrightarrow (ZS)$. Nie jest natomiast tak, że w dowolnym ciele uporządkowanym zachodzi implikacja $(CC) \to (DC)$: istnieją takie ciała uporządkowane $\mathfrak{F}$, w których jest $(CC) \wedge \neg(DC)$.[170]

[169] W matematyce znana jest też inna definicja – nieskończoności w sensie Dedekinda: zbiór $X$ jest nieskończony, gdy $\exists Y \subsetneq X[Y \sim X]$. Przy pewnych założeniach definicje te są równoważne; zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], rozdz. III, §4.

[170] Zob. rozdz. *Niestandardowe liczby rzeczywiste*, pkt. 8 oraz rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 8.

Ponadto warunek (CC) może być też zdefiniowany w dowolnej przestrzeni metrycznej. W zbiorze liczb niewymiernych z przedziału $[0, 1]$ definiowana jest taka metryka, że zachodzi twierdzenie (2), tym samym nie jest jednak tak, jak pisze Dedekind, że twierdzenie (2) „przestaje zachodzić, gdy tylko wyłączymy jedną liczbę z dziedziny $\mathfrak{R}$".[171]

17.7. Philip Kitcher w książce *The Nature of Mathematical Knowledge* komentując twierdzenia (1) i (2) z §7 *Stetigkeit* przyjmuje wersje (1b) i (2a) i nie zauważa, że są to tylko wybrane interpretacje; jednocześnie pisze:

„Historycznie, liczby rzeczywiste były wprowadzone geometrycznie bez jasnego sformułowania ich własności, stąd dowodząc twierdzenia analizy, a nie mając żadnych zasad arytmetycznych, matematycy musieli odwoływać się do przedstawień geometrycznych".[172]

Do owego „geometrycznego" rozumienia liczb rzeczywistych Kitcher zalicza warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu:

„istnienie granic, których nie umiał uzasadnić algebraicznie, było dlań [dla Cauchy'ego – P.B.] uzasadnione przez odwołanie się do geometrii".[173]

Jest to nader osobliwe rozumienie „geometryczności". Można owszem uznać, że Cauchy przyjmował warunek (CC), chociaż nie umiał wyjaśnić jego statusu. Gdy jednak założymy, że przez liczby rzeczywiste *implicite* rozumiał Cauchy ciało uporządkowane spełniające warunek (CC), to nie otrzymamy wniosku, że Cauchy i Dedekind rozwijali analizę matematyczną w tych samych, tj. izomorficznych, strukturach. Na *dictum* „historycznie, liczby rzeczywiste były wprowadzone geometrycznie" ostatecznie można odpowiedzieć pytaniem: liczby rzeczywiste, czyli co, jaka struktura „była wprowadzona geometrycznie"? Ciało uporządkowane, w którym spełniony jest warunek (CC), czy ciało uporządkowane, w którym spełniony jest warunek (DC)?

---

[171] Zob. rozdz. *Konstrukcja Cantora*, pkt. 15.

[172] [Kitcher 1984], s. 266. Odnotujmy też, że Robert Bunn w związku z twierdzeniem (1) przyjmuje interpretację (1b), natomiast twierdzeniu (2) nadaje zupełnie osobliwą postać, mianowicie: gdy $f$ jest funkcją rzeczywistą, to

$$\forall\delta > 0 \exists x_0 \forall x[x > x_0 \to |f(x) - f(x_0)| < \delta] \to \exists z \lim_{x\to+\infty} f(x) = z;$$

zob. [Bunn 2000], s. 223. Zatem pojęcie „wielkości zmiennej" zostało tu zinterpretowane jako wartość funkcji rzeczywistej. Podobnie jak Kitcher, także Bunn nie zdaje sobie sprawy z tego, że interpretuje tekst *Stetigkeit*.

[173] [Kitcher 1984], s. 262.

To samo odnosi się do następujących słów Quine'a:

„Dedekind zwrócił uwagę na fakt, że klasy tego typu [tj. przekroje zbioru $(\mathbb{Q}, <)$ – P.B.] stanowią model dla tradycyjnych liczb rzeczywistych (*Stetigkeit*)".[174]

Quine nie tylko nie charakteryzuje owych „tradycyjnych liczb rzeczywistych", ale – jak widzieliśmy wcześniej – niepoprawnie charakteryzuje *dzisiejsze* liczby rzeczywiste.[175]

17.8. *Stetigkeit und irrationale Zahlen* kończy zdanie:

„Niech przykłady te wystarczą do ukazania związku pomiędzy zasadą ciągłości a analizą infinitezymalną".[176]

**18.** Jaki jest matematyczny sens *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, lub inaczej: co pozostało z tej rozprawy w matematyce? (1) Metoda uzupełniania zbioru uporządkowanego liniowo do zbioru ciągłego w sensie Dedekinda.[177] (2) Konstrukcja nowych obiektów za pomocą przekroju.[178] (3) Aksjomat ciągłości, czy to jako aksjomat arytmetyki liczb rzeczywistych,[179] czy jako aksjomat geometrii.[180] (4) Definicja ciągłości funkcji. (5) Zasada supremum, jako sposób definiowania obiektów. (6) Konstrukcja obiektu, który nazywamy liczbami rzeczywistymi.

W niniejszej pracy wydzielamy szczególny aspekt *Stetigkeit*, zajmujemy się mianowicie liczbami rzeczywistymi i opisujemy je jako przedmiot intencjonalny.

[174] [Quine 1974], s. 265.

[175] Zob. także: „Ścisłą teorię liczb rzeczywistych opóźniło przeświadczenie, że muszą istnieć 'granice' ciągów złożonych z ułamków" [Russell 1919], s. 105. Pytaniem pozostaje, co to są owe „nieścisłe teorie liczb rzeczywistych".

[176] [Dedekind 1872], s. 149.

[177] Zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], rozdz. IV, §11 i rozdz. VI, §2.

[178] Zob. [Conway 2001].

[179] Zob. [Cohen, Ehrlich 1963].

[180] Zob. np. [Borsuk, Szmielew 1972].

# Ku paradygmatowi teoriomnogościowemu

**19.** John Conway pisze:

„Zawsze były problemy ze zrozumieniem, czym jest zbiór liczb rzeczywistych. Rzecz stała się jaśniejsza około roku 1900, kiedy to przedstawicielom logicyzmu udało się zrealizować program zdefiniowania liczb rzeczywistych w sposób czysto teoriomnogościowy. Przedstawmy w skrócie podejście, które stało się już powszechnie przyjęte.

Liczby naturalne 0, 1, 2, 3, ..., o których początkowo przyjmowano, że są czymś dobrze znanym, albo były definiowane poprzez aksjomaty Peano, teraz mogą być zdefiniowane w ramach teorii mnogości jako moce pewnych zbiorów, lub jako skończone liczby porządkowe von Neumanna.

Następnie w pewien sposób definiujemy liczby całkowite ..., $-2$, $-1$, 0, 1, 2, ... – w tym momencie nie jest ważne, jak to wygląda w szczegółach – i przechodzimy do konstrukcji liczb wymiernych sposobem, który sprowadza się do tego, że za liczbę wymierną $\frac{p}{q}$ uznajemy klasę abstrakcji złożoną z par uporządkowanych liczb całkowitych, zawierającą w szczególności parę $(p, q)$.

Liczby rzeczywiste są ostatecznie konstruowane jako przekroje Dedekinda $(L, R)$, czyli takie podziały zbioru liczb wymiernych na dwa zbiory $L$, $R$, że każdy element zbioru $L$ poprzedza każdy element zbioru $R$".[181]

Od strony matematycznej rzecz oczywiście wygląda tak, jak to przedstawił Conway. Gdy zaś chodzi o fakty historyczne, to nasz ogląd jest odmienny. Drogę do teoriomnogościowej konstrukcji liczb rzeczywistych metodą przekrojów Dedekinda wyznaczają trzy prace, które w żadnej mierze nie były motywowane filozofią logicyzmu, mianowicie: *Lehrbuch der Algebra* Heinricha Webera (1895), *Über den Zahlbegriff* Davida Hilberta (1900) i *Grundlagen der Analysis* Edmunda Landaua (1930).

Od Webera pochodzi współczesne rozumienie liczby wymiernej jako klasy abstrakcji relacji określonej w zbiorze par liczb naturalnych, tj.

$$(m, n) \equiv (p, q) \leftrightarrow_{df} m \cdot q = n \cdot p,$$

[181] [Conway 1994], s. 93.

następnie definicja porządku liczb wymiernych

$$(m, n) <_Q (p, q) \leftrightarrow_{df} m \cdot p <_N n \cdot q,$$

a wreszcie utożsamienie liczb rzeczywistych z przekrojami zbioru liczb wymiernych. Pracę Webera omawiamy w rozdziale *Eudoxos versus Dedekind.*[182]

Hilbert podając pierwszą aksjomatykę liczb rzeczywistych wprost sformułował założenia, przy których można odtworzyć wnioskowania Dedekinda. Artykuł Hilberta omawiamy w rozdziale *Aksjomaty.*[183]

Edmund Landau połączył osiągnięcia Webera i Hilberta i szczegółowo odtworzył konstrukcję Dedekinda przyjmując w punkcie wyjścia jedynie to, że dane są liczby naturalne. Niżej omawiamy książkę Edmunda Landaua.

[182] Zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 14–20.
[183] Zob. rozdz. *Aksjomaty*, pkt. 1–3.

# Edmund Landau, *Grundlagen der Analysis*, 1930

**20.** Książka Edmunda Landaua *Grundlagen der Analysis* zawiera szczegółowo przeprowadzoną konstrukcję ciała liczb rzeczywistych metodą przekrojów Dedekinda, a za punkt wyjścia przyjmuje liczby naturalne scharakteryzowane aksjomatami Peano. Kolejne rozdziały są zatytułowane: *Liczby Naturalne*, *Ułamki*, *Przekroje*, *Liczby Rzeczywiste*, *Liczby Zespolone*.

Liczby naturalne oznaczane są w *Grundlagen* małymi, ostatnimi literami alfabetu łacińskiego $x$, $y$, $z$, liczby wymierne – dużymi, ostatnimi literami alfabetu łacińskiego $X$, $Y$, $Z$, przekroje zbioru $(\mathbb{Q}, <)$ – małymi literami greckiego alfabetu $\xi$, $\eta$, $\zeta$, liczby rzeczywiste – dużymi literami greckiego alfabetu $\Psi$, $H$, $Z$.

Omawiając konstrukcję liczb rzeczywistych, szczególną uwagę zwracamy na rolę podwójnego przedstawienia liczb wymiernych w dowodzie twierdzenia o ciągłości liczb rzeczywistych.

Zaczniemy od liczb wymiernych.

**21.** „Definicja 7: Przez ułamek $\frac{x_1}{x_2}$ (co czytamy '$x_1$ nad $x_2$') rozumiemy parę liczb naturalnych $x_1, x_2$ (w takim właśnie porządku).

Definicja 8.

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$$

($\sim$ czytamy jako 'jest równoważne') *gdy*

$$x_1 y_2 = x_2 y_1\text{".}$$[184]

W twierdzeniach 37–39 dowodzone są własności relacji $\sim$ nazywane dzisiaj zwrotnością, symetrią i przechodniością. Po tym Landau pisze:

„Na podstawie twierdzeń od 37 do 39, wszystkie ułamki rozpadają się na klasy w taki sposób, że $\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{x_1}{x_2}$ i $\frac{y_1}{y_2}$ należą do tej samej klasy".[185]

[184] [Landau 1966], s. 19.
[185] [Landau 1966], s. 20.

W kolejnym paragrafie podana jest, pochodząca od Webera, definicja porządku ułamków. *Novum* w stosunku do *Lehrbuch der Algebra* polega na tym, że Landau pokazuje, iż definicja ta *nie zależy od wyboru reprezentantów*. Następnie dowodzona jest zwrotność, przechodniość, spójność i gęstość porządku ułamków oraz zgodność dodawania i mnożenia z porządkiem. Po tym, w kolejnych paragrafie, podane są m.in. następujące definicje i twierdzenia:

„Definicja 16. Przez liczbę wymierną rozumiemy zbiór wszystkich ułamków równoważnych pewnemu ustalonemu ułamkowi".[186]

„Definicja 25. Liczbę wymierną nazywamy liczbą całkowitą, gdy reprezentuje ona zbiór ułamków, do którego należy ułamek $\frac{x}{1}$".[187]

„Twierdzenie 113. Przyjmując, że liczbie naturalnej 1 przypisana jest klasa ułamka $\frac{1}{1}$, a za następnik klasy $\frac{x}{1}$ przyjmiemy klasę $\frac{x'}{1}$, liczby całkowite spełniają pięć aksjomatów liczb naturalnych".[188]

W ostatnim twierdzeniu rozdziału *Ułamki* dowodzony jest aksjomat Archimedesa.

21.1. W literaturze przedmiotu książka Landaua jest uznawana za pierwowzór współczesnej konstrukcji liczb wymiernych.[189] Sądzimy, że konstrukcja przedłożona przez Landaua ma się tak do standardów aksjomatycznej teorii mnogości, jak konstrukcja Webera do standardów poprawności przyjętych przez Landaua. To komu przypiszemy autorstwo współczesnej konstrukcji liczb wymiernych zależy od tego, co uznamy za ważniejsze: z pewnością podstawowe pomysły (definicje) pochodzą od Webera, a ostateczny szlif konstrukcji od Landaua.[190]

**22.** Przejdźmy do dowodu twierdzenia o ciągłości liczb rzeczywistych. Przekrój zbioru liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, <)$ jest definiowany jako przedział

[186] [Landau 1966], s. 35.
[187] [Landau 1966], s. 40.
[188] [Landau 1966], s. 40.
[189] Zob. [Rasiowa 1979], s. 90, [Wilder 1956], s. 156.
[190] Zob. „Idąc za przykładem Webera z jego *Lehrbuch der Algebra* z roku 1895, zdefiniujemy ułamki jako klasy równoważności liczb całkowitych, ze względu na relację $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ wtw., gdy $ad = cd$ [...] W książce Landaua [*Grundlagen der Analysis*], rozdział II, §§3–4, podany jest szczegółowy dowód Twierdzenia: Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, z wyżej zdefiniowanym dodawaniem i mnożeniem, jest ciałem algebraicznym" [Mainzer 1995(a)], s. 23.

początkowy $\xi$ zbioru $(\mathbb{Q}, <)$.[191] Elementy zbioru $\xi$ nazywane są liczbami dolnymi, elementy zbiory $\mathbb{Q}\backslash\xi$ – liczbami górnymi.

Landau, modyfikując odpowiednio ustalenia Dedekinda, definiuje porządek, dodawanie i mnożenie przekrojów, a następnie dowodzi własności, które pozwalają uznać zbiór przekrojów za ciało uporządkowane.

22.1. „Twierdzenie 151. Dla każdej liczby wymiernej $R$, zbiór wszystkich liczb wymiernych $< R$ stanowi przekrój".[192]

Przekrój taki jest oznaczany symbolem $R^*$ i jest nazywany przekrojem wymiernym.

W kolejnych twierdzeniach jest pokazane, że zbiór przekrojów $X^*$, gdzie $X$ jest liczbą wymierną,

„posiada wszystkie te własności [...], które w rozdziale drugim zostały wykazane o liczbach wymiernych [...]. Dlatego porzucamy liczby wymierne zastępując je odpowiadającymi im przekrojami wymiernymi, i dalej, odwołując się do wcześniejszych ustaleń, będziemy musieli mówić tylko w terminach przekrojów. (Liczby wymierne jednakże przetrwają – w zbiorach – w pojęciu przekroju)".[193]

„Definicja 41. Symbol $X$ (uwolniony teraz od swego poprzedniego znaczenia) będzie oznaczał przekrój wymierny $X^*$, na który przenosimy też nazwę 'liczba wymierna'; podobnie pojęcie 'liczba całkowita' będzie odnosiło się do przekrojów wyznaczonych przez liczbę całkowitą".[194]

**23.** W *Grundlagen der Analysis* twierdzenie o ciągłości liczb rzeczywistych nosi nazwę „Fundamentalnego twierdzenia Dedekinda". Dowód jest prowadzony podobnie, jak w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, tj. *via* gęstość liczb wymiernych („przekrojów wymiernych") w zbiorze liczb rzeczywistych (w zbiorze wszystkich przekrojów zbioru $(\mathbb{Q}, <)$). W wykładzie Landaua jest to twierdzenie 159. Zanim do niego przejdziemy, spójrzmy na dwa twierdzenia pomocnicze.

„Twierdzenie 157. Liczby wymierne to te przekroje, dla których istnieje najmniejsza liczba górna $X$. To $X$ także jest przekrojem".[195]

[191] Zob. [Landau 1966], s. 43. Definicję przedziału początkowego podajemy wyżej w pkt. 14.
[192] [Landau 1966], s. 57.
[193] [Landau 1966], s. 63–64.
[194] [Landau 1966], s. 64.
[195] [Landau 1966], s. 64.

„Przekrój" oznacza tu wcześniej zdefiniowany przekrój zbioru $(\mathbb{Q}, <)$. „Liczba wymierna" to „przekrój wymierny", a więc pewien przedział początkowy $\xi$ zbioru $(\mathbb{Q}, <)$. Liczba górna $X$ jest zatem elementem zbioru $\mathbb{Q}\backslash\xi$. Tak więc $X$ nie jest „przekrojem wymiernym", nie jest przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}, <)$. Tym sposobem symbol $X$ występuje w dwóch znaczeniach: jako przekrój zbioru $(\mathbb{Q}, <)$ i jako element zbioru $\mathbb{Q}$. Spójrzmy zresztą na dowód, gdzie już w pierwszym zdaniu pojawia się wskazana dwuznaczność:

„Dowód. 1) Dla przekroju $X$ (poprzednie $X^*$), $X$ (liczba wymierna w starym sensie) jest najmniejszą liczbą górną.

2) Jeżeli dla przekroju $\xi$ istnieje najmniejsza liczba górna $X$, to wtedy każda liczba dolna przekroju $\xi$ jest $< X$ i każda liczba górna jest $\geqslant X$, tak że przekrój ten jest $X$ (dawne $X^*$)".[196]

„Twierdzenie 158. Niech $\xi$ będzie przekrojem. $X$ jest liczbą dolną wtedy i tylko wtedy, gdy $X < \xi$, a stąd jest liczbą górną wtedy i tylko wtedy, gdy $X \geqslant \xi$ ".[197]

W twierdzeniu 158 znajdujemy ten sam błąd *kategorialny*: jeżeli $X$ jest liczbą dolną przekroju $\xi$, tj. jeżeli $X \in \xi$, to $X$ jest liczbą wymierną, a nie „przekrojem wymiernym" i nie może być porównywana w sensie relacji mniejszy większy z przekrojem $\xi$. W dowodzie twierdzenia zresztą czytamy:

„Jeżeli $X$ jest liczbą górną przekroju $\xi$, i jest najmniejszą taką liczbą, to na podstawie Twierdzenia 157 mamy $X = \xi$ ".[198]

Przejdźmy teraz do twierdzenia o gęstości liczb wymiernych („przekrojów wymiernych") w zbiorze wszystkich przekrojów zbioru $(\mathbb{Q}, <)$.

„Twierdzenie 159. Jeżeli $\xi < \eta$, to istnieje takie $Z$, że $\xi < Z < \eta$ ".[199]

Dowód tego faktu jest taki sam, jak w *Stetigkeit*: na podstawie definicji porządku przekrojów istnieje liczba $X$, która jest zarazem liczbą górną przekroju $\xi$ i liczbą dolną przekroju $\eta$. W przekroju $\eta$ nie ma największej liczby, zatem, na podstawie Twierdzenia 158 istnieje takie $Z$, że zachodzi

$$\xi \leqslant X < Z < \eta \,.$$[200]

[196] [Landau 1966], s. 64.
[197] [Landau 1966], s. 64.
[198] [Landau 1966], s. 64.
[199] [Landau 1966], s. 64.
[200] Zob. [Landau 1966], s. 64–65.

W dowodzie tym, tak jak w dowodach poprzednich twierdzeń zmienne $X$, $Z$ oznaczają i przekroje zbioru $(\mathbb{Q}, <)$ i elementy zbioru $\mathbb{Q}$.

**24.** „Fundamentalne twierdzenie Dedekinda" jest sformułowane dokładnie tak, jak w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*: jeżeli para $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ jest przekrojem Dedekinda zbioru $(\mathbb{R}, <)$, to istnieje liczba rzeczywista, która jest albo największa w klasie $\mathfrak{A}_1$, albo najmniejsza w klasie $\mathfrak{A}_2$.[201]

Dowód twierdzenia jest powtórzeniem rozumowania z §5 *Stetigkeit*.

Z uwagi na wskazaną dwuznaczność w posługiwaniu się liczbami wymiernymi konstrukcja przedstawiona przez Landaua plasuje się pomiędzy rozstrzygnięciem Dedekinda, gdzie liczby wymierne i „przekroje wymierne" są odróżniane w warstwie symbolicznej, a współczesnym ujęciem, w którym stosowane jest pojęcie izomorfizmu.

[201] Zob. [Landau 1966], s. 89. Nie przytaczamy oryginalnego sformułowania podanego przez Landaua, bo jest ono bardzo rozbudowane, w szczególności Landau nie używa pojęcia przekrój Dedekinda, ale po prostu opisuje odpowiedni przekrój.

# O CIĄGŁOŚCI LINII PROSTEJ

# Aksjomat Cantora-Dedekinda

W literaturze, tak filozoficznej jak i matematycznej, funkcjonuje slogan, czy raczej zbitka słów „aksjomat Cantora-Dedekinda". Dla przykładu Philip Ehrlich we *Wstępie* do zbiorowej pracy *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua* tak charakteryzuje sytuację w matematyce po roku 1872, czyli po opublikowaniu prac Dedekinda i Cantora:

„Nowo skonstruowane ciało uporządkowane liczb rzeczywistych zyskało miano *arytmetycznego kontinuum*, bo sądzono, że ten system liczbowy w pełni wystarcza do analitycznego przedstawienia wszystkich zjawisk ciągłych. Zgodnie z tym przeświadczeniem przyjmowano, że *liniowe kontinuum geometryczne* jest izomorficzne z *kontinuum arytmetycznym*, zaś aksjomaty geometrii były tak dobierane, aby to istotnie zachodziło. Na cześć Cantora i Dedekinda, którzy jako pierwsi wysunęli tę tezę, odpowiedniość między tymi dwoma strukturami zaczęto nazywać *aksjomatem Cantora-Dedekinda*".[1]

Zostawiając na boku pytanie, czy zarysowany tu obraz jest zgodny z faktami historycznymi, spróbujmy zrozumieć treść aksjomatu Cantora-Dedekinda. Z pewnością aksjomaty geometrii nie są tak dobierane, aby struktura linii prostej była strukturą ciała uporządkowanego, a zatem odpowiedniość jakich struktur jest ustalana w tym aksjomacie?

I drugi przykład. Carl Boyer w popularnej książce *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, komentując *Stetigkeit und irrationale Zahlen* pisze:

„Leibniz sądził, że zbiór stanowi kontinuum, jeżeli między każdymi dwoma elementami jest zawsze trzeci element zbioru [...]. Przyrodnik Ernst

[1] [Ehrlich 1994(b)], s. viii. Nie potrafimy powiedzieć, jakie to fakty Ehrlich ma na uwadze, gdy pisze, że „aksjomaty geometryczne były tak dobierane". Wiadomo, że to Moritz Pasch (*Vorlesungen über neuere Geometrie*, 1882) jako pierwszy potraktował zasadę ciągłości Dedekinda jako aksjomat geometrii, stąd jednak jeszcze daleka droga do tego, aby ustalić *izomorfizm* między *kontinuum geometrycznym* i *kontinuum arytmetycznym*.

Mach uważał również, że ta własność gęstości zbioru stanowi jego ciągłość [...], lecz badanie zbioru liczb rzeczywistych wykazało, że tak nie jest. Na przykład zbiór liczb wymiernych jest gęsty, a jednak nie stanowi kontinuum. Rozmyślając nad tą sprawą, Dedekind doszedł do wniosku, że pojęcie ciągłości prostej wyraża się nie jakimś nieokreślonym trzymaniem się całości, lecz istotą podziału prostej za pomocą punktu. Zauważył, że w każdym podziale punktów prostej na dwie klasy takie, że każdy punkt jednej znajduje się na lewo od każdego punktu drugiej, istnieje jeden i tylko jeden punkt dokonujący tego podziału. Nie jest to prawdziwe dla uporządkowanego zbioru liczb wymiernych. Dlatego to właśnie punkty prostej tworzą kontinuum, a liczby wymierne go nie tworzą. [...] Teraz już widoczne jest, w jaki sposób należy uzupełnić zbiór liczb wymiernych, by utworzył zbiór ciągły. Należy tylko przyjąć aksjomat Cantora-Dedekina: punkty prostej można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie liczbom rzeczywistym".[2]

Traktując te słowa literalnie, aksjomat Cantora-Dedekinda orzeka, że istnieje bijekcja między liczbami rzeczywistymi a punktami prostej, ale z kontekstu uwag Boyera można wnosić, że chodzi tu o izomorfizm struktur porządkowych.

Jeden aksjomat, jedna nazwa, a dwie różne tezy: izomorfizm ciał uporządkowanych, izomorfizm zbiorów uporządkowanych.

W *Stetigkeit und irrationale Zahlen* – jak już wiemy – nic nie jest powiedziane o istnieniu bijekcji między punktami prostej a liczbami rzeczywistymi, a na podstawie innych źródeł można wykazać, iż Dedekind jako pierwszy wysunął hipotezę, że linia prosta „niekoniecznie musi być ciągła", czy mówiąc współczesnym językiem, że aksjomat ciągłości jest niezależny od pozostałych aksjomatów geometrii Euklidesowej.[3]

To, jak teza o wzajemnej odpowiedniości między punktami prostej i liczbami rzeczywistymi przedstawia się w pracy Cantora *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (1872), bo o nią tu właśnie chodzi, zaprezentujemy w następnym rozdziale, w tym zaś, referując wybrane fragmenty książki Karola Borsuka i Wandy Szmielew *Podstawy geometrii*, pokażemy jak rzecz przedstawia się w dzisiejszej matematyce.

[2] [Boyer 1949], s. 409–410. W słowach tych nie jest jasne do czego odnosi się owo „należy tylko przyjąć", w jakim to celu należy przyjąć aksjomat Cantora-Dedekinda?

[3] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 11.2, zob. także rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 23.

# Karol Borsuk, Wanda Szmielew
# *Podstawy geometrii*, 1972

*Podstawy geometrii* to książka z zakresu metageometrii: ważne są tu twierdzenia o systemach geometrycznych, natomiast w ramach tych systemów dowodzone są twierdzenia, które będą użyte w dowodzeniu twierdzeń o systemach.

Jednym z ważniejszych jest twierdzenie o kategoryczności „geometrii Euklidesa".[4] Z filozoficznego punktu widzenia to bardzo ważne twierdzenie, nie spotkało się ono jednak z należną mu uwagą. Co prawda, odgrywa ono istotną rolę w książce Hartry Fielda *Science without Numbers*, ale Field najwyraźniej nie zna dowodu, co więcej, podaje, że zostało ono udowodnione przez Hilberta w *Grundlagen der Geometrie*, chociaż w *Grundlagen* nie ma twierdzenia o kategoryczności geometrii Euklidesa.[5]

Kluczową rolę w dowodzie twierdzenia o kategoryczności geometrii Euklidesa odgrywa fakt, że w „przestrzeni Euklidesa" można wprowadzić metrykę, z tym zaś wiążą się dwa twierdzenia, które można skojarzyć z aksjomatem Cantora-Dedekinda: (1) twierdzenie o istnieniu metryki, a więc – pozwalając sobie na uproszczenie – funkcji, która punktom prostej przyporządkowuje liczby rzeczywiste, oraz (2) twierdzenie o surjektywności metryki, czyli – pozwalając sobie na uproszczenie – o tym, że metryka przyjmuje wszystkie nieujemne wartości rzeczywiste.

Gdy aksjomat Cantora-Dedekinda zinterpretujemy jako koniunkcję tych dwóch twierdzeń, to gubimy gdzieś pojęcie struktury – czy to algebraicznej, czy porządkowej. Gdy zaś śledzimy dowody, to natrafiamy jednak na pewne struktury porządkowe i porządkowo-algebraiczne. Otóż na linii prostej definiowany jest porządek, tak że w pewnym sensie staje się ona przestrzenią ośrodkową. Natrafiamy też na określoną strukturę porządkowo-algebraiczną,

[4] Drugi rozdział *Podstaw* jest zatytułowany *Geometria Euklidesa*. Geometria Euklidesa to oczywiście coś innego niż geometria w *Elementach* Euklidesa.

[5] Dokładniej: Field wskazuje nawet nie *Grundlagen*, ale angielskie tłumaczenie dziesiątego wydanie *Grundlagen*, tj. [Hilbert 1980]; zob. [Field 1980], rozdz. III.

mianowicie strukturę odcinków swobodnych, za pośrednictwem której wprowadzana jest metryka. W zbiorze odcinków swobodnych definiowane jest dodawanie, (ograniczone) odejmowanie, relacja większości, oraz (działanie zewnętrzne) mnożenie przez liczby dwójkowe. Wszystkie zależności zachodzące w tej strukturze, przy odpowiedniej interpretacji, zachodzą też w strukturze $(\mathbb{R}_+, +, \cdot, <)$. Czy izomorfizm *kontinuum geometrycznego* i *kontinuum arytmetycznego* miałby odnosić się właśnie do tych struktur? Ale struktura odcinków swobodnych i linia prosta to bez wątpienia różne obiekty. Czym zatem, jaką strukturą jest linia prosta?

Podstawowa różnica między tym, co znajdujemy w *Podstawach geometrii*, a przytaczanym w różnych kontekstach aksjomatem Cantora-Dedekinda polega na tym, że w wykładzie Karola Borsuka i Wandy Szmielew linia prosta jest w pełni określonym obiektem matematycznym. Natomiast ani Dedekind, ani Cantor nie dysponują systemem geometrii w dzisiejszym rozumieniu i dlatego nie wiadomo czym w ich pracach jest linia prosta. Można owszem przyjąć, że pojęcie prostej odsyła do *Elementów* Euklidesa. Ale nawet i wtedy nie wiemy, które aksjomaty, postulaty, definicje i twierdzenia mamy uznać za jej charakterystykę. Zupełnie naturalne jest na przykład takie pytanie: czy aby ustalić odpowiedniość między prostą a liczbami rzeczywistymi trzeba uwzględnić relacje, jakie zachodzą na płaszczyźnie, np. piąty postulat Euklidesa:

„That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than two right angles".[6]

Innymi słowy, czy rzeczona odpowiedniość jest ustalana między liczbami rzeczywistymi a prostą euklidesową, czy między liczbami rzeczywistymi a np. prostą geometrii absolutnej? Może do ustalenia owej odpowiedniości wystarczy znać jedynie relacje zachodzące na prostej? A jeżeli tak, to jakie? W *Podstawach geometrii* znajdziemy odpowiedzi na te pytania.

[6] [Euklides], Księga I, *Postulaty*, „Gdy dwie linie proste, na które pada pewna linia prosta tak, że kąty wewnętrzne, które leżą po tej samej stronie są mniejsze od dwóch kątów prostych, są przedłużone nieskończenie, to przecinają się po tej stronie, po której kąty są mniejsze od dwóch kątów prostych"; „Jeżeli liniia prosta padaiąc na dwie linie proste, czyni kąty wewnętrzne, po tyże samey stronie położone, mnieysze od dwóch kątów prostych; dwie te liniie proste w odległość nieskończoną przedłużone, zeydą się z tej strony, z którey kąty są mnieysze od dwóch kątów prostych" [Czech 1817], s. 5; „jeśli prosta padająca na dwie proste tworzy kąty wewnętrzne po jednej stronie mniejsze od dwóch kątów prostych, te dwie proste przedłużone nieskończenie zbiegały się po tej stronie, po której są te kąty mniejsze od dwóch kątów prostych" [Kołodziejczyk, Szczepkowski 2005(a)], s. 276.

Przedstawimy teraz twierdzenie o istnieniu miary odcinków. Wywód będzie stosunkowo długi i szczegółowy, ale taki być musi, bo właśnie do tych szczegółów będziemy odwoływać się w komentarzu zamieszczonym na końcu tego rozdziału, a także w następnych rozdziałach. Na tle szczegółowej analizy twierdzenia o istnieniu miary, wyraźnie pokazuje się też iluzoryczność tak mocno akcentowanego przez Fielda przeciwstawienia liczby–obiekty geometryczne.

Aby uzgodnić komentarze z cytatami, przyjmujemy oznaczenia z *Podstaw geometrii*, powtarzamy też numerację aksjomatów i twierdzeń. Aksjomaty, które podamy to aksjomaty tzw. geometrii absolutnej, czyli – mówiąc swobodnie – aksjomaty geometrii Euklidesa bez aksjomatu o prostych równoległych.

Zacznijmy od *niewinnej*, zdawałoby się, uwagi ze *Wstępu*:

„W podanym tu wykładzie geometrii za teorie wcześniejsze przyjmujemy logikę z teorią mnogości oraz arytmetykę liczb rzeczywistych. [...] Pojęcie zbioru utożsamia się z pojęciem własności. Wzór $x \in X$ będziemy czytali również *$x$ ma własność $X$*".[7]

Do tych słów wrócimy w komentarzu na końcu rozdziału.

**1.** Pojęcia pierwotne: przestrzeń, płaszczyzna, prosta, relacja leżenia między, relacja równej odległości;

„przede wszystkim wyodrębnia się pewien układ pojęć, tak zwanych *pojęć pierwotnych*. Pożądane jest, aby miały one możliwie jasny sens intuicyjny. Jednocześnie przyjmuje się zasadę niekorzystania z innych pojęć, jak długo nie zdefiniuje się ich za pomocą pojęć poprzednio zdefiniowanych".[8]

Oznaczenia. Zbiór $\mathcal{S}$ – przestrzeń; elementy zbioru $\mathcal{S}$ to punkty; punkty oznaczane są małymi literami $a$, $b$, $c$, $p$, $q$. Zbiór płaszczyzn $\mathcal{P}$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$; płaszczyzny oznaczane są dużymi literami $P$, $Q$. Zbiór prostych $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}$; proste oznaczane są dużymi literami $K$, $L$, $M$, $N$.

„Wzór $p \in L$, który mówi, że punkt $p$ należy do prostej $L$ czytamy także: *punkt $p$ leży na prostej $L$*, albo: *prosta $L$ przechodzi przez punkt $p$*. [...] Zbiory punktów będziemy nazywali *figurami*. Zatem proste i płaszczyzny są szczególnymi przypadkami figur".[9]

[7] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 14–15.
[8] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 14.
[9] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 14–15.

Trójargumentowa relacja leżenia między B, $\mathrm{B} \subset \mathcal{S}^3$, $\mathrm{B}(abc)$ czytamy jako: punkt $b$ leży między punktami $a$ i $c$. Czteroargumetowa relacja równej odległości D, $\mathrm{D} \subset \mathcal{S}^4$, $\mathrm{D}(abcd)$ czytamy jako: punkt $a$ jest odległy od punktu $b$, jak punkt $c$ od punktu $b$.

**2.** Aksjomaty. W zapisie niektórych aksjomatów wygodnie będzie posłużyć się skrótami symbolicznymi, zachowujemy przy tym ustalone wcześniej konwencje oznaczeń.

2.1. Aksjomaty Incydencji.

(I.1) $\forall L \exists a, b[a \neq b \wedge a, b \in L]$.

(I.2) $\forall a, b \exists L[a, b \in L]$.

(I.3) $\forall a, b \forall K, L[(a, b \in K \wedge a, b \in L) \rightarrow K = L]$.

(I.4) $\forall P \exists a, b, c[a, b, c \in P \wedge a \neq b \neq c \wedge \neg \exists L[a, b, c \in L]\,]$.[10]

(I.5) $\forall a, b, c \exists P[a, b, c \in P]$.

(I.6) $\forall a, b, c \forall P, Q[a, b, c \in P \cap Q \rightarrow (P = Q \vee \exists L[a, b, c \in L]\,)]$.

(I.7) $\forall L \forall P \forall a, b[(a \neq b \wedge a, b \in L \cap P) \rightarrow L \subset P]$.

(I.8) $\forall P, Q \forall a \exists b[a \in P \cap Q \rightarrow (a \neq b \wedge b \in P \cap Q)]$.

(I.9) $\exists a, b, c, d[(a \neq b \neq c \neq d) \wedge \neg \exists P[a, b, c, d \in P]\,]$.

Okazuje się, że istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez dwa różne punkty $a$, $b$.

„Prostą wyznaczoną przez dwa różne punkty $a$ i $b$ będziemy nazywali *prostą* $ab$".[11]

2.2. Liniowe aksjomaty uporządkowania.

(O.1) $B(abc) \rightarrow (a \neq b \neq c \wedge \exists L[a, b, c \in L]\,)$.

(O.2) $B(abc) \rightarrow B(cba)$.

(O.3) $B(abc) \rightarrow \neg B(bac)$.

(O.4) $\forall a, b, c \exists L[(a \neq b \neq c \wedge a, b, c \in L) \rightarrow (B(abc) \vee B(bca) \vee B(cab))]$.

(O.5) $\forall a, b \exists c[a \neq b \rightarrow B(abc)]$.

(O.6) $\forall a, b \exists c[a \neq b \rightarrow B(acb)]$.

(O.7) $(B(abc) \wedge B(bcd)) \rightarrow B(abd)$.

(O.8) $(B(abd) \wedge B(bcd)) \rightarrow B(abc)$.

[10] Zapis $a \neq b \neq c$ oznacza trzy różne punkty; analogicznie zapisujemy cztery różne punkty.

[11] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 30.

**3.** Odcinek.

„Parę nieuporządkowaną $\{a, b\}$ punktów $a$ i $b$ będziemy nazywali *odcinkiem ab* i oznaczali przez $ab$. Punkty $a$ i $b$ nazywamy *końcami* odcinka $ab$. Zbiór punktów leżących między punktami $a$ i $b$ będziemy nazywali *odcinkiem otwartym ab* lub *odcinkiem* $(ab)$ i oznaczali we wzorach przez $(ab)$".[12]

Niech $\mathfrak{U}$ oznacza rodzinę wszystkich odcinków otwartych leżących na prostej $L$. Pokazuje się, że spełnione są warunki:

$$\forall p, q \in L \exists U_1, U_2 \in \mathfrak{U}[p \neq q \to (p \in U_1,\ q \in U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset)],$$

$$\forall U_1, U_2 \in \mathfrak{U} \forall p \in L \exists U_0 \in \mathfrak{U}[p \in U_1 \cap U_2 \to p \in U_0 \subset U_1 \cap U_2].$$

Tak więc rodzina $\mathfrak{U}$ może stanowić bazę topologii (Hausdorffa) na prostej $L$. W związku z tym czytamy:

„Przez *topologię* prostej $L$ będziemy w dalszym ciągu rozumieli topologię, która jest zdefiniowana przez klasę $\mathfrak{U}$ wszystkich odcinków otwartych leżących na prostej $L$.

Można teraz dla dowolnej prostej wprowadzić kolejno wszystkie pojęcia topologiczne [...], w szczególności pojęcie punktu skupienia, domknięcia i wnętrza dowolnej figury $F \subset L$, pojęcia zbioru domkniętego, otwartego, spójnego, pojęcia granicy ciągu punktów prostej $L$ oraz funkcji ciągłej punktu (której wartościami są liczby rzeczywiste lub punkty) i funkcji ciągłej zmiennej rzeczywistej, której wartościami są punkty prostej".[13]

**4.** Oś. Dowodzone jest twierdzenie:

„Dla dowolnej prostej $L$ i dowolnego punktu $a \in L$ zbiór $L - a$ rozpada się w dokładnie jeden sposób na sumę dwóch zbiorów niepustych i rozłącznych

$$L - a = A_1 \cup A_2$$

spełniających trzy warunki:

(i) jeśli $p, q \in A_1$, to $\sim B(paq)$,
(ii) jeśli $p, q \in A_2$, to $\sim B(paq)$,
(iii) jeśli $p \in A_1$ i $q \in A_2$, to $B(paq)$".[14]

[12] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 34.
[13] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 38–39.
[14] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 40. Zapis $L - a$ oznacza $L \backslash \{a\}$.

Każdy ze zbiorów $A_1$, $A_2$ nazywany jest półprostą prostej $L$ wyznaczoną przez punkt $a$; półproste $A_1$, $A_2$ nazywane są półprostymi dopełniającymi się. Półprosta wyznaczona przez punkt $a$ jest oznaczana symbolem $A_a$. Półprosta dopełniająca półprostej $A$ jest oznaczana symbolem $A^*$.

„Półprosta $A$ jest jednoznacznie określona przez swój początek $a$ i dowolny punkt $b$ leżący na niej. Półprostą $A$ będziemy również nazywali *półprostą* $ab$".[15]

4.1. W zbiorze $\mathfrak{J}$ wszystkich półprostych ustalonej prostej $L$ definiowana jest relacja

$$A\mathrm{R}B \leftrightarrow_{df} A \subset B \vee B \subset A.$$

Pokazuje się, że jest to relacja równoważności, a zbiór ilorazowy $\mathfrak{J}/_{\mathrm{R}}$ jest dwuelementowy: $\mathfrak{J}/_{\mathrm{R}} = \{\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2\}$. Każda z par $\mathfrak{L}_1 = (L, \mathfrak{O}_1)$, $\mathfrak{L}_2 = (L, \mathfrak{O}_2)$ nazywana jest prostą zorientowaną lub osią, natomiast każdy ze zbiorów $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ nazywany jest orientacją prostej $L$.

4.2. Porządek punktów na osi. Niech $\mathfrak{L}$ będzie osią prostej $L$, niech $p \in L$, niech $A_p$ będzie półprostą wyznaczoną przez punkt $p$. W zbiorze $L$ definiowana jest relacja

$$p \prec q \leftrightarrow_{df} A_p \supset A_q \wedge A_p \neq A_q.$$

Pokazuje się, że porządek $\prec$ jest liniowy, gęsty, bez elementu pierwszego i ostatniego. Dalej mówiąc o osi $\mathfrak{L}$ mamy na uwadze parę $(L, \prec)$.

Związek między porządkiem $\prec$ i relacją B oddaje twierdzenie:

$$\forall a, b, c \in \mathfrak{L}[\mathrm{B}(abc) \leftrightarrow a \prec b \prec c \vee c \prec b \prec a].$$

„Porządek punktów na prostej $L$ jest określony przez wybranie jednej z jej orientacji. [...] Aby ustalić porządek na prostej $L$ wystarczy dla dowolnie obranych dwóch różnych punktów $a, b \in L$ ustalić, który z nich będziemy uważać za wcześniejszy. Jeżeli bowiem ustalamy np. $a \prec b$, to tym samym nadajemy prostej $L$ orientację półprostej $ab$, a orientacja określa już porządek. Mówimy, że jest to *porządek od* $a$ *do* $b$".[16]

**5.** Aksjomat Pascha. Dla płaszczyzny $P$, prostej $K$, punktów $a$, $c$ niech będzie $K \subset P$ i $a, c \in P$.

[15] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 40.

[16] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 45. Tyle to trzeba było mozołu, by zdefiniować porządek na prostej. Dla porównania zobaczmy, jak to wygląda u Dedekinda: „Jeżeli odróżnimy oba istniejące kierunki nazywając jeden 'prawym', a drugi 'lewym', i jeśli $p$, $q$ są dwoma różnymi punktami, to albo $p$ leży na prawo od $q$ i jednocześnie $q$ na lewo od $p$, albo na odwrót, $q$ leży na prawo do $p$ i jednocześnie $p$ na lewo od $q$. Trzecia możliwość nie istnieje, jeżeli $p$, $q$ są rzeczywiście różnymi punktami" [Dedekind 1872], s. 139.

Prosta $K$ leży między punktami $a$ i $c$, symbolicznie $\mathrm{B}(aKc)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a, c \in P \backslash K \wedge \exists b \in K[\mathrm{B}(abc)].$$

(O.9) „Na płaszczyźnie $P$ dane są trzy niewspółliniowe punkty $a$, $b$, $c$ oraz prosta $K$. Jeżeli $\mathrm{B}(aKb)$ i $c \sim \in K$, to $\mathrm{B}(bKc)$ lub $\mathrm{B}(aKc)$".[17]

**6.** Kąt i trójkąt.

„Na płaszczyźnie $P$ niech dany będzie punkt $p$. Rodzinę wszystkich półprostych o początku $p$ leżących w płaszczyźnie $P$ będziemy nazywali *pękiem wyznaczonym przez punkt* $p$".[18]

„Niech dany będzie pęk półprostych $\mathfrak{B}$ o wierzchołku $p$. Nieuporządkowaną parę $\{AB\}$ złożoną z różnych i zgodnych (tzn. nie dopełniających się wzajemnie) półprostych $A$ i $B$ pęku $\mathfrak{B}$ będziemy nazywali kątem $AB$ i oznaczali przez $AB$ i $BA$. [...] Jeżeli $a \in A$ i $b \in B$, to kąt $AB$ będziemy oznaczali również przez $\measuredangle apb$ lub $\measuredangle bpa$".[19]

„Nieuporządkowaną trójkę $\{abc\}$ niewspółliniowych punktów $a$, $b$, $c$ będziemy nazywali trójkątem $abc$. Punkty $a$, $b$, $c$ będziemy nazywali *wierzchołkami*, odcinki $ab$, $bc$, $ac$ *bokami*, a kąty $bac$, $abc$, $acb$ *kątami wewnętrznymi* trójkąta $abc$".[20]

**7.** Półpłaszczyzna. Niech prosta $K$ leży na płaszczyźnie $P$. Pokazuje się, że zbiór $P\backslash K$ jest niepusty. W zbiorze tym definiowana jest relacja R:

$$p\mathrm{R}q \leftrightarrow_{df} \neg\mathrm{B}(pKq).[21]$$

Pokazuje się, że R jest relacją równoważności, a zbiór ilorazowy składa się z dwóch elementów $W_1$, $W_2$. Zbiory te nazywane są półpłaszczyznami.

**8.** Aksjomaty przystawania.

(C.1) $\mathrm{D}(aabb)$.

(C.2) $\mathrm{D}(aapq) \rightarrow p = q$.

(C.3) $\mathrm{D}(abba)$.

(C.4) $(\mathrm{D}(abpq) \wedge \mathrm{D}(abrs)) \rightarrow \mathrm{D}(pqrs)$.

[17] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 47. Symbol $c \sim \in K$ oznacza $c \notin K$. Aksjomat Pascha jest zazwyczaj formułowany za pomocą pojęcia trójkąta; zob. [Borsuk, Szmielew 1972], s. 64.

[18] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 51.

[19] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 58.

[20] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 61.

[21] Zapis $\mathrm{B}(pKq)$ czytamy jako: punkty $p$, $q$ leżą po jednej stronie prostej $K$.

W zbiorze wszystkich odcinków definiowana jest relacja

$$ab \equiv cd \leftrightarrow_{df} \mathrm{D}(abcd).$$

Relacja $\equiv$ jest równoważnością. Gdy $ab \equiv cd$, to mówimy, że odcinek $ab$ przystaje do odcinka $cd$.

„Klasy abstrakcji ze względu na relację $\equiv$ w zbiorze wszystkich odcinków będziemy nazywali *odcinkami swobodnymi*. Poszczególne odcinki będziemy nazywali teraz *odcinkami związanymi*. Odcinki swobodne będziemy oznaczali małymi literami gotyckimi [...]. Odcinek swobodny, którego reprezentantem jest $ab$ będziemy oznaczali przez $[ab]$".[22]

W kolejnych aksjomatach przystawania występuje relacja $\equiv$.

(C.5) $(\mathrm{B}(a_1b_1c_1) \wedge \mathrm{B}(a_2b_2c_2) \wedge a_1b_1 \equiv a_2b_2 \wedge b_1c_1 \equiv b_2c_2) \rightarrow a_1c_1 \equiv a_2c_2$.

(C.6) „Dla dowolnej półprostej $A$ o początku $a$ i dowolnego odcinka $pq$ istnieje dokładnie jeden punkt $b \in A$ taki, że $ab \equiv pq$".[23]

(C.7) „Niech dane będą proste $L_1$ i $L_2$ oraz punkty $a_1, b_1, c_1 \in L_1$, $d_1 \sim \in L_1$ i $a_2, b_2, c_2 \in L_2$, $d_2 \sim \in L_2$. Jeżeli $\mathrm{B}(a_1b_1c_1)$, $\mathrm{B}(a_2b_2c_2)$, $a_1b_1 \equiv a_2b_2$, $b_1c_1 \equiv b_2c_2$, $d_1b_1 \equiv d_2b_2$, to $d_1c_1 \equiv d_2c_2$".[24]

(C.8) „Niech dana będzie półpłaszczyzna $W$ o brzegu $K$, odcinek $ab \subset K$ i trójkąt $pqr$. Jeżeli $ab \equiv pq$, to istnieje dokładnie jeden punkt $c \in W$ taki, że $ac \equiv pr$ i $bc \equiv pq$".[25]

**9.** W zbiorze wszystkich odcinków związanych definiowana jest relacja porządku:

$$a_1b_1 < a_2b_2 \leftrightarrow_{df} \exists p[\mathrm{B}(a_2pb_2) \wedge a_1b_1 \equiv p_2b_2].$$

Pokazuje się, że relacja ta jest antysymetryczna, przechodnia i spójna w tym sensie, że dla dowolnych $a_1b_1$, $a_2b_2$ zachodzi dokładnie jeden z warunków:

$$(a_1b_1 \equiv a_2b_2) \vee (a_1b_1 < a_2b_2) \vee (a_1b_1 > a_2b_2).$$[26]

[22] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 105.
[23] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 81.
[24] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 81.
[25] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 81.
[26] Twierdzenie o spójności poprzedza uwaga: „Dowiedziemy teraz tzw. prawa trychotomii dla odcinków, które stwierdza, że między parą dowolnie obranych odcinków zachodzi zawsze jedna z relacji przystawania, mniejszości i wiekszości" [Borsuk, Szmielew 1972], s. 91. Zob. też wyżej rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 11.6.

**10.** Środek odcinka. Środkiem odcinka $ab$ nazywany jest punkt $c$, który spełnia warunek:

$$\exists L[a, b, c \in L \wedge ac \equiv cb].$$

Pokazuje się, że jeżeli $c$ jest środkiem odcinka $ab$, to $\mathrm{B}(acb)$.

Twierdzenie o istnieniu środka odcinka.

„43.3.T. Dowolny odcinek ma dokładnie jeden środek".[27]

10.1. Nie będziemy przedstawiać dowodu tego twierdzenia, ale odnotujmy, co następuje. Po pierwsze, dowód prowadzony jest w ramach geometrii absolutnej, tj, bez użycia aksjomatu Euklidesa o prostych równoległych. Po drugie, stosowany jest w nim aksjomat (C.8), który *mówi* o związkach zachodzących na płaszczyźnie. Po trzecie, w dowodzie tym znajdujemy konstrukcję znaną już Euklidesowi, która w *Elementach* przeprowadzana jest za pomocą okręgu (cyrkla) i linii prostej (linijki), a w *Podstawach geometrii* jest oparta na aksjomacie (C.8). Dokładniej: w dowodzie twierdzenia

„To bisect a given straight line",[28]

stosowany jest postulat trzeci

„To describe a circle with any center and distance".[29]

**11.** Struktura odcinków swobodnych.

11.1. Porządek. Przyjmując $\mathfrak{a} = [a_1b_1]$, $\mathfrak{b} = [a_2b_2]$, w zbiorze wszystkich odcinków swobodnych definiowana jest relacja porządku:

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \leftrightarrow_{df} a_1b_1 < a_2b_2.[30]$$

Jest anysymetryczna i przechodnia; „relacja $<$ jest również spójna",[31] tzn. zachodzi dokładnie jeden z warunków:

$$(\mathfrak{a} = \mathfrak{b}) \vee (\mathfrak{a} < \mathfrak{b}) \vee (\mathfrak{a} > \mathfrak{b}).$$

[27] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 93.

[28] [Euklides], Księga I, tw. 10, „Dany odcinek podziel na dwie równe części"; „Daną linią prostą oznaczoną podzielić na dwie równe części" [Czech 1817], s. 14; „Daną prostą skończoną podzielić na pół" [Kołodziejczyk, Szczepkowski 2005(a)], s. 289.

[29] [Euklides], Księga I, *Postulaty*, 3, „Zakreśl okrąg o dowolnym środku i promieniu"; „Z punktu któregokolwiek, iako ze środka; i iakąkolwiek linii prostey długością zakreślić koło" [Czech 1817], s. 4; „narysować koło o dowolnym środku i promieniu" [Kołodziejczyk, Szczepkowski 2005(a)], s. 276.

[30] Fakt, iż tym samym znakiem oznaczany jest porządek odcinków swobodnych i odcinków związanych nie prowadzi do nieporozumień, bo odcinki swobodne i związane są oznaczane w odmienny sposób.

[31] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 106.

Suma. Przyjmując, że $\mathfrak{c} = [ab]$ definiowana jest suma odcinków swobodnych $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \leftrightarrow_{df} \exists p[\mathrm{B}(apb) \wedge \mathfrak{a} = [ap] \wedge \mathfrak{b} = [pb]].$$

Różnica i wielokrotność. Definiowana jest różnica odcinków swobodnych $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \leftrightarrow_{df} \mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}.$$

„Iloczyn $n\mathfrak{a}$ liczby naturalnej $n$ przez odcinek swobodny $\mathfrak{a}$ definiujemy indukcyjnie:

$$1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \qquad (n+1)\mathfrak{a} = n\mathfrak{a} + \mathfrak{a}".^{32}$$

11.2. Związek porządku z dodawaniem.

„50.5.T. Dla dowolnych odcinków swobodnych $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ jest $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odcinek swobodny $\mathfrak{x}$ taki, że $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$".[33]

„50.6.T. Dla dowolnych odcinków swobodnych $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$:

(i) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$;
(ii) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$;
(iii) jeśli $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, to $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} < \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$;
(vi) jeśli $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ i $\mathfrak{c} < \mathfrak{d}$, to $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} < \mathfrak{b} + \mathfrak{d}$".[34]

11.3. Mnożenie przez liczby dwójkowe. Liczby dwójkowe to liczby wymierne postaci $\frac{n}{2^k}$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{N}$. Liczby te tworzą pierścień.

Na podstawie twierdzenia o istnieniu środka odcinka związanego dowodzone jest twierdzenie:

„50.7.T. Dla dowolnego odcinka swobodnego $\mathfrak{a}$ istnieje dokładnie jeden odcinek swobodny $\mathfrak{x}$ taki, że $\mathfrak{x} + \mathfrak{x} = \mathfrak{a}$".[35]

Twierdzenie to uzasadnia następujące definicje:

„Odcinek swobodny $\mathfrak{x}$ taki, że $\mathfrak{a} = 2^k\mathfrak{x}$, będziemy nazywali ilorazem odcinka swobodnego $\mathfrak{a}$ przez liczbę $2^k$ i oznaczali przez $\frac{1}{2^k}\mathfrak{a}$".[36]

[32] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 106.
[33] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 106.
[34] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 106.
[35] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 107.
[36] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 108.

„Określamy iloczyn $w\mathfrak{a}$ liczby dwójkowej $w$ przez odcinek swobodny $\mathfrak{a}$ jako odcinek swobodny $n(\frac{1}{2^k}\mathfrak{a})$".

„51.8.T. Dla dowolnych liczb dwójkowych $w$ i $v$ oraz dla dowolnych odcinków swobodnych $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$:

(i) $w(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = w\mathfrak{a} + w\mathfrak{b}$;
(ii) $(w+v)\mathfrak{a} = w\mathfrak{a} + v\mathfrak{a}$;
(iii) $w(v\mathfrak{a}) = (wv)\mathfrak{a}$;
(iv) jeśli $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, to $w\mathfrak{a} < w\mathfrak{b}$;
(v) jeśli $w < v$, to $w\mathfrak{a} < v\mathfrak{a}$;
(vi) jeśli $w\mathfrak{a} < w\mathfrak{b}$, to $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$;
(vii) jeśli $w\mathfrak{a} < w\mathfrak{b}$, to $w < v$".[37]

„52.1.T. Dla dowolnych trzech różnych punktów $a$, $b$, $c$ zachodzi

$$[ab] + [bc] \geqslant [ac],$$

przy czym $[ab] + [bc] = [ac]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{B}(abc)$".[38]

**13.** Aksjomat ciągłości.

„Weźmy dwa dowolne niepuste zbiory punktów $X$ i $Y$. Jeżeli istnieje punkt $a$ taki, że

$$\text{z } p \in X \text{ i } q \in Y \text{ wynika } B(apq), \tag{1}$$

to istnieje punkt $b$ taki, że

$$\text{z } p \in X - b \text{ i } q \in Y - b \text{ wynika } B(pbq)".[39] \tag{2}$$

Wprost z aksjomatu ciągłości wyprowadzane jest twierdzenie:

„70.1.T. Niech dana będzie oś $\mathfrak{L}$. Każda półprosta osi $\mathfrak{L}$, każdy odcinek otwarty osi $\mathfrak{L}$ i prosta $L$ osi $\mathfrak{L}$ mają własność Dedekinda".[40]

Niech $(X, Y)$ będzie przekrojem zbioru $(L, \prec)$. Gdy punktu $b$ jest wyznaczony przez przekrój $(X, Y)$, to zachodzi:

$$\forall p \in X \forall q \in Y [p \preceq b \preceq q].$$

[37] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 109.
[38] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 109.
[39] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 140. W komentarzu czytamy: „Aksjomat ciągłości jest jedynym aksjomatem geometrii absolutnej, w którym korzysta się z ogólnego pojęcia zbioru".
[40] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 140.

Na podstawie aksjomatu ciągłości dowodzony jest:

„Pewnik Archimedesa. [...] Weźmy półprostą $A$ o początku $a_0$, odcinek $cd$ i punkt $b \in A$ taki, że $a_0b > cd$. Istnieje wówczas liczba naturalna $n$ taka, że wśród punktów $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ określonych przez warunki

$$a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \prec a_{n+1}, \quad a_{k-1}a_k \equiv cd \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n+1,$$

punkty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ leżą na odcinku $(a_0b\rangle$, a punkt $b$ następuje po punkcie $b$".[41]

Z Pewnika Archimedesa wyprowadzane są następujące prawa dotyczące odcinków swobodnych $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$:

(71.2.) $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \to \exists n \in \mathbb{N}[n\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b} \wedge (n+1)\mathfrak{a} > b]$,
(71.3) $\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \exists n \in \mathbb{N}[n\mathfrak{a} > \mathfrak{b}]$,
(71.4) $\exists k \in \mathbb{N}[\frac{1}{2^k}\mathfrak{a} < \mathfrak{b}]$,
(71.5) $\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \exists n, k \in \mathbb{N}[\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \to \mathfrak{a} < \frac{n+1}{2^k}\mathfrak{c} < \mathfrak{b}]$.

**14.** Miara. Miara odcinków związanych to funkcja rzeczywista $\varphi$ określona na zbiorze odcinków związanych, przyjmującą wartości dodatnie i taka, że zachodzi:

(i) $a_1c_1 \equiv a_2c_2 \to \varphi(a_1c_1) = \varphi(a_2c_2)$,
(ii) $\mathrm{B}(abc) \to \varphi(ac) = \varphi(ac) + \varphi(bc)$.

Niech $\varphi$ będzie miarą odcinków związanych. Miarą odcinków swobodnych nazywamy funkcję rzeczywistą $\psi$ określoną jak następuje:

$$\mathfrak{a} = [ab] \to \psi(\mathfrak{a}) = \varphi(ab).$$

„78.3.T. Jeżeli $\psi$ jest miarą odcinków swobodnych, to dla dowolnych $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ i dowolnej liczby dwójkowej $w$ zachodzi

(i) $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \leftrightarrow \psi(\mathfrak{a}) < \psi(\mathfrak{b})$,
(ii) $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \to \psi(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \psi(\mathfrak{a}) - \psi(\mathfrak{b})$,
(iii) $\psi(w\mathfrak{a}) = w\psi(\mathfrak{a})$ ".[42]

Dowodzone są twierdzenia:

„Jeżeli funkcja $\psi$ jest miarą odcinków swobodnych, to miarą odcinków swobodnych jest również każda funkcja $\lambda\psi$, gdzie $\lambda$ jest dodatnią stałą".

[41] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 142.
[42] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 155.

„78.5.T. Jeżeli $\psi_0$ jest miarą ustaloną miarą odcinków swobodnych, to dla dowolnej miary odcinków swobodnych $\psi$ istnieje taka liczby rzeczywista $\lambda > 0$, że $\psi = \lambda\psi_0$".[43]

**15.** Zanim przejdziemy do twierdzenia o istnieniu miary przedstawimy fakty, które w jego dowodzie uznano za oczywiste.

(1) Zbiór dodatnich liczb dwójkowych $\Theta$ jest gęsty w $(\mathbb{R}_+, <)$. Najpierw zauważmy, że zbiór $\Theta$ jest gęsty w $(\mathbb{Q}_+, <)$. Niech $p, q \in \mathbb{Q}_+$ i $p < q$. Ciąg $\frac{1}{2^k}$ jest zbieżny do zera, dlatego dla pewnego $k$ zachodzi $\frac{1}{2^k} < q - p$. Na mocy aksjomatu Archimedesa, dla pewnego $n$ jest $p < \frac{n}{2^k} < q$.

Niech teraz $r, s \in \mathbb{R}_+$ i $r < s$. Na podstawie gęstości $\mathbb{Q}_+$ w $(\mathbb{R}_+, <)$ dostajemy, że dla pewnych $p, q \in \mathbb{Q}_+$ zachodzi $r < p < q < s$. Przyjmując, że liczba dwójkowa $w$ leży między $p$ i $q$, dostajemy $r < w < s$.

(2) Niech $w \in \Theta$, niech $r, s \in \mathbb{R}_+$ i niech będzie $w < r + s$. Wtedy

$$\exists w_1, w_2 \in \Theta[w = w_1 + w_2,\ w_1 < r,\ w_2 < s].$$

Istotny jest tylko przypadek, gdy $r < \frac{w}{2} < s$. Z gęstości $\Theta$ w $\mathbb{R}_+$ wynika, że istnieje taka liczba dwójkowa $\theta$, że zachodzi

$$w - s = \frac{w}{2} - \left(s - \frac{w}{2}\right) < \theta < r < \frac{w}{2} < \frac{r+s}{2} < s = \frac{w}{2} + \left(s - \frac{w}{2}\right).$$

Liczba $w - \theta$ jest dwójkowa, spełniona jest też nierówność $w - \theta < s$. Zatem otrzymujemy $w = \theta + (w - \theta)$, $\theta < r$, $w - \theta < s$.

(3) Niech $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$ będą przekrojami zbioru liniowo uporządkowanego $(X, <)$. Wówczas

$$(A_1 \subset B_1,\ A_2 \subset B_2) \to (A_1 = B_1,\ A_2 = B_2).$$

Wynika to wprost z definicji przekroju.

(4) Jeżeli zbiór $O$ jest ośrodkiem przestrzeni $(\mathbb{R}, <)$, to przekrój $(A_1, A_2)$ zbioru $(O, <)$ wyznacza dokładnie jedną liczbę rzeczywistą $\alpha$, która spełnia warunek

$$\forall a_1 \in A_1 \forall a_2 \in A_2[a_1 \leqslant \alpha \leqslant a_2].$$

Istotnie. Niech $(A_1, A_2)$ będzie przekrojem zbioru $(O, <)$. Przyjmijmy $\alpha = \sup A_1$. Oczywiście jest $\forall a_1 \in A_1[a_1 \leqslant \alpha]$. Przypuśćmy, że dla pewnego $a_2' \in A_2$ jest $a_2' < \alpha$. Wówczas $\forall a_1 \in A_1[a_1 < a_2' < \alpha]$, co jest sprzeczne z definicją liczby $\alpha$.

[43] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 155.

Przypuśćmy teraz, że dla pewnej liczby $\beta$, takiej że $\beta \neq \alpha$, zachodzi

$$\forall a_1 \in A_1 \forall a_2 \in A_2 [a_1 \leqslant \beta \leqslant a_2].$$

Niech $\alpha < \beta$. Wtedy dla pewnego $a \in O$ jest $\alpha < a < \beta$. W zależności od tego, czy $a \in A_1$, czy $a \in A_2$ otrzymujemy sprzeczność z definicją liczby $\alpha$ lub $\beta$.

Z drugiej strony jest też tak, że liczba rzeczywista $\alpha$ wyznacza, co najwyżej, dwa różne przekroje zbioru $(O, <)$, mianowicie $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$, gdzie

$$A_1 = \{a_1 \in O : a_1 \leqslant \alpha\}, \qquad A_2 = \{a_2 \in O : a_2 > \alpha\},$$

$$B_1 = \{b_1 \in O : b_1 < \alpha\}, \qquad B_2 = \{b_2 \in O : b_2 \geqslant \alpha\}.$$

Gdy $\alpha \in O$, to pary $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$ są różnymi zbiorami, ale na podstawie wyżej poczynionych uwag, zarówno $(A_1, A_2)$, jak i $(B_1, B_2)$ wyznaczają liczbę $\alpha$, i w tym sensie nie są one „istotnie różne".

Gdy $\alpha \notin O$, to $(A_1, A_2) = (B_1, B_2)$, a ponadto zachodzi:

$$\forall a_1 \in A_1 \forall a_2 \in A_2 [a_1 < \alpha < a_2].$$

Reasumując to, co powiedziane w punkcie (4): tak jak jest wzajemna odpowiedniość między przekrojami zbioru $(\mathbb{R}, <)$ a liczbami rzeczywistymi (zasada ciągłości), tak samo zachodzi wzajemna odpowiedniość między przekrojami zbioru $(O, <)$ a liczbami rzeczywistymi.

**16.** Twierdzenie o istnieniu miary.

„Niech $\mathfrak{a}_0$ będzie dowolnym odcinkiem swobodnym, a $x_0$ dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Istnieje dokładnie jedna miara odcinków swobodnych $\psi$ taka, że $\psi(\mathfrak{a}_0) = x_0$".[44]

Z twierdzenia 78.5. wynika, że istnieje co najwyżej jedna taka miara. Dowód polega zatem na wskazaniu takiej jednej miary $\psi$, że $\psi(\mathfrak{a}_0) = x_0$.

„Najpierw skonstruujemy miarę $\psi$ przyporządkowującą odcinkowi $\mathfrak{a}_0$ liczbę 1 ".[45]

[44] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 156.
[45] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 156.

Niech $\Theta$ oznacza zbiór liczb dwójkowych dodatnich. Definiowana jest para zbiorów $(\Theta_1^{(\mathfrak{a})}, \Theta_2^{(\mathfrak{a})})$:

$$\Theta_1^{(\mathfrak{a})} = \{w \in \Theta : w\mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a}\}, \quad \Theta_2^{(\mathfrak{a})} = \{w \in \Theta : w\mathfrak{a}_0 \geqslant \mathfrak{a}\}.$$[46]

Korzystając z twierdzeń 71.3, 71.4, 51.8.(vii), pokazuje się, że jest ona przekrojem zbioru $(\Theta, <)$ z naturalnym porządkiem. Następnie czytamy:

„a że zbiór $\Theta$ jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, więc istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista dodatnia $x_{\mathfrak{a}}$ taka, że dla dowolnych liczb dwójkowych $w_1$ i $w_2$ z nierówności $w_1 < x_{\mathfrak{a}} < w_2$ wynika, że $w_1 \in \Theta_1^{(\mathfrak{a})}$ i $w_2 \in \Theta_2^{(\mathfrak{a})}$ ".[47]

To, że przekrój $(\Theta_1^{(\mathfrak{a})}, \Theta_2^{(\mathfrak{a})})$ wyznacza dokładnie jedną liczbę rzeczywistą, $x_{\mathfrak{a}}$, uzasadniliśmy w poprzednim paragrafie, w punkcie (4). Przy założeniu $x_{\mathfrak{a}} \notin \Theta$, istotnie zachodzi:

$$\forall w_1 \in \Theta_1^{(\mathfrak{a})} \forall w_2 \in \Theta_2^{(\mathfrak{a})} [w_1 < x_{\mathfrak{a}} < w_2].$$

W następnym kroku dowodu definiowana jest funkcja $\psi$:

$$\psi(\mathfrak{a}) = x_{\mathfrak{a}}.$$

Oczywiście $\psi(\mathfrak{a}) \in \mathbb{R}_+$. Pozostaje wykazać addytywność funkcji $\psi$:

$$\psi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \psi(\mathfrak{a}) + \psi(\mathfrak{b}).$$

Liczba $\psi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = x_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ jest wyznaczona przez przekrój $(\Theta_1^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}, \Theta_2^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})})$, liczba $\psi(\mathfrak{a}) = x_{\mathfrak{a}}$ – przez przekrój $(\Theta_1^{(\mathfrak{a})}, \Theta_2^{(\mathfrak{a})})$, liczba $\psi(\mathfrak{b}) = x_{\mathfrak{b}}$ – przez przekrój $(\Theta_1^{(\mathfrak{b})}, \Theta_2^{(\mathfrak{b})})$. Na podstawie faktów opisanych w poprzednim paragrafie, w punkcie (4) wiadomo, że $\psi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ jest jedyną liczbą, która spełnia warunek:

$$\forall w_1 \in \Theta_1^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})} \forall w_2 \in \Theta_2^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})} [w_1 \leqslant \psi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \leqslant w_2].$$

Aby udowodnić równość $\psi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \psi(\mathfrak{a}) + \psi(\mathfrak{b})$, wystarczy pokazać, że liczba $x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} = \psi(\mathfrak{a}) + \psi(\mathfrak{b})$ spełnia warunek

$$\forall w_1 \in \Theta_1^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})} \forall w_2 \in \Theta_2^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})} [w_1 \leqslant x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} \leqslant w_2].$$

[46] Zauważmy, że w definicji tej pokazuje się iluzoryczność dychotomii arytmetyczne-geometryczne: para $(\Theta_1^{(\mathfrak{a})}, \Theta_2^{(\mathfrak{a})})$ jest przekrojem zbioru $(\Theta, <)$ i jako taka mogłaby być uznana za obiekt arytmetyki liczb rzeczywistych, jednakże jest ona definiowana w strukturze odcinków swobodnych.

[47] [Borsuk, Szmielew 1972] s. 157.

To zaś można osiągnąć w następujący sposób.

Przyjmując, że $x_{\mathfrak{a}}, x_{\mathfrak{b}} \notin \Theta$, liczba rzeczywista $x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} \notin \Theta$. Gdy liczba $x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}}$ nie jest dwójkowa, to wyznacza dokładnie jeden przekrój zbioru $(\Theta, <)$, mianowicie parę

$$(\{w \in \Theta : w < x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}}\}, \{w \in \Theta : w > x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}}\}).$$

Pokazując, że zachodzi

$$\{w \in \Theta : w < x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}}\} \subset \Theta_1^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}, \qquad \{w \in \Theta : w > x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}}\} \subset \Theta_2^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})},$$

na podstawie uwagi (3) z poprzedniego paragrafu, dostajemy

$$\{w \in \Theta : w < x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}}\} = \Theta_1^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}, \qquad \{w \in \Theta : w > x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}}\} = \Theta_2^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}.$$

W ten sposób addytytwność funkcji $\psi$ sprowadza się do związków:

$$\forall w_1 \in \Theta[w_1 < x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} \to w_1 \in \Theta_1^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}],$$

$$\forall w_2 \in \Theta[x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} < w_2 \to w_2 \in \Theta_2^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}].$$

I właśnie te nierówności są dowodzone w *Podstawach geometrii*. Czytamy:

„Mamy dowieść, że $\psi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}}$, to znaczy, że dla dowolnych liczb dwójkowych $w_1$ i $w_2$ nierówność $w_1 < x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} < w_2$ pociąga za sobą

$$w_1 \in \Theta_1^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})} \quad \text{i} \quad w_2 \in \Theta_2^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}\ \text{”}.^{48}$$

Dowód zależności

$$\forall w_1 \in \Theta \left[w_1 < x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} \to w_1 \in \Theta_1^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}\right]$$

sprowadza się do obserwacji, że każdą liczbę dwójkową $w_1$, gdzie $w_1 < x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}}$, można przedstawić w postaci sumy takich liczb dwójkowych $w_1'$, $w_2''$, $w_1 = w_1' + w_2''$, które spełniają nierówność $w_1' < x_{\mathfrak{a}}$, $w_2'' < x_{\mathfrak{b}}$.

Jest bowiem tak, że gdy $w_1' < x_{\mathfrak{a}}$, to $w_1' \in \Theta_1^{(\mathfrak{a})}$ i gdy $w_2'' < x_{\mathfrak{b}}$, to $w_2'' \in \Theta_1^{(\mathfrak{b})}$. Stąd zaś wynika, że

$$w_1' \mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a}, \quad \text{i} \quad w_2'' \mathfrak{a}_0 < \mathfrak{b}.$$

[48] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 157. Fakt, że występują tu nierówności ostre związany jest tylko z tym, że w przypadku równości dowodzone dalej fakty są oczywiste.

Z kolei z nierówności tych, na podstawie twierdzeń 50.6.(iv) oraz 51.8.(ii), dostajemy

$$w_1\mathfrak{a}_0 = (w_1^{'} + w_2^{''})\mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$

czyli $w_1 \in \Theta_1^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}$.

W *Podstawach geometrii* dowód zależności

$$\forall w_1 \in \Theta \left[ w_1 < x_\mathfrak{a} + x_\mathfrak{b} \to w_1 \in \Theta_1^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})} \right],$$

jest właśnie sprowadzony do przedstawienia liczby $w_1$:

„Niech $w_1 < x_\mathfrak{a} + x_\mathfrak{b}$. Z arytmetyki liczb dwójkowych wiadomo, że liczba $w_1$ daje się przedstawić jako suma dwóch liczb dwójkowych: $w_1 = w_1^{'} + w_2^{''}$, takich, że $w_1^{'} < x_\mathfrak{a}$ i $w_2^{''} < x_\mathfrak{b}$. Z określenia liczb $x_\mathfrak{a}$ i $x_\mathfrak{b}$ wynika, że $w_1^{'} \in \Theta_1^{(\mathfrak{a})}$ i $w_2^{''} \in \Theta_2^{(\mathfrak{a})}$, tzn.

$$w_1^{'}\mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a} \qquad \text{i} \qquad w_2^{''} < \mathfrak{b},$$

skąd na mocy 50.6.(iv) oraz 51.8.(i) otrzymujemy $w_1\mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, czyli $w_1 \in \Theta_1^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}$„.[49]

Podobnie pokazuje się, że zachodzi

$$w_2 > x_\mathfrak{a} + x_\mathfrak{b} \to w_2 \in \Theta_2^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}.$$

**17.** Twierdzenie o surjektywności miary.

„Dana jest miara odcinków związanych $\varphi$ oraz półprosta $A$ o początku w punkcie $a$. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > 0$ istnieje (dokładnie jeden) punkt $b \in A$ taki, że $\varphi(ab) = x$ ”.[50]

Niech $b_0 \in A$, niech $\varphi(ab_0) = x_0$. Dla dowodu istotne są dwa fakty:

(1) „dla dowolnej liczby dwójkowej $w$ istnieje taki punkt $p \in A$, że $\varphi(ap) = wx_0$”,[51]
(2) „dla dowolnych punktów $p_1, p_2 \in A$
$\varphi(ap_1) < \varphi(ap_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p_1 \prec p_2$ ”.[52]

W *Podstawach* fakty te są podane jako oczywiste. Istotnie łatwo można je udowodnić, jednak z *filozoficznego* punktu widzenia fakt (1) jest bardzo ważny.

[49] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 157.
[50] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 157.
[51] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 158.
[52] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 158.

Ad (1). Niech $w = \frac{n}{2^k}$. Na podstawie twierdzenie o środku odcinka istnieje taki punkt $r_1$, że $B(ar_1b)$ i $ar_1 \equiv r_1b$. Z twierdzenia 78.3 dostajemy $\varphi(ar_1) = \frac{1}{2}x_0$. Powtarzając tę operację w odniesieniu do odcinka $ar_1$ znajdujemy taki punkt $r_2$, że $B(ar_2r_1)$ i $ar_2 \equiv r_1r_2$. Ponadto zachodzi $\varphi(ar_2) = \frac{1}{2^2}x_0$. Ostatecznie znajdujemy taki punkt $r_k$, że $B(ar_kr_{k-1})$, $ar_k \equiv r_{k-1}r_k$ i $\varphi(ar_k) = \frac{1}{2^k}x_0$.

Dla miary odcinków swobodnych $\psi$ wyznaczonej przez $\varphi$ zachodzi $\psi([ar_k]) = \frac{1}{2^k}x_0$. Przyjmując $\mathfrak{b} = n[ar_k]$, dostajemy $\psi(\mathfrak{b}) = wx_0$. Jednocześnie $\mathfrak{b} = [cd]$ i na podstawie aksjomatu (C.6) na półprostej $A$ istnieje dokładnie jeden punkt $b$ taki, że $ab \equiv cd$. Ostatecznie $\varphi(ab) = \psi([cd]) = wx_0$.

Ad (2). Gdy $p_1 \prec p_2$, to $ap_1 < ap_2$ i $[ap_1] < [ap_2]$. Jeżeli miara odcinków swobodnych $\psi$ jest wyznaczona przez $\varphi$, to na podstawie twierdzenia 78.3 otrzymujemy

$$\varphi(ap_1) = \psi([ap_1]) < \psi([ap_2]) = \varphi(ap_2).$$

Korzystając ze spójności porządku $\prec$, implikacja

$$\varphi(ap_1) < \varphi(ap_2) \to p_1 \prec p_2$$

sprowadza się do wyżej pokazanej implikacji $p_2 \prec p_1 \to \varphi(ap_2) < \varphi(ap_1)$.

Przejdźmy do dowodu twierdzenia o surjektywności miary. Przyjmijmy, że $x \in \mathbb{R}_+$ jest ustaloną liczbą. Definiowane są zbiory:

$$X_1 = \{p \in A : \varphi(ap) < x\}, \qquad X_2 = \{p \in A : \varphi(ap) \geqslant x\}.^{53}$$

Pierwsza część dowodu polega na wykazaniu, że para $(X_1, X_2)$ jest przekrojem zbioru $(A, \prec)$. To, że klasy $X_1$, $X_2$ są niepuste otrzymujemy w następujący sposób.

Dla pewnych $k, n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\frac{1}{2^k}x_0 < x \leqslant nx_0.$$

Wiemy już, że dla pewnych $q_1, q_2 \in A$ będzie

$$\varphi(aq_1) = \frac{1}{2^k}x_0, \qquad \varphi(aq_2) = nx_0,$$

a zatem $q_1 \in X_1$ i $q_2 \in X_2$.

Następnie, zachodzi

$$p_1 \in X_1, p_2 \in X_2 \to \varphi(ap_1) < x \leqslant \varphi(ap_2),$$

stąd zaś wynika, że $p_1 \prec p_2$.

[53] Zauważmy, że przekrój półprostej jest definiowany przez nierówności w ciele liczb rzeczywistych.

„Niech $b$ będzie punktem wyznaczonym przez przekrój $(X_1, X_2)$ na półprostej $A$".[54]

Druga część dowodu polega na uzasadnieniu równości $\varphi(ab) = x$.

Po pierwsze, z definicji liczby $b$ wynika, że

$$\forall x_1 \in X_1 \forall x_2 \in X_2 [x_1 \preceq b \preceq x_2].$$

Przypuśćmy teraz, że $\varphi(ab) < x$. Wówczas $b \in X_1$. Z gęstości $\Theta$ w $(\mathbb{R}, <)$ wnosimy, że dla pewnej liczby dwójkowej $w$ zachodzi

$$\frac{\varphi(ab)}{x_0} < w < \frac{x}{x_0}.$$

Dla pewnego $q \in A$ jest $\varphi(aq) = wx_0$. Z jednej strony mamy $\varphi(ab) < wx_0 = \varphi(aq)$, zatem $b \prec q$. Z drugiej strony zachodzi $\varphi(aq) = wx_0 < x$, zatem $q \in X_1$. Ostatecznie

$$\exists x_1 \in X_1 [b \prec x_1],$$

co jest sprzeczne z faktem $\forall x_1 \in X_1 [x_1 \preceq b]$.

Podobnie pokazuje się, że do sprzeczności prowadzi hipoteza $\varphi(ab) > x$. Zatem $\varphi(ab) = x$.

**18.** Metryka w przestrzeni $\mathcal{S}$. Długość odcinka:

„Wartość $\varphi(ab)$, jaką miara $\varphi$ przyjmuje na odcinku $ab$ będziemy nazywać również *długością odcinka ab ze względu na miarę* $\varphi$ i oznaczać przez $|ab|_\varphi$".[55]

Niech $\varphi$ będzie dowolną miarą odcinków związanych. W zbiorze $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ definiowana jest funkcja

$$\rho_\varphi(ab) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a = b \\ |ab|_\varphi, & \text{gdy } a \neq b. \end{cases}$$

Jest $\rho_\varphi(ab) = 0 \leftrightarrow a = b$, $\rho_\varphi(ab) = \rho_\varphi(ba)$ oraz, na podstawie twierdzeń 52.1, 78.3 (i),

$$\rho_\varphi(ab) + \rho_\varphi(bc) \geqslant \rho_\varphi(ac).$$

Tak więc funkcja $\rho_\varphi$ jest metryką,

[54] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 158.
[55] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 158.

„nazywamy ją *metryką wyznaczoną przez miarę* $\varphi$. Metryki wyznaczone przez miary będziemy nazywać *właściwymi*. Odtąd przez metrykę rozumieć będziemy zawsze metrykę właściwą".[56]

**19.** Za pomocą metryki definiowany jest układ współrzędnych na prostej. Niech $a_0 \in L$. Niech $A$ będzie jedną z dwóch półprostych, jakie na $L$ wyznacza punkt $a_0$. Definiowana jest funkcja $\Phi : p \in L \mapsto x^p \in \mathbb{R}$

$$x^p = \begin{cases} |a_0p|, & \text{gdy } p \in A \\ 0, & \text{gdy } p = a_0 \\ -|a_0p|, & \text{gdy } p \in A^*. \end{cases}$$

„Funkcję $\Phi$ [...] nazywamy *układem współrzędnych* wyznaczonym na prostej $L$ przez *początek* $a_0$ i *półprostą dodatnią* $A$; liczbę $x^p$ nazywamy *współrzędną punktu* $p$ w *układzie* $\Phi$".[57]

Po tym następuje twierdzenie określające związek między prostą a liczbami rzeczywistymi:

„87.2.T. Dowolny układ współrzędnych $\Phi$ na prostej $L$ przekształca izometrycznie prostą $L$ na przestrzeń kartezjańską $\mathbf{C}_1$".[58]

$\mathbf{C}_1$ oznacza tu przestrzeń $\mathbb{R}$, w której odległość $\varrho(x, y)$ jest dana wzorem $|x - y|$.[59] Funkcja $f : L \mapsto \mathbb{R}$ jest izometrią przestrzeni metrycznych $(L, \rho_\varphi)$ i $(\mathbb{R}, \varrho)$, gdy $f$ jest bijekcją i zachodzi $\rho_\varphi(x, y) = \varrho(f(x), f(y))$.

Warunki te spełnia układ współrzędnych $\Phi : L \mapsto \mathbb{R}$. Istotnie, gdy na prostej $L$ dany jest układ współrzędnych, to wyróżniony jest pewien punkt $a_0$. Niech $p, q \in L$ i niech $p \neq q \neq a_0$. Na podstawie aksjomatu (O.4) należy zbadać trzy przypadki: $B(a_0pq)$, $B(pqa_0)$, $B(pa_0q)$. Rozpatrzymy pierwszy z nich.

Gdy $B(a_0pq)$, to na podstawie twierdzenia 52.1. zachodzi $[a_0p] + [pq] = [a_0q]$. Stąd zaś $\varphi(a_0p) + \varphi(pq) = \varphi(a_0q)$. Następnie

$$\rho_\varphi(pq) = \varphi(pq) = \varphi(a_0q) - \varphi(a_0p) = |\Phi(q) - \Phi(p)| = \varrho(\Phi(p), \Phi(q)).$$

Twierdzenie 82.7. opatrzone jest takim komentarzem:

„W ten sposób wykazaliśmy, że każda prosta jest izometryczna z $\mathbf{C}_1$, a więc nie różni się pod względem swych własności metrycznych od przestrzeni kar-

[56] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 163.
[57] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 170.
[58] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 171.
[59] Zob. [Borsuk, Szmielew 1972], s. 23.

tezjańskiej $\mathbf{C}_1$. Możemy więc powiedzieć, że aksjomaty geometrii absolutnej charakteryzują prostą pod względem metrycznym".[60]

Jeżeli aksjomatowi Cantora-Dedekinda można przypisać jakiś matematyczny sens, to będzie to powyższe twierdzenie. A zatem aksjomat Cantora-Dedekinda to teza, że linia prosta jest izometryczna z przestrzenią kartezjańską $\mathbf{C}_1$.

[60] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 171.

# O aspektach linii prostej

**20.** Z ontologicznego punktu widzenia prosta jest przedmiotem wyznaczonym przez relacje zapisane w aksjomatach. Są w nich określone związki punktów z punktami, z prostymi, z płaszczyznami i z przestrzenią. Punkty prostej mogą być rozpatrywane z uwagi na relację B; wyznaczają one odcinki, które mogą być rozpatrywane z uwagi na relację D. Punkty na płaszczyźnie wyznaczają trójkąty, co pozwala rozpatrywać relacje między trójkątami i prostą.

Gdy porównujemy *Podstawy geometrii* z *Elementami* Euklidesa, to związki zapisane w aksjomatach *Podstaw* odnajdujemy wprost lub *implicite* (*vide* aksjomat Pascha) u Euklidesa. Zestawienie to pozwala zobaczyć, że w *Podstawach* nie występuje pojęcie okręgu, że odcinki nie są rozpatrywane z uwagi na relację proporcji (*vide Elementy*, Księga V). Z kolei w *Elementach* nie jest stosowany aksjomat ciągłości. I już chociażby ten ostatni punkt pozwala uznać, że w *Podstawach* prosta jest innym przedmiotem niż w *Elementach* Euklidesa.

Widzimy też, że żaden z aksjomatów *Podstaw* nie traktuje o związku między prostą, a liczbami rzeczywistymi, między płaszczyzną a liczbami zespolonymi. Nie od razu też widać, które aksjomaty otwierają możliwość takim relacjom.

20.1. W ramach systemu geometrii definiowana jest topologia $\tau$ na prostej $L$. Nazywamy to aspektem – para $(L, \tau)$ jest aspektem linii prostej. Aspekt oznacza tu sposób ujęcia, sposób opisu przedmiotu, który – powtórzmy – wprost jest dany przez relacje zapisane w aksjomatach.

Przyjmijmy, że ciągłość rozumiemy jako charakterystykę porządku liniowego; nie charakteryzuje ona ani relacji B, ani relacji D, nie jest zatem własnością prostej rozumianej jako przedmiot, który wprost jest wyznaczony przez relacje zapisane w aksjomatach.

Wyróżniając na prostej dwa punkty, wyznaczamy pewną półprostą i wprowadzamy porządek liniowy. Para $(L, \prec)$ jest aspektem prostej. Cią-

głość jest cechą prostej uporządkowanej, charakteryzuje zatem nie prostą, ale jej aspekt.

20.2. W geometrii definiowana jest struktura odcinków, najpierw związanych, następnie swobodnych. Miara $\varphi$ każdemu odcinkowi przyporządkowuje liczbę rzeczywistą – długość. Definicja miary wyprowadza już poza system geometrii. Rozumiemy to w ten sposób: nie jest tak, że aksjomaty ograniczają zakres możliwych porównań, chociaż liczba rzeczywista nie jest definiowana w systemie geometrii, to obiekty definiowane w tym systemie mogą być porównywane z liczbami rzeczywistymi.

Długość, lub para $(ab, \varphi(ab))$ to aspekt odcinka $ab$. Niczego podobnego nie znajdziemy w *Elementach* – odcinkowi nie przypisuje się tam ani liczby rzeczywistej, ani żadnego innego obiektu. Z drugiej strony o odcinkach jest powiedziane w *Elementach* coś więcej niż w *Podstawach*. W teorii proporcji rozwiniętej w Księdze V jest przyjęte, co prawda nie wprost, że odcinki tworzą strukturę porządkowo-algebraiczną $\mathfrak{M} = (M, +, <)$, przy czym tylko jeden aksjomat charakteryzujący związek dodawania z porządkiem jest sformułowany *explicite*, mianowicie aksjomat Archimedesa:

$$\forall a, b \in M \exists n[na > b].$$

Rekonstruując strukturę dedukcyjną Księgi V, można ustalić dwa kolejne aksjomaty:

$$\forall a, b \in M[a > b \to \exists c \in M[a = b + c]],$$

$$\forall a, b, c \in M[a > b \to a + c > b + c].$$ [61]

Aksjomaty te odnajdujemy w *Podstawach* jako twierdzenia opisujące strukturę odcinków swobodnych: 71.2, 50.5, 50.6.(iii).

20.3. Gdy dana jest miara $\varphi$, w przestrzeni, i odpowiednio na prostej $L$, wprowadzana jest metryka $\rho_\varphi$. Para $(L, \rho_\varphi)$ jest aspektem prostej $L$.

Wybierając na prostej punkt $a_0$, wyznaczamy dwie półproste; wybierając kolejny punkt $b$, gdzie $b \neq a_0$, wyróżniamy jedną z nich i na prostej jest definiowany układ współrzędnych $\Phi$.

20.4. Podobnie jest z liczbami rzeczywistymi. Przyjmijmy, że liczby rzeczywiste to *ex definitione* ciało uporządkowane w sposób ciągły. W ciele uporządkowanym definiowana jest wartość bezwzględna:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

[61] Zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 1–6.

Następnie definiowana jest funkcja:

$$\varrho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto |x - y|,$$

o której, na podstawie zależności zachodzących w ciele uporządkowanym, pokazuje się, że spełnia aksjomaty metryki. Para $(\mathbb{R}, \varrho)$ jest aspektem ciała liczb rzeczywistych.

Aspekty $(L, \rho_\varphi)$ oraz $(\mathbb{R}, \varrho)$ są porównywane z punktu widzenia zapisanego w pojęciu izometrii. Z ontologicznego punktu widzenia w aksjomacie Cantora-Dedekinda ustanawiany jest związek między wybranymi aspektami linii prostej i liczb rzeczywistych, mianowicie między $(L, \rho_\varphi)$ oraz $(\mathbb{R}, \varrho)$.

20.5. Wyżej napisaliśmy, że żaden z aksjomatów *Podstaw geometrii* nie mówi o związku między prostą, a liczbami rzeczywistymi, jak zatem jest możliwy aksjomat Cantora-Dedekinda?

Po pierwsze możliwość porównania linii prostej z liczbami rzeczywistymi stwarza pojęcie długości odcinka. Związana jest z tym zasada, która – jak już wiemy – nie jest podana *explicite*, że obiekty definiowane w ramach geometrii mogą być porównywane z obiektami, które nie są definiowane w ramach geometrii.

Po drugie, pozwala na to szczególne rozumienie prostej, które nie jest zapisane w żadnym aksjomacie i które nie wiąże się z tym, że prosta jest pojęciem pierwotnym. Otóż definiując układ współrzędnych $\Phi : L \mapsto \mathbb{R}$ prosta $L$ jest pojmowana jako „figura geometryczna", czyli „szczególny zbiór punktów". Karol Borsuk i Wanda Szmielew przedstawiają to jedynie jako konwencję językową, powtórzmy:

„Zbiory punktów będziemy nazywali *figurami*. Zatem proste i płaszczyzny są szczególnymi przypadkami figur".

Nie chodzi tu bynajmniej o pojęcie zbioru, ale o samo rozumienie prostej: nazywając linię prostą figurą przyjmuje się, że składa się ona z punktów. Dla kontrastu, w *Elementach* Euklidesa na prostej można owszem wyróżnić punkty, np. punkt przecięcia prostej z inną prostą, czy z okręgiem, ale w żadnym razie nie jest tak, że prosta składa się z punktów. W *Podstawach geometrii* nazywając linię prostą figurą geometryczną wprowadza się takie jej rozumienie, które nie jest zapisane w żadnym aksjomacie.

Jeżeli aksjomatowi Cantora-Dedekinda można przypisać jakiś filozoficzny sens to będzie to supozycja, że prosta składa się z punktów. Tę myśl znajdujemy w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, w zdaniu:

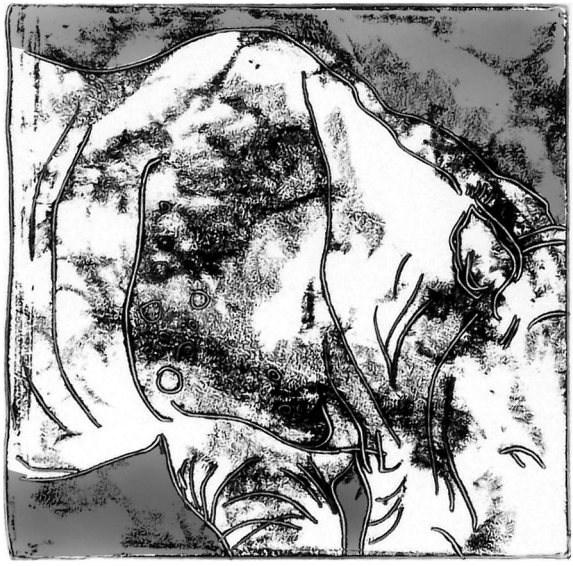
„Jeżeli $p$ jest określonym punktem $L$, to wszystkie punkty $L$ rozpadają się na dwie klasy $P_1$, $P_2$, z których każda zawiera nieskończenie wiele indywiduów;

pierwsza klasa $P_1$ zawiera wszystkie punkty $p_1$, które leżą na lewo od $p$, a druga klasa $P_2$ zawiera wszystkie punkty $p_2$, które leżą na prawo od $p$; sam punkt $p$ może być zaliczony albo do $P_1$, albo do $P_2$. W każdym razie rozkład punktów prostej na dwie klasy lub części $P_1$, $P_2$ jest zawsze tego rodzaju, że każdy punkt klasy $P_1$ leży na lewo od każdego punktu klasy $P_2$".[62]

Dedekind był pierwszym matematykiem, który w ten sposób pomyślał o linii prostej i przyjął, że składa się ona z punktów, które są – jak to dzisiaj mówimy – uporządkowane liniowo.

[62] [Dedekind 1872], s. 139.

# KONSTRUKCJA CANTORA



# Konstrukcja

Cantora konstrukcja liczb rzeczywistych jest zarysowana w pierwszej części trzytomowej *Analizy* Krzysztofa Maurina i stanowi podstawę przebogatej prezentacji najróżniejszych metod XX-wiecznej analizy matematycznej.[1] Punktem wyjścia samej konstrukcji są w tym ujęciu liczby wymierne.

Szczegółowy opis konstrukcji znajdujemy w *Arytmetyce teoretycznej* Wacława Sierpińskiego.[2] Tu przedstawione są jedynie arytmetyczne aspekty liczb rzeczywistych, a cały wykład ma charakter *quasi* filozoficzny: wychodząc od opisu liczb naturalnych, ze struktur prostszych konstruowane są co raz to bardziej złożone struktury arytmetyczne. W rezultacie liczby rzeczywiste znajdują się w łańcuszku wstępujących systemów: liczby całkowite, liczby wymierne, liczby rzeczywiste, liczby zespolone, kwaterniony.[3]

W ujęciu Sierpińskiego dziedziny kolejnych struktur rozszerzane są za pomocą odpowiednich relacji równoważności.

**1.** Przyjmujemy, że dane jest ciało uporządkowane liczb wymiernych $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$. Kolejne kroki konstrukcji są następujące:

(1) $\mathbf{C} =_{df} \{(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \ \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists k \forall m [k < m \to |a_k - a_m| < \varepsilon]\}$,
(2) w $\mathbf{C}$ definiowana jest relacja równowazności

$$(a_n) \approx (b_n) \leftrightarrow_{df} \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists k \forall m [k < m \to |a_m - b_m| < \varepsilon],$$

(3) $\mathbb{R} =_{df} \mathbf{C}/_{\approx}$,
(4) w $\mathbb{R}$ definiowane są działania

$$[(a_n)] \oplus [(b_n)] =_{df} [(a_n + b_n)], \qquad [(a_n)] \odot [(b_n)] =_{df} [(a_n \cdot b_n)],$$

[1] Zob. [Maurin 1991].

[2] Zob. [Sierpiński 1966].

[3] W związku z filozoficznym charakterem tego wykładu zob. np.: „Licząc elementy podzbiorów zbioru $A$ przypisujemy im [...] pewną liczbę naturalną, jako jego liczność. To jest głównym i na pewno najbardziej pierwotnym zastosowaniam liczb naturalnych. Czym więc są liczby naturalne? Odpowiemy za Fregem: liczby naturalne są własnościami zbiorów, gdyż możemy je orzekać o pewnych zbiorach, mówiąc, że mają one tyle a tyle elementów. Cóż to jednak jest własność? Własność jest to ..." [Sierpiński 1966], s. 43.

oraz porządek

$$[(a_n)] \prec [(b_n)] \leftrightarrow_{df} \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists k \forall m [k < m \rightarrow (b_m - a_m) > \varepsilon],$$

(5) $0_R =_{df} [(0, 0, \ldots)]$, $1_R =_{df} [(1, 1, \ldots)]$, czy ogólnie $q_R =_{df} [(q, q, \ldots)]$, gdzie $q \in \mathbb{Q}$.

1.1. Zbiór **C** to zbiór ciągów spełniających warunek Cauchy'ego (ciągów fundamentalnych).

Wartość bezwzględna $|\ |$ występująca w formule definiującej zbiór **C** jest definiowana w zbiorze liczb wymiernych na mocy założenia, że $\mathfrak{Q}$ jest ciałem uporządkowanym:

$$|q| = \begin{cases} q, & \text{dla } q \geqslant 0 \\ -q, & \text{dla } q < 0. \end{cases}$$

Sama definicja ciała uporządkowanego po raz pierwszy została podana przez Hilberta w roku 1900.[4]

Definicję wartości bezwzględnej znajdujemy w pracy Carathéodory'ego z roku 1917.[5] Jest tam pokazane, że w dowolnym ciele uporządkowanym zachodzi:

$$||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|,$$ [6]

co może świadczyć o tym, że fakty te, dzisiaj dowodzone tylko w podręcznikach szkolnych, były traktowane przezeń jako nowe i warte dowodu.

Dla porównania zobaczmy, co w tym samym czasie o wartości bezwzględnej pisali inni matematycy.

Ernesto Cesaro w pracy z roku 1904 nie definiuje wartości bezwzględnej, a pierwsze wystąpienie symbolu $|\ |$ – w związku z definicją granicy, w wyrażeniu $|a_n| < \varepsilon$ – opatrzył takim oto przypisem: „Zwyczajowo $|x|$ oznacza wartość bezwzględną $x$".[7] A kilka stron wcześniej podaje, że liczby $a$ i $-a$ mają tę samą wartość bezwzględną.[8]

Ernest Hobson w monumentalnym wykładzie analizy z roku 1907, podawszy definicję ciągu Cauchy'ego, o wartości bezwzględnej pisze tylko tyle: „Symbol $|x|$ oznacza tu, że jedna z liczb $x$, $-x$ jest dodatnia; $|x|$ nazywamy wartością bezwzględną $x$".[9]

[4] Zob. [Hilbert 1900]; zob. rozdz. *Aksjomaty*, pkt. 1.
[5] [Carathéodory 1917], s. 16.
[6] [Carathéodory 1917], s. 17.
[7] [Cesaro 1904], s. 89.
[8] [Cesaro 1904], s. 82.
[9] [Hobson 1921], s. 27.

1.2. Można sprawdzić, że relacja zdefiniowana w punkcie (2) jest relacją równoważności. O samej relacji równoważności w monografii *Teoria mnogości* czytamy: „Relacje równoważności i klasy równoważności badał pierwszy w pełnej ogólności Frege [*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884]".[10]

1.3. Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest, *ex definitione*, zbiorem ilorazowym (zbiorem klas abstrakcji). W aksjomatycznej teorii mnogości zbiór ilorazowy jest zbiorem na mocy aksjomatu zbioru potęgowego i aksjomatu podzbiorów:

$$\mathbf{C}/_{\approx} = \{z \in P(\mathbf{C}) : \exists x \in \mathbf{C} \forall y[y \in z \Leftrightarrow (y \in \mathbf{C} \wedge y \approx x)]\}.$$

Aksjomat podzbiorów *explicite* sformułował Abraham Fraenkel w roku 1922.[11]

Zbiór ilorazowy można otrzymać też na mocy aksjomatu zastępowania, jako *obraz* zbioru $\mathbf{C}$. Jest bowiem tak, że gdy $\varphi(x, z)$ jest formułą $z = [x]_{\approx}$, to każdemu $x$ odpowiada dokładnie jedno $z$ takie, że $\varphi(x, z)$ i wówczas

$$\mathbf{C}/_{\approx} = \{z : \exists x \in \mathbf{C}[\varphi(x, z)]\}.$$

Aksjomat zastępowania *explicite* sformułował Abraham Fraenkel w roku 1922.[12]

1.4. Sprawdzając krok po kroku wszystkie aksjomaty ciała przemiennego oraz zgodność porządku $\prec$ z działaniami $\oplus$ i $\odot$ pokazuje się, że $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \oplus, \odot, 0_R, 1_R, \prec)$ jest ciałem uporządkowanym.[13] Na tej podstawie definiowana jest w $\mathfrak{R}$ wartość bezwzględna:

$$||r|| = \begin{cases} r, & \text{dla } r \succeq 0_R \\ -r, & \text{dla } r \prec 0_R. \end{cases}$$

Można pokazać, że między wartością bezwzględną w $\mathfrak{R}$ i w $\mathfrak{Q}$ zachodzi zależność

$$||[(a_n)]|| = [(|a_n|)].$$

1.5. Ciało ułamków ciała $\mathfrak{R}$ to zbiór $\mathbb{Q}_R = \{[(q, q, \dots)] : q \in \mathbb{Q}\}$ wraz z (odpowiednio zawężonymi) działaniami $\oplus$ i $\odot$ oraz porządkiem $\prec$; ciało to oznaczamy symbolem $\mathfrak{R}_Q$. Można pokazać, że $\mathfrak{R}_Q$ jest izomorficzne z ciałem uporządkowanym liczb wymiernych $\mathfrak{Q}$; funkcja ustalająca izomorfizm dana jest wzorem:

$$\mathbb{Q} \ni q \mapsto [(q, q, \dots)] \in \mathbb{Q}_R.$$

[10] [Kuratowski, Mostowski 1978], s. 78.
[11] Zob. [Bar-Hillel et al. 1973], s. 36–37.
[12] Zob. [Bar-Hillel et al. 1973], s. 50.
[13] Zob. [Sierpiński 1966], rozdz. V.

Biorąc to pod uwagę, działania i porządek w zbiorze liczb rzeczywistych oraz działania i porządek w zbiorze liczb wymiernych oznaczane są jednakowymi symbolami, tak więc $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$; podobnie, tym samym symbolem oznaczana jest wartość bezwzględna w $\mathfrak{Q}$ i w $\mathfrak{R}$.

Omawiając dowód twierdzenia o zupełności, dla zwrócenia uwagi na zależność między ciałami $\mathfrak{R}_Q$ i $\mathfrak{Q}$, zachowamy różne symbole dla wartości bezwzględnej i porządku w $\mathfrak{R}$ oraz w $\mathfrak{Q}$. Później, zgodnie ze zwyczajem, nie będziemy już odróżniać ciał $\mathfrak{R}_Q$ i $\mathfrak{Q}$.

# Zupełność

**2.** Ciało liczb wymiernych $\mathfrak{Q}$ nie jest zupełne w sensie Cauchy'ego, tzn. istnieje taki ciąg Cauchy'ego $(a_n) \subset \mathbb{Q}$, że żadna liczba wymierna nie jest jego granicą.

Przykłady. (1) Ciąg $(a_n)$, gdzie

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \ ,$$

spełnia warunek Cauchy'ego, a przy tym żadna liczba wymierna nie jest jego granicą.[14] (2) Ciąg $(a_n)$, gdzie

$$a_n = \sum_{i=0}^{i=n} 2^{\frac{-i(i+1)}{2}} \ ,$$

jest ciągiem Cauchy'ego i żadna liczba wymierna nie jest jego granicą.[15]

2.1. W konstrukcji liczb rzeczywistych, niezupełność ciała liczb wymiernych winna być wykazana przy założeniu, że dane jest jedynie ciało liczb wymiernych, ale nie zawsze jest to tak właśnie przedstawiane.

Dwa przykłady. (1) W *Analizie* Krzysztofa Maurina znajdujemy:

„Jak pokazał przykład rozwinięcia dziesiętnego $\sqrt{2}$, ciąg Cauchy'ego może nie być zbieżny do żadnej liczby wymiernej".[16]

Przykład, do którego Autor odsyła tak wygląda:

„Weźmy rozwinięcie dziesiętne $\sqrt{2}$ (z 'niedomiarem' i 'nadmiarem')
$a_1 = 1,\ a_2 = 1,4,\ a_3 = 1,41,\ a_4 = 1,414,$
$b_1 = 2,\ \ b_2 = 1,5,\ b_3 = 1,42,\ b_4 = 1,415$ itd." [17]

[14] Zob. [Sierpiński, 1966], s. 198–200; przykład ten podaje Weierstrass w jednym z wykładów z roku 1886, zob. [Więsław 1997], s. 381–382.

[15] Zob. [Bourbaki 1966(a)], t. I, s. 184.

[16] [Maurin 1991], t. I, s. 45.

[17] [Maurin 1991], t. I, s. 42.

Nie sposób jednak uznać podane zapisy za definicje ciągów.

(2) Klaus Mainzer w artykule *Real Numbers* tak przedstawia niezupełność ciała $\mathfrak{Q}$:

„istnieją ciągi fundamentalne liczb wymiernych, które nie są zbieżne do liczby wymiernej. Dowolny nieokresowy ułamek dziesiętny wyznacza taki ciąg, np. rozwinięcie $\sqrt{2}$, gdzie

$$r_0 = 1;\ r_1 = 1.4;\ r_2 = 1.41;\ r_3 = 1.414;\ r_4 = 1.4142;\ \ldots\ .$$

Kolejnym przykładem, gdzie wyrazy ciągu są *explicite* zdefiniowane, niech będzie przedstawienie w postaci ułamka łańcuchowego stosunku $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, który odpowiada złotemu podziałowi. Ułamek ten jest zdefiniowany rekurencyjnie przez ciąg $r_0 = 1$, $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+r_n}$. Aby pokazać, że istotnie jest to ciąg fundamentalny ...".[18]

Dalej Mainzer dowodzi, że ciąg $(r_n)$ jest ciągiem fundamentalnym. Nie udowodnił jednak, że żadna liczba wymierna nie jest jego granicą. Owszem, wiadomo, że nieskończony ułamek łańcuchowy reprezentuje liczbę niewymierną, ale teoria ułamków łańcuchowych jest obecnie fragmentem analizy matematycznej, tzn. jest rozwijana przy założeniu, że dane jest ciało liczb rzeczywistych: już chociażby sam ułamek łańcuchowy jest definiowany jako granica specjalnego ciągu liczbowego.[19]

**3.** Zupełność. $\mathfrak{R}$ jest ciałem zupełnym w sensie Cauchy'ego, tzn. dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(r_n)$, który spełnia warunek

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists k \forall m [k < m \to ||r_k - r_m|| \prec \varepsilon],$$

istnieje taka liczba rzeczywista $s \in \mathbb{R}$, że $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = s$.

3.1. Gęstość $\mathbb{Q}_R$ w $(\mathbb{R}, <)$. Przyjmijmy $r = [(a_n)]$. Pokażemy najpierw, że zachodzi

$$\forall r \in \mathbb{R} \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_R [0_R < r \to 0_R < \varepsilon < r]. \tag{1}$$

Istotnie, jeżeli $r > 0_R$, to z definicji nierówności, istnieje takie $\delta \in \mathbb{Q}_+$ oraz $k$, że $a_m > \delta$, dla $m > k$. Przyjmując $\varepsilon = [(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, \ldots)]$ dostajemy $0_R < \varepsilon < r$.

Następnie pokażemy, że zachodzi

$$\forall r \in \mathbb{R} \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_R \exists q \in \mathbb{Q}_R [0_R \prec \varepsilon \to ||r - q|| \prec \varepsilon]. \tag{2}$$

[18] [Mainzer 1995(b)], s. 40–41.

[19] Zob. niżej pkt. 15.

Niech $[(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\dots)] \in \mathbb{Q}_R$, gdzie $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$. Istnieje takie $k$, że dla $m > k$ jest $|a_k - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Przyjmując $q = [(a_k, a_k, a_k, \dots)]$ dostajemy

$$||r-q|| = [(|a_n - a_k|)] \preceq \left[\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}, \dots\right)\right] \prec [(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\dots)].$$

Z powyższego otrzymujemy, że zbiór $\mathbb{Q}_R$ jest gęsty w $(\mathbb{R}, <)$, tzn.

$$\forall r, s \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Q}_R [r \prec s \to r \prec q \prec s],$$

lub w innej postaci

$$\forall r \in \mathbb{R} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists q \in \mathbb{Q}_R [||r-q|| \prec \varepsilon].$$

3.2. Dla ciągów liczb rzeczywistych, w samej definicji granicy i w warunku Cauchy'ego mamy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ (\dots).$$

Na podstawie gęstości $\mathbb{Q}_R$ w $(\mathbb{R}, <)$ możemy w to miejsce przyjąć

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_R \cap \mathbb{R}_+ (\dots).$$

3.3. Dla każdej liczby rzeczywistej $r = [(a_n)]$ oraz dla każdego ciągu $(b_n) \in [(a_n)]$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} q_n = r, \quad \text{gdzie} \quad q_n = [(b_n, b_n, b_n, \dots)]. \tag{3}$$

Niech $[(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\dots)] \in \mathbb{Q}_R$, gdzie $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$. Istnieje takie $k$, że

$$|a_k - a_m| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |b_k - b_m| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |a_k - b_k| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{dla } m > k.$$

Stąd dostajemy, że dla $m > k$ zachodzi

$$\begin{aligned} ||r-q_m|| &\preceq ||r-q_k|| + ||q_k - q_m|| \\ &= [(|a_n - b_k|)] + [(|b_k - b_m|)] \\ &\preceq [(|a_n - a_k|)] + [(|a_k - b_k|)] + [(|b_k - b_m|)] \\ &\preceq \left[\left(\frac{3\varepsilon}{4}, \frac{3\varepsilon}{4}, \frac{3\varepsilon}{4}, \dots\right)\right] \\ &\prec [(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,\dots)]. \end{aligned}$$

3.4. Niech $(r_j)$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym warunek Cauchy'ego. Ustalając indeks $j$, na podstawie zależności (2), dla każdego $n$ zbiór

$$\left\{[(p,p,p,\dots)] \in \mathbb{Q}_R : \ [(p,p,p,\dots)] \in (r_j - \delta_n, r_j + \delta_n)\right\},$$

gdzie $\delta_n = [(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots)]$, jest niepusty.

Stosując do rodziny $\{(r_j - \delta_n, r_j + \delta_n) \cap \mathbb{Q}_R : n \in \mathbb{N}\}$ aksjomat wyboru dostajemy taki ciąg $(p_n^j) \subset \mathbb{Q}_R$

$$\begin{aligned} p_1^j &= [(q_1^j,\ q_1^j,\ q_1^j,\ \dots)] \\ p_2^j &= [(q_2^j,\ q_2^j,\ q_2^j,\ \dots)] \\ p_3^j &= [(q_3^j,\ q_3^j,\ q_3^j,\ \dots)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

że $\lim_{n\to\infty} p_n^j = r_j$.[20]

A zatem, gdy dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(r_n)$, dana jest też nieskończona tablica $\{p_n^j\}_{n,j=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}_R$,

$$\begin{array}{cccccc} p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 & \dots & p_n^1 & \dots \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & \dots & p_n^2 & \dots \\ p_1^3 & p_2^3 & p_3^3 & \dots & p_n^3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ p_1^n & p_2^n & p_3^n & \dots & p_n^n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{array}$$

ponadto, dla każdego $j$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} p_n^j = r_j$, a każdy wyraz $p_n^n$ leżący na „przekątnej" tej tablicy jest postaci

$$p_n^n = [(q_n^n, q_n^n, q_n^n, \dots)].$$

3.5. Pokażemy, że ciąg liczb wymiernych $(q_n^n) \subset \mathbb{Q}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Istotnie, dla $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$, istnieje takie $k$, że

$$||r_k - r_m|| \prec \left[\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}, \dots\right)\right], \quad ||r_m - p_k^m|| \prec \delta_k \prec \left[\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}, \dots\right)\right],$$

dla $m \geqslant k$, gdzie, przypomnijmy, $\delta_k = [(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots)]$.

Z nierówności trójkąta dostajemy

$$||p_k^k - p_m^m|| \preceq ||p_k^k - r_k|| + ||r_k - r_m|| + ||r_m - p_m^m|| \prec [(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots)].$$

[20](1) Zgadzając się na dwuznaczność moglibyśmy napisać: $p_1^j = [(p_1^j, p_1^j, \dots)]$, itd. (2) Ciąg $(p_n^j)$ winien być definiowany *via* twierdzenie o definicjach indukcyjnych, wówczas to uwyraźnia się rola aksjomatu wyboru w dowodzie zupełności $\mathfrak{R}$.

Dla ciągu stacjonarnego $(p, p, p, \dots)$, gdzie $p \in \mathbb{Q}$, zachodzi

$$[(p, p, p, \dots)] \prec [(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots)] \to p < \varepsilon.$$

Przy ustalonych $k$ i $m$, dla ciągu stacjonarnego

$$(q_k^k - q_m^m, q_k^k - q_m^m, q_k^k - q_m^m, \dots)$$

zachodzi

$$[(|q_k^k - q_m^m|)] = ||p_k^k - p_m^m||.$$

Tak więc dla dowolnego $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ istnieje takie $k$, że dla $m > k$ zachodzi $||p_k^k - p_m^m|| \prec [(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots)]$ i ostatecznie $|q_k^k - q_m^m| < \varepsilon$.

3.6. Przyjmijmy $s = [(q_n^n)]$. Pokażemy, że $\lim_{n\to\infty} r_n = s$.

Dla $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$, istnieje takie $k$, że

$$||r_k - r_m|| \prec \left[\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}, \dots\right)\right], \quad ||r_k - p_k^k|| \prec \delta_k \prec \left[\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}, \dots\right)\right], \quad \text{dla } m \geqslant k,$$

oraz

$$||p_k^k - s|| = [(|q_k^k - q_n^n|)] \prec \left[\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}, \dots\right)\right].$$

Z nierówności trójkąta dostajemy

$$||r_m - s|| \preceq ||r_m - r_k|| + ||r_k - p_k^k|| + ||p_k^k - s||,$$

skąd ostatecznie dla $m \geqslant k$

$$||r_m - s|| \prec [(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots)].$$

**4.** Zobaczmy teraz, jak w *Analizie* wykazana jest zupełność $\mathfrak{R}$.[21] Dowód twierdzenia poprzedza definicja:

„Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ jest przestrzenią ilorazową $\mathbf{C}/_\sim$. $\mathbf{Q}$ identyfikujemy ze zbiorem klas ciągów stałych. W ten sposób $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ (dokładniej, $\mathbf{Q}$ zanurzyliśmy w $\mathbf{R}$)".[22]

Owo „identyfikujemy" może sugerować, że rozróżnianie $\mathbb{Q}_R$ i $\mathbb{Q}$ – w istocie $\mathfrak{Q}_R$ i $\mathfrak{Q}$ – jest jakimś zbędnym naddatkiem. Czy istotnie?

Udowodnione w poprzednim punkcie zależności (1)–(3) przedstawione są w trzech lematach, przytoczymy je *in extenso*.

[21] Podobnie, to jest bez rozróżniania $\mathbb{Q}_R$ i $\mathbb{Q}$ prowadzony jest dowód zupełności $\mathfrak{R}$ w [Sierpiński 1966].

[22] [Maurin 1991], t. I, s. 41.

4.1. „Wniosek I.7.1. $\forall(\mathbf{R} \ni \varepsilon > 0)\exists(\mathbf{Q} \ni r > 0)[0 < \frac{1}{2}r < \varepsilon]$.
Dowód. Przyjmijmy, że $\varepsilon = [(a_n)] > 0$; więc istnieje $0 < r \in \mathbf{Q}$ takie, że $0 < a_n - r$ dla dalekich $n$. Zatem $0 < \frac{1}{2}r < a_n - \frac{1}{2}r$, czyli $\frac{1}{2}r < \varepsilon$".[23]

W jednym i tym samym zdaniu, $r$ jest zarazem liczbą rzeczywistą, $r \in \mathbb{Q}_R$, bo: $\frac{r}{2} < \varepsilon = [(a_n)]$, i liczbą wymierną, $r \in \mathbb{Q}$, bo: $0 < a_n - \frac{r}{2}$.

Gdy korzystamy wprost z definicji nierówności liczb rzeczywistych to $r \in \mathbb{Q}$, dlatego, aby uniknąć wskazanej dwuznaczności, w tezie Wniosku powinno być:

$$(\dots)\exists(\mathbb{Q} \ni r > 0)[0_R < \left[\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, \frac{r}{2}, \dots\right)\right] < \varepsilon].$$

4.2. „Lemat I.7.4. $\forall x \in \mathbf{R}\forall\varepsilon > 0\exists q \in \mathbf{Q}[|x - q| < \varepsilon]$.

Dowód. Niech $x = [(x_n)]$, $x_n \in \mathbf{Q}$. Ponieważ $(x_n) \in \mathbf{C}$, więc istnieje takie $N \in \mathbf{N}$, że $|x_n - x_m| < \frac{1}{2}\varepsilon$ dla $n, m > N$. Weźmy ciąg stały $a_n = x_{N+1}$, $n = 1, 2, \dots$; wyznacza on liczbę wymierną $q = [(a_n)]$. Ale z definicji i z lematu I.7.1. mamy

$$|x - q| = |[(x_n)] - [(a_n)]| = [(|x_n - a_n|)] = [(|x_{N+1} - x_n|)] \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \text{ ".}[24]$$

Z samego sformułowania tezy wynika $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, jest bowiem porównywane z modułem liczby rzeczywistej: $|x - q| < \varepsilon$. Na podstawie lematu (wniosku) I.7.1. dla tegoż $\varepsilon$ istnieje liczba wymierna $r \in \mathbf{Q}$ taka, że $0 < \frac{r}{2} < \varepsilon$. W dowodzie przyjęto $r = \frac{\varepsilon}{2}$. Ale $\frac{\varepsilon}{2}$ bynajmniej nie musi być liczbą wymierną, nie można zatem przyjmować $\frac{\varepsilon}{2}$ przy wyznaczaniu wskaźnika $N$, *vide* $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dlatego, aby uniknąć wskazanych niejasności, w tezie lematu powinno być

$$(\dots)\forall(\mathbb{Q}_R \ni \varepsilon > 0_R)\exists q \in \mathbb{Q}_R[|x - q| < \varepsilon],$$

lub

$$(\dots)\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}_+\exists q \in \mathbb{Q}\,[|x - [(q, q, q, \dots)]| < [(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots)]]\,.$$

4.3. Zależność (3) w *Analizie* została tak sformułowana i udowodniona:

„Lemat I.7.5. $((x_n) \in \mathbf{C}) \to \lim\limits_{n\to\infty} x_n = [(x_n)]$.

[23] [Maurin 1991], t. I, s. 43.
[24] [Maurin 1991], t. I, s. 44.

Dowód. Niech $x := [(x_n)]$. Wtedy dla $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N$, że

$$|x - x_n| \leqslant |x - x_{N+1}| + |x_{N+1} - x_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > N$$

(por. dowód lematu I.7.4)".[25]

Do tego, co powiedzieliśmy o lemacie I.7.4 dodajmy, że element $x_{N+1}$ w wyrażeniu $|x - x_{N+1}|$ jest w relacji z liczbą rzeczywistą $x$, dlatego $x_{N+1} \in \mathbb{Q}_R$, natomiast w wyrażeniu $|x_{N+1} - x_n|$ jest w relacji z elementem $x_n \in \mathbb{Q}$, a zatem $x_{N+1} \in \mathbb{Q}$. Po drugie, w wyrażeniu $\lim_{n\to\infty} x_n = [(x_n)]$, sama granica z uwagi na ciąg $(x_n)$ winna być definiowana w $\mathfrak{Q}$, a z uwagi na $[(x_n)]$ – winna być definiowana w $\mathfrak{R}$.

4.4. W dowodzie zasadniczego twierdzenia przyjmuje się, że $(x_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego liczb rzeczywistych. Czytamy:

„Jak wiemy z lematu I.7.4, każdy wyraz $x_n$ możemy dowolnie aproksymować liczbami wymiernymi, tzn.

$$\forall x_n \exists a_n \in \mathbf{Q}[|x_n - a_n| < \frac{1}{n}].$$

Wykażemy najpierw, że $(a_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego, a potem, że $x := [(a_n)] = \lim_{n\to\infty} x_n$:

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - a_m| \leqslant \frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{m}$$

dla $n, m > N$, bo $(x_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego. Sprawdzimy teraz, że $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Jak wiemy z lematu I.7.5, $a_n \to x$, więc

$$|x - x_n| \leqslant |x - a_n| + |a_n - x_n| < \varepsilon_1 + \frac{1}{n}".[26]$$

Jeżeli liczba $a_n$ leży w otoczeniu liczby $x_n$, to $a_n \in \mathbb{Q}_R$, natomiast w wyrażeniu $[(a_n)]$ musi być $a_n \in \mathbb{Q}$.

4.5. Wracając do pytania o celowość rozróżnienia $\mathfrak{Q}$ i $\mathfrak{R}_Q$.

Zgadzamy się, że po udowodnieniu zupełności $\mathfrak{R}$ odróżnianie $\mathfrak{Q}$ i $\mathfrak{R}_Q$ jest bezcelowe, jednakże dla samego dowodu jest ono niezbędne. Kluczową rolę w tym dowodzie odgrywa fakt, że to zbiór $\mathbb{Q}_R$, a nie $\mathbb{Q}$, jest gęsty

[25] [Maurin 1991], t. I, s. 45.
[26] [Maurin 1991], t. I, s. 45.

w $(\mathbb{R}, <)$. Właśnie w tym celu w pierwszych dowodach zupełności $\mathfrak{R}$ odróżniano liczbę wymierną $q$ od liczby rzeczywistej reprezentowanej przez ciąg stacjonarny $(q, q, q, \dots)$.[27] Od strony metodologicznej wyraża to fakt, że porządek w $\mathfrak{Q}$ przyjmowany jest jako dany, a porządek w $\mathfrak{R}$, a przez to i w $\mathfrak{R}_Q$, jest definiowany.

Owszem, można tolerować dwuznaczności, można pozwolić sobie na to, aby w jednym i tym samym zdaniu, jeden i ten sam symbol oznaczał element $\mathbb{Q}$ i klasę abstrakcji, wówczas jednak nie wiadomo czemu ma służyć ta rozwlekła – w wykładzie Sierpińskiego jej opis zajmuje 45 stron! – konstrukcja ilorazowa.

Otóż dzięki konstrukcji ilorazowej rozwiązuje się pewien techniczny problem, który przez długie lata po ogłoszeniu prac Cantora i Heinego nie był rozwiązany, chodzi mianowicie o wyjaśnienie faktu $\lim_{n\to\infty} a_n = (a_n)$, lub inaczej, jak to jest, że granicą ciągu liczb wymiernych $(a_n)$ jest sam ciąg $(a_n)$.

W wyżej zrelacjonowanym dowodzie jest to ukryte w lemacie I.7.5, w formule

$$\lim_{n\to\infty} x_n = [(x_n)].$$

4.6. Historia rachunku różniczkowego jest zwykle tak pisana: matematycy nie stawiali sobie pytania czym są i czym być powinny liczby wymierne, a problem stanowiły liczby niewymierne.[28] Cauchy rozumiał liczbę niewymierną jako granicę ciągu fundamentalnego liczb wymiernych.[29] To jednak nie wystarczało, aby wytłumaczyć, czym jest i czy w ogóle jest owa granica. Z czasem granicę ciągu (fundamentalnego) poczęto identyfikować z samym ciągiem. Cantor, Heine i Méray są powszechnie uznawani za ojców tego pomysłu. Jednakże ani Cantor, ani Heine, ani Méray nie potrafili wytłumaczyć, jak to jest, że ciąg liczb wymiernych $(a_n)$ jest zarazem ciągiem i granicą, do której zmierza, jak to jest, że $\lim_{n\to\infty} a_n = (a_n)$.

Problem ten rozwiązuje się w konstrukcji ilorazowej i taki właśnie jest sens zależności (3); powtórzy ją w bardziej wyrazistej postaci

$$\lim_{n\to\infty} q_n = [(a_n)],$$

[27] Zob. niżej pkt. 12.

[28] Proces tzw. arytmetyzacji rachunku różniczkowego był związany również z nowym ujęciem liczb wymiernych; zob. niżej rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 21–24.

[29] Zob. [Boyer 1949], s. 396–397.

gdzie kolejne wyrazy ciągu $(q_n)$ są wyznaczone przez ciągi stacjonarne

$$\begin{aligned} q_1 &= [(a_1, a_1, a_1, \dots)] \\ q_2 &= [(a_2, a_2, a_2, \dots)] \\ q_3 &= [(a_3, a_3, a_3, \dots)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zależność (3) można więc zamknąć w formule

$$\lim_{n\to\infty} [(a_n, a_n, a_n, \dots)] = [(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)].$$

Spójrzmy na historię tego zagadnienia i zobaczmy, jak próbowano rozwiązać problem $\lim_{n\to\infty} a_n = (a_n)$.

# Georg Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, 1872

**5.** Praca poświęcona jest dowodowi twierdzenia:

„Gdy dane jest równanie postaci

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \dots \ ,$$

gdzie $C_0 = \frac{1}{2}d_0$, $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, spełnione przez wszystkie wartości $x$ z przedziału $(0 \dots (2\pi))$, z wyjątkiem tych, które odpowiadają punktom ze zbioru $P$, który jest rzędu $\nu$, gdzie $\nu$ jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą, wówczas zachodzi:

$$d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0 \text{ ”}.$$ [30]

Pojęcie zbiór $n$-tego rzędu Cantor wprowadził właśnie w związku z tym twierdzeniem, dlatego we wstępie artykułu pisze:

„podam pewne definicje, dzięki którym będę mógł w zwięzły sposób przedstawić zapowiedziane twierdzenie”.[31]

5.1. Zarys konstrukcji nazywanej dzisiaj Cantora konstrukcją liczb rzeczywistych jest przedstawiony w paragrafie pierwszym rozprawy. Punkt wyjścia stanowi zbiór (Gebiet) liczb wymiernych, oznaczany literą $A$;

„Liczby wymierne stanowią podstawę dla ustanowienia kolejnych pojęć liczbowych”.[32]

„Wielkości liczbowe rozumiem w ten sposób, że dany jest nieskończony ciąg liczb wymiernych

$$(1) \qquad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \ ,$$

[30] [Cantor 1872], s. 130.
[31] [Cantor 1872], s. 123.
[32] [Cantor 1872], s. 123.

o tej własności, że różnica $a_{n+m} - a_n$, przy rosnącym $n$ oraz całkowitym dodatnim $m$, jest nieskończenie mała, lub innymi słowy, dla dowolnego (dodatniego, wymiernego) $\varepsilon$ dana jest taka liczba całkowita $n_1$, że $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, gdy $n \geqslant n_1$, zaś $m$ jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą";[33]

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists n_1 \forall n, m[n_1 \leqslant n \rightarrow |a_{n+m} - a_n| < \varepsilon].$$

„Tę własność ciągu (1) wyrażamy słowami: «*ciąg (1) posiada granicę b*».

Nie jest to nic innego, jak przede wszystkim oznaczenie ciągu o tej własności, a gdy spełniony jest ten warunek, to, że ciągowi (1) przypisujemy konkretny znak $b$, a następnie różnym ciągom tego typu, przypisujemy różne znaki $b, b', b'', \ldots$".[34]

„Niech dany będzie drugi ciąg

$$(1') \qquad a_1', a_2', \ldots, a_n', \ldots \ ,$$

posiadający granicę $b'$, wówczas między ciągami (1) i (1') zachodzi jeden z trzech wzajemnie wykluczających się przypadków: albo 1. $a_n - a_n'$ jest nieskończenie małe przy zmieniającym się $n$, albo 2. poczynając od pewnego $n$ $a_n - a_n'$ jest większe od (dodatniej) wymiernej wielkości $\varepsilon$, albo 3. poczynając od pewnego $n$ $a_n - a_n'$ jest mniejsze od (ujemnej) wymiernej wielkości $-\varepsilon$",[35]

(ad 1) $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists k \forall n[k < n \rightarrow |a_n - a_n'| < \varepsilon]$,
(ad 2) $\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists k \forall n[k < n \rightarrow a_n - a_n' > \varepsilon]$ ,
(ad 3) $\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists k \forall n[k < n \rightarrow a_n - a_n' < -\varepsilon]$.[36]

[33] [Cantor 1872], s. 123–124.

[34] [Cantor 1872], s. 124. Por. „Praca ta [Cantor 1872] zawiera pierwsze zwięzłe przedstawienie tzw. teorii liczb niewymiernych Cantora, według której liczby niewymierne są granicami ciągów zbieżnych liczb wymiernych (nazywanych później przez Cantora ciągami podstawowymi (Fundamentalreihe))" [Murawski 1994], s. 137, przypis 2; w domyśle: „granicami" w dzisiejszym rozumieniu. Otóż (1) W pracy [Cantor 1872] nie ma definicji granicy w dzisiejszym rozumieniu. Zwrot „*ciąg (1) posiada granicę b*" według objaśnień Cantora oznacza tylko tyle, że, po pierwsze, ciąg $(a_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego, po drugie, ciągowi $(a_n)$ przypisywany jest znak $b$. (2) W dzisiejszej matematyce pojęcie ciągu podstawowego (ciągu Cauchy'ego) jest definiowane przede wszystkim albo w ciele uporządkowanym, albo w przestrzeni metrycznej, Cantor zaś nie dysponuje żadnym z tych pojęć. (3) Pojęcia ciąg podstawowy i ciąg zbieżny nie są tożsame, bo tylko w szczególnych przestrzeniach ciągi podstawowe są ciągami zbieżnymi. Wreszcie, (4) zwrot „liczby niewymierne są granicami ciągów zbieżnych liczb wymiernych" sugeruje – błędnie – że Cantor zdefiniował przestrzeń, w której zachodzi owa „zbieżność".

[35] [Cantor 1872], s. 124.

[36] Przyjmując, że ciągi $(a_n)$ i $(a_n')$ spełniają warunek Cauchy'ego, liczby wymierne są ciałem uporządkowanym oraz to, że nie zachodzi warunek 1 istotnie można wykazać, że zachodzi albo warunek 2, albo 3.

W każdym z tych przypadków odpowiednio przyjmuje się

$$b = b', \quad b > b', \quad b < b'.$$

„Podobnie, jeżeli ciąg (1) *ma granicę* $b$, natomiast $a$ jest liczba wymierną, to zachodzi jeden z trzech przypadków. Albo: 1. $a_n - a$ jest nieskończenie małe, przy zmieniającym się $n$, albo 2. od pewnego $n$ $a_n - a$ jest zawsze większe od pewnej (wymiernej) wielkości $\varepsilon$, albo 3. od pewnego $n$ $a_n - a$ jest zawsze mniejsze od pewnej ujemnej (wymiernej) wielkości $-\varepsilon$";[37]

(ad 1) $\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}_+\exists k\forall n[k < n \to |a_n - a| < \varepsilon]$,
(ad 2) $\exists\varepsilon \in \mathbb{Q}_+\exists k\forall n[k < n \to a_n - a > \varepsilon]$ ,
(ad 3) $\exists\varepsilon \in \mathbb{Q}_+\exists n\forall n[k < n \to a_n - a < -\varepsilon]$.

Wówczas przyjmuje się odpowiednio

$$b = a, \quad b > a, \quad b < a.$$

„Na podstawie tych i zaraz następujących definicji dostajemy wniosek, że gdy ciąg (1) ma granicę $b$, to $b - a_n$, przy zmieniającym się $n$, jest nieskończenie małe, co, przy okazji, usprawiedliwia nazywanie $b$ «granicą ciągu (1)»".[38]

5.3. Zbiór (Gebiet) „wielkości liczbowych $b$" oznaczany jest przez $B$. Działania w zbiorze $A$ można rozszerzyć na działanie „w zbiorach $A$ i $B$ razem wziętych". Definicje są następujące: jeżeli $b, b', b''$ oznaczają ciągi

$$a_1, a_2, \ldots \qquad a_1', a_2', \ldots \qquad a_1'', a_2'', \ldots ,$$

a przy tym zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm a_n' - a_n'') = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot a_n' - a_n'') = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_n'} - a_n'') = 0,$$

„gdzie znaczenie znaku granicy nie wymaga objaśnienia",[39]

[37] [Cantor 1872], s. 124.

[38] [Cantor 1872], s. 124. W tym zdaniu jest domniemane jakieś rozumienie granicy ciągu liczb rzeczywistych, ale nie wiadomo, jak należy rozumieć różnicę $b - a_n$, wszak $b$ oznacza ciąg liczb wymiernych, zaś $a_n$ – liczbę wymierną.

[39] [Cantor 1872], s. 125. To trochę zaskakujące, bo po lekturze rozprawy [Cantor 1872] Dedekind uznał za stosowne wyjaśnić kiedy „wielkość zmienna $x$, przebiegająca kolejno określone wartości liczbowe, zbliża się do pewnej stałej granicy $\alpha$" [Dedekind 1872], s. 148.

to przyjmuje się, że

$$b \pm b' = b'', \quad bb' = b'', \quad \frac{b}{b'} = b''.$$

„Definicje te odnoszą się również do przypadku, w którym jedna, dwie lub trzy spośród liczb $b, b', b''$ należą do zbioru $A$".[40]

5.4. „Zbiór $B$ powstał ze zbioru $A$; w analogiczny sposób można teraz wytworzyć z niego i ze zbioru $A$ nowy zbiór $C$.

Przyjmijmy mianowicie, że ciąg wielkości liczbowych

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots ,$$

należących do zbioru $A$ lub $B$, ale takich, że nie wszystkie należą do $A$, ma tę własność, że $b_{n+m} - b_n$ jest nieskończenie mała przy rosnącym $n$ oraz $m$, własność, która na podstawie poprzednich definicji jest w pełni określona. Wówczas mówimy o tym ciągu, że ma granicę $c$".[41]

Zbiór (Gebiet) „wielkości liczbowych" $c$ oznaczany jest przez $C$.

„W sposób analogiczny można zdefiniować równość, relacje większy i mniejszy oraz podstawowe operacje arytmetyczne między wielkościami $c$, oraz między nimi a wielkościami ze zbiorów $B$ oraz $A$".[42]

„Podczas gdy w przypadku zbiorów $A$ i $B$ jest tak, że każde $a$ równa się pewnemu $b$, ale nie odwrotnie, nie każde $b$ równa się pewnemu $a$, to okazuje się, że zarówno każdemu $b$ odpowiada pewne $c$, jak i na odwrót, każdemu $c$ odpowiada pewne $b$".[43]

I dalej:

„Jakkolwiek przez to zbiory $B$ i $C$ do pewnego stopnia pokrywają się, to istotne jest, aby na podstawie przedłożonej teorii [...], uchwycić różnicę pojęciową [begrifflichen Unterschiede] między zbiorami $B$ i $C$, bo przecież

[40] [Cantor 1872], s. 125. Zasada ta ma sens tylko wtedy, gdy liczbę wymierną $a$ przedstawimy w postaci ciągu $b$ i zachodzi $b = a$ w myśl wyżej podanej definicji. Sam Cantor nie wyjaśnia jednak, jak rozumieć symbol $b - a$, gdy $a$ jest liczbą wymierną.

[41] [Cantor 1872], s. 125. Własność „różnica jest nieskończenie mała" może być odczytywany jako $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+[\ldots]$, lub $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+[\ldots]$. I chyba tę dwuznaczność ma na uwadze Cantor pisząc, że „własność, która na podstawie poprzednich definicji jest w pełni określona".

[42] [Cantor 1872], s. 126.

[43] [Cantor 1872], s. 126. Zdanie to podane jest bez dowodu. Cantor wyraża tu – mówiąc współczesnym językiem – zupełność (w sensie Cauchy'ego) zbioru $B$.

równość pomiędzy wielkościami liczbowymi $b$, $b'$ z $B$ nie oznacza ich identyczności, ale określoną relację, która zachodzi między ciągami, które są nimi oznaczone.

Ze zbioru $C$ i poprzednich podobnie powstaje zbiór $D$, z nich $E$, itd.; $\lambda$ takich przejść (gdzie przejście od $A$ do $B$ jest pierwsze) prowadzi do zbioru wielkości liczbowych $L$. [...] gdy dana jest wielkość liczbowa ze zbioru $L$, to mówimy, że jest ona *wielkością liczbową, wartością lub granicą $\lambda$-tego rzędu*".[44]

**6.** W paragrafie drugim ustanawia Cantor zależność między liczbami rzeczywistymi a linią prostą. Czytamy:

„Punkty linii prostej będą ustanowione pojęciowo przez ustalenie jednostki odległości, odciętej, względem pewnego punktu $o$ leżącego na prostej, określonej znakami + lub − tak, że każdy punkt będzie leżał we (wcześniej ustalonej) dodatniej lub ujemnej względem $o$ części prostej".[45]

Dalej czytamy:

„Mając tę jednostkę odległości, stosunek wymierny wyrażamy za pomocą wielkości liczbowej ze zbioru $A$. W pozostałych przypadkach, gdy punkt jest dany za pomocą konstrukcji [durch eine Construktion *bekannt* ist], zawsze można wskazać ciąg:

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

posiadający własność opisaną w §1 i taki, że punkty prostej leżące w odległości $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, ze względu na tę jednostkę odległości, są nieskończenie blisko tego punktu, gdy $n$ jest dostatecznie duże.

W związku z tym mówimy: odległość danego punktu od punktu $o$ wynosi $b$, gdzie $b$ jest wielkością liczbową odpowiadającą ciągowi (1)".[46]

„Odtąd przyjmujemy, że większy, mniejszy i równy między odległościami oznacza większy, mniejszy i równy w myśl definicjami z §1 między wielkościami liczbowymi odpowiadającymi tym odległościom".[47]

„Aby ustanowić teraz związek między dziedziną wielkości liczbowych zdefiniowanych w §1 a linią prostą, należy dodać jeszcze jeden aksjomat, który po prostu polega na tym, że każdej liczbie odpowiada na prostej punkt, któ-

[44] [Cantor 1872], s. 126.
[45] [Cantor 1872], s. 127.
[46] [Cantor 1872], s. 127.
[47] [Cantor 1872], s. 127.

rego współrzędna jest równa danej liczbie, w myśl wyjaśnień z niniejszego paragrafu".[48]

**7.** Między drugim i trzecim paragrafem artykułu wydzielił Cantor *passus*, w którym podaje definicję zbioru $n$-tego rzędu. Odnosi się ona do podzbiorów linii prostej (Punktmenge). Najpierw definiowany jest punkt graniczny:

„Przez punkt graniczny zbioru $P$ rozumiem punkt, który jest tak położony na prostej, że w jego dowolnym otoczeniu jest nieskończenie wiele punktów z $P$, przy czym może się zdarzyć, że on sam należy do tego zbioru. Przez otoczenie punktu rozumiem taki przedział, który zawiera w *swoim wnętrzu* ten punkt. Łatwo więc widać, że zbiór złożony z nieskończonej ilości punktów zawsze ma punkt graniczny".[49]

Zbiór *punktów granicznych* zbioru $P$ jest oznaczany jako $P'$ i nazywany jest pierwszą pochodną zbioru $P$. Analogicznie definiowana jest druga, trzecia i $n$-ta pochodna zbioru $P$, mianowicie: $(P')' = P''$, ogólnie $(P^{(n)})' = P^{(n+1)}$. Pojęcie pochodnej zbioru ilustruje Cantor dwoma przykładami. W pierwszym zbiór $P$, to

„zbiór punktów prostej, którego odcięte są liczbami wymiernymi leżącymi między 0 i 1, z końcami lub bez, wówczas pochodna $P'$ to zbiór wszystkich punktów z przedziału $(0 \dots 1)$, z krańcami. Kolejne zbiory $P'', P''', \dots$ są równe zbiorowi $P'$ ".[50]

Drugi przykład zapiszemy krótko (pamiętając, że ma to być zbiór punktów na prostej): gdy $P = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, to $P' = \{0\}$, a przy tym sam zbiór $P'$ „nie ma pochodnej".

Może być tak, że dla pewnego $n$ zbiór $P^{(n)}$ ma skończenie wiele elementów, a wtedy „sam nie ma pochodnej", tj. $(P^{(n)})' = \emptyset$. Wówczas zbiór wyjściowy $P$ jest nazywany zbiorem $n$-tego rzędu.[51]

**8.** Paragraf trzeci rozprawy zawiera wypowiedź oraz dowód twierdzenia, które cytowaliśmy we wstępie omówienia.

---

[48] [Cantor 1872], s. 128.

[49] [Cantor 1872], s. 128. (1) Z wcześniejszej pracy Cantora wiadomo, że przedział jest oznaczany jako $(a \dots b)$ i jest to podzbiór zbioru liniowo uporządkowanego $(X, <)$ wyznaczony przez punkty $a, b \in X$, tj. $(a \dots b) = \{x \in X : a < x < b\}$, przy czym punkty $a$, $b$ mogą być zaliczone do przedziału. Definicja przedziału, jaką przyjął Dedekind w [Dedekind 1872], §6 jest ogólniejsza; zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 16.3. (2) Trzecie z cytowanych zdań to twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Cantor podaje je bez dowodu.

[50] [Cantor 1872], s. 129.

[51] Zob. [Cantor 1872], s. 130–131.

**9.** Cel dwóch pierwszych paragrafów rozprawy jest jasny: zilustrować pojęcie pochodnej zbioru punktowego. Przedstawiony w drugim paragrafie związek liczb rzeczywistych z linią prostą jest temu podporządkowany. Celem rozprawy bynajmniej nie jest konstrukcja ciała liczb rzeczywistych, co więcej, wyraźne jest domniemanie Cantora, że czytelnik wie czym są liczby rzeczywiste.[52] Między innymi właśnie dlatego żadna z własności podawanych w pierwszym paragrafie, w tym zupełność, nie jest dowodzona. *Novum* stanowi przedstawienie liczb rzeczywistych w postaci ciągów liczb wymiernych. Podobnie, wyraźne jest niepisane założenie Cantora, że czytelnik wie czym jest linia prosta. W tym przypadku nowością jest ustanowienie związku między liczbami rzeczywistymi, a linią prostą.

9.1. Spójrzmy teraz na rozprawę Cantora z perspektywy pytania, które nas do niej przywiodło: czy wyjaśniona jest tu kwestia, jak jest możliwe, że $\lim_{n\to\infty} a_n = (a_n)$? Odpowiedni fragment rozprawy to zdanie:

„Na podstawie tych i zaraz następujących definicji dostajemy wniosek, że gdy ciąg (1) ma granicę $b$, to $b - a_n$, przy zmieniającym się $n$, jest nieskończenie małe, co, przy okazji, usprawiedliwia nazywanie $b$ «granicą ciągu (1)»".

Przypomnijmy, że „$b$ jest «granicą ciągu (1)»" znaczy tyle, że litera $b$ oznacza ciąg $(a_n)$.[53] Zatem – spytajmy – na podstawie jakiego rozumienia granicy „usprawiedliwione jest nazywanie $b$ granicą ciągu $(a_n)$"?

Cantor nie wyjaśnił, jak rozumieć symbol $b - a_n$, gdy $b$ jest ciągiem liczb wymiernych $(a_n)$, zaś $a_n$ jednym z elementów tego ciągu, w istocie chodzi tu o wyjaśnienie zależności $\lim_{n\to\infty} a_n = (a_n)$, którą obecnie tłumaczy się podwójnym przedstawieniem liczby wymiernej: raz jest to element zbioru $\mathbb{Q}$, raz element zbioru $\mathbb{Q}_R$.[54] Problem podwójnego przedstawienia liczb wymiernych w pewnym sensie znika, gdy liczby zostaną „przeniesione", „odwzorowane" na linię prostą $L$, bo wówczas i punkty odpowiadające liczbom

[52] Por.: „Podobnie jak u Weierstrassa i Dedekinda, celem Cantora jest podanie adekwatnej definicji liczb niewymiernych, która nie zakłada istnienia tych liczb i podobnie jak u nich, w definicji Cantora przyjęte są liczby wymierne" [Bell 2005], s. 152. Bell powtarza tu obiegową opinię, która nie jest oparta na analizie tekstu rozprawy *Über die Ausdehnung*.

[53] Zauważmy, że gdyby Cantor umiał zapisać ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ w postaci $(a_n)$ być może nie wprowadzałby znaku $b$. Przyjęty przezeń sposób oznaczania jest wykorzystany przy definiowaniu działań na ciągach. W przeciwnym bowiem razie musiałby pisać:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \; + \; a_1', a_2', \ldots, a_n', \cdots = \ldots \; .$$

[54] Dauben, najwyraźniej nie zauważając, z jakim problemem mamy tu do czynienia, przyjmuje, że $b - a_n$ oznacza ciąg $(a_n - a_n)$; zob. [Dauben 1990], s. 319.

wymiernym, i punkty odpowiadające liczbom niewymiernym należą do tego samego zbioru $L$. Dlatego przyjmujemy, że pojęcie granicy, które „usprawiedliwia nazywanie $b$ granicą ciągu $(a_n)$", to pojęcie punktu granicznego na linii prostej.

Definicja „punktu granicznego" podzbioru $P$ prostej $L$ zakłada, że punkty na prostej są uporządkowane (liniowo), definicję podaną przez Cantora można bowiem tak zapisać:

$$p \in P' \leftrightarrow_{df} \forall x, y \in L[p \in (x, y) \rightarrow (x, y) \cap P \text{ jest zbiorem nieskończonym}],$$

gdzie $(x, y)$ jest przedziałem, a przedział jest definiowany za pomocą porządku liniowego.[55]

9.2. W rozprawie jest domniemane pewne rozumienie linii prostej. Spróbujemy je odtworzyć.

(1) „Punkty linii prostej będą ustanowione pojęciowo przez ustalenie jednostki odległości, odciętej, względem pewnego punktu $o$ leżącego na prostej, określonej znakami + lub − tak, że każdy punkt będzie leżał we (wcześniej ustalonej) dodatniej lub ujemnej względem $o$ części prostej".

Można to tak rozumieć, że wybierając na prostej pewien punkt $o$ wyznaczane są jednocześnie – przyjmując definicje z rozdziału *O ciągłości linii prostej* – dwie dopełniające się półproste: „dodatnia" i „ujemna".

(2) „Mając tę jednostkę odległości, stosunek wymierny wyrażamy za pomocą wielkości liczbowej ze zbioru $A$".

Zdanie to należy rozumieć w sposób opisany w punkcie 3.2. rozdziału *Konstrukcja Dedekinda*. Idzie tu zatem o wyróżnienie na prostej punktów, które – gdy jest ustalona „jednostka odległości" – są wyróżnione na podstawie twierdzenia Talesa. Punkty te nazwiemy wymiernymi, a ich zbiór oznaczymy jako $L_Q$.

(3) „W pozostałych przypadkach, gdy punkt jest dany za pomocą konstrukcji".

Nie potrafimy jednoznacznie powiedzieć, o jaką „konstrukcję" tutaj chodzi, najpewniej o to, o czym pisał Dedekind, a więc o klasyczne konstrukcje geometryczne:

[55] Przypomnijmy, że przez przedział $(x, y)$ zbioru liniowo uporządkowanego $(X, <)$ rozumiemy przedział niepusty, tj. $x < y$.

„Jednakże już starożytni Grecy wiedzieli i udowodnili, że istnieją długości, które ze względu na daną, ustaloną jednostkę długości są niewspółmierne, np. przekątna kwadratu, którego bok jest jednostką długości. Jeżeli odłożyć taką długość z punktu $o$ na prostej, to otrzyma się pewien punkt, który nie odpowiada żadnej liczbie wymiernej".[56]

U Dedekinda konstrukcje te są dowodem na to, „że na prostej znajduje się nieskończenie wiele punktów, które nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej".[57] U Cantora natomiast jest domniemane dużo więcej: każdy punkt na prostej jest albo wymierny (należy do $L_Q$), albo jest „dany za pomocą konstrukcji".

(4) Przejdźmy do tezy, że każdy punkt na prostej można *aproksymować* ciągiem punktów wymiernych, bo taki jest sens zdania:

„W pozostałych przypadkach, gdy punkt jest dany za pomocą konstrukcji, zawsze można wskazać ciąg:

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

posiadający własność opisaną w §1 i taki, że punkty prostej leżące w odległości $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ze względu na tę jednostkę odległości, są nieskończenie blisko tego punktu, gdy $n$ jest dostatecznie duże. W związku z tym mówimy: odległość danego punktu od punktu $o$ wynosi $b$, gdzie $b$ jest wielkością liczbową odpowiadającą ciągowi (1)".

„Wskazany ciąg" to ciąg punktów należących do $L_Q$. Ciąg ten ma spełniać warunek Cauchy'ego, a więc na $L$ musi być określona odpowiednia struktura algebraiczna. Fakt, że dla każdego punktu prostej $L$ istnieje ciąg punktów należących do $L_Q$ jest podany bez żadnego uzasadnienia, ale – co znamienne – nie jest też uznany za aksjomat. W istocie Cantor jest tutaj bezradny, bo prosta $L$ jest bliżej nieokreślonym przedmiotem i nie sposób cokolwiek o niej udowodnić.[58]

Wiemy, że w *Podstawach geometrii*, gdzie linia prosta jest ściśle zdefiniowanym obiektem, fakt iż każdemu punktowi prostej odpowiada liczba rzeczywista jest związany z twierdzeniem o istnieniu miary, a wówczas dowolny punkt na prostej – pozwalając sobie na uproszczenia – jest *aproksymowany*

[56] [Dedekind 1872], s. 140

[57] [Dedekind 1872], s. 140

[58] Wskazane zdanie Bell opatrzył komentarzem: „W ten sposób Cantor pokazuje, że każdemu punktowi prostej odpowiada określony element zbioru $B$" [Bell 2005], s. 153. Powtórzmy zatem: Cantor niczego nie pokazuje, więcej, nie jest w stanie pokazać, bo linia prosta nie jest określonym obiektem.

nie przez punkty odpowiadające liczbom wymiernym, ale przez punkty odpowiadające liczbom dwójkowym.[59]

(5) Za aksjomat Cantor uznał tezę: „każdej liczbie odpowiada na prostej punkt, którego współrzędna jest równa danej liczbie, w myśl wyjaśnień z niniejszego paragrafu".[60]

Można przyjąć, że „aksjomat" ten odpowiada twierdzeniu z *Podstaw geometrii* o surjektywności miary.

9.3. Biorąc pod uwagę to, co domniemane w rozprawie Cantora, linia prosta to struktura $(\mathbb{R}, +, <)$, lub w oznaczeniach przyjętych przez Cantora zbiór $B$ wraz z dodawaniem i porządkiem. Cantor nie ustanawia żadnej odpowiedniości między prostą $L$ a liczbami rzeczywistymi, przyjmuje jedynie, że linia prosta jest strukturą $(\mathbb{R}, +, <)$. Czemu ma służyć ta – jeśli tak wolno powiedzieć – mistyfikacja?

Cantor może zilustrować pojęcie pochodnej zbioru $P$ wtedy, gdy $P$ jest podzbiorem zbioru punktowego $L$, nie zaś wtedy, gdy $P$ jest podzbiorem zbioru liczbowego $B$. Gdy $P \subset L$, to $P' \subset L$. Gdy $P \subset B$, to $P'$ jest podzbiorem pewnego różnego od $B$ – różnego w ocenie Cantora – zbioru $C$. Zobaczmy to na przykładzie. Gdy dany jest zbiór liczb rzeczywistych i wiadomo, że $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, to $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Gdy natomiast liczby rzeczywiste są konstruowane, a w punkcie wyjścia dany jest zbiór $\mathbb{Q}$, to nie jest tak, że $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, ale jest tak, że $\mathbb{Q}'_R = \mathbb{R}$.

W omawianej pracy Cantor nie rozróżnia $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}_R$, nie rozróżnia liczb należących do zbioru $A$ i liczb wymiernych należących do zbioru $B$. Gdy pisze, że „jedna, dwie lub trzy spośród liczb $b, b', b$ należą do zbioru $A$", to jest to zupełnie niezrozumiałe, bo cóż to ma znaczyć, że „konkretny znak $b$" oznaczający ciąg liczb wymiernych należy do zbioru liczb wymiernych $A$.

[59] Zob. rodz. *O ciągłości linii prostej*, pkt. 16.

[60] John Bell tak komentuje ów „aksjomat": „każdy element $B$ powinien wyznaczać określony punkt na linii prostej. Zdając sobie sprawę z tego, że intuicyjna natura liniowego kontinuum poprzedza ścisły dowód tej własności, Cantor po prostu przyjmuje ją jako aksjomat, tak jak Dedekind postąpił w związku z zasadą ciągłości" [Bell 2005], s. 153. W związku z tym przypomnijmy fakty: (1) Dedekind owszem przyjmuje zasadę ciągłości nie podając żadnego bezpośredniego uzasadnienia („nie jestem w stanie podać żadnego dowodu jej [tj. zasady ciągłości – P.B.] poprawności"), jednakowoż ciągłość liczb rzeczywistych jest już dowodzona i wykazany jest też związek między ciągłością liczb rzeczywistych „a pewnymi podstawowymi twierdzeniami analizy infinitezymalnej", co można uznać za pośrednie uzasadnienie zasady ciągłości. (2) W *Stetigkeit* nie jest ustalany związek między liczbami rzeczywistymi a linią prostą. (3) Z korespondencji Dedekinda wiemy, iż zdawał on sobie sprawę z tego, że linia prosta może być ciągła lub nieciągła („pojęcie przestrzeni jest całkowicie niezależne od wyobrażenia ciągłości"), w szczególności, że linia prosta w rozumieniu Euklidesa nie jest ciągła („cały jego [tj. Euklidesa – P.B.] system pozostanie nienaruszony także bez ciągłości").

Właśnie dlatego w tej rozprawie nie znajdziemy rozwiązania kwestii: jak jest możliwe, że $\lim_{n\to\infty} a_n = (a_n)$?

**10**. W komentarzu do §2 rozprawy *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* Joseph Dauben, w popularnej w kręgach filozoficznych książce *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite* pisze:

„W przedmowie do *Stetigkeit und irrationale Zahlen* Dedekind odnotowuje, że [...] wkrótce po tym, jak wysłał do druku swoją rozprawę, zapoznał się z artykułem Cantora z roku 1872. Dedekind, opisując Cantora teorię liczb niewymiernych, był szczególnie poruszony aksjomatem Cantora: «O ile zdołałem się zorientować na podstawie szybkiego pierwszego przejrzenia pracy [Cantor 1872], aksjomat z §2 zgadza się całkowicie, jeśli abstrahować od zewnętrznej formy przedstawienia go, z tym, co poniżej w §3 określiłem jako istotę ciągłości». [...] Jednakże aksjomat, w którym Dedekind przypisuje ciągłość linii prostej miał postać: «Jeżeli wszystkie punkty prostej rozpadają się na dwie klasy tego typu, że każdy punkt pierwszej klasy leży na lewo od każdego punktu drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który tworzy ten podział wszystkich punktów na dwie klasy, czyli rozcięcie prostej» [...]

Chociaż był on interpretowany jako równoważny hipotezie Cantora, że każdej liczbie rzeczywistej odpowiada dokładnie jeden punkt na prostej euklidesowej, to w aksjomacie Dedekinda odpowiedniość ta w żadnym razie nie została *explicite* przedstawiona. Jest ona oczywiście jednym z większych odkryć Cantora [...]. Hipoteza, że taka odpowiedniość jest możliwa doprowadziła Cantora do aksjomatu, który w istocie leży u podstaw pełnego zrozumienia natury ciągłości i wszelkiej dziedziny ciągłej".[61]

Przytoczymy teraz ten fragment *Stetigkeit*, do którego odnosi się Dauben:

„Gdy piszę tę przedmowę (20 Marca 1872), otrzymałem właśnie interesującą pracę G. Cantora *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Math. Annalen von Clebsch und Neumann, t. 5), za którą chciałbym bystremu i wnikliwemu autorowi serdecznie podziękować. O ile zdołałem się zorientować na podstawie szybkiego pierwszego przejrzenia pracy, aksjomat z paragrafu 2 zgadza się całkowicie, jeśli abstrahować od zewnętrznej formy przedstawienia go, z tym, co poniżej w paragrafie 3 określiłem jako istotę ciągłości. Jaki jednak jest pożytek z tego, jeśli tylko pojęciowego odróżnienia [begriffliche Unterscheidung] rzeczywistych wielko-

[61] [Dauben 1990], s. 320; wyjątki z rozprawy Dedekinda cytowane za [Dedekind 1872].

ści liczbowych jeszcze wyższych rodzajów nie potrafię rozpoznać na podstawie mojego ujęcia doskonałej w sobie dziedziny liczb rzeczywistych".[62]

Dauben jest przekonany, że mówiąc o aksjomacie Dedekind ma na uwadze to, co sam Cantor nazwał aksjomatem. Z kontekstu wypowiedzi wynika jednak, że Dedekind odnosi się do zdań:

„Podczas gdy w przypadku zbiorów $A$ i $B$ jest tak, że każde $a$ równa się pewnemu $b$, ale nie odwrotnie, [...] okazuje się, że zarówno każdemu $b$ odpowiada pewne $c$, jak i na odwrót, każdemu $c$ odpowiada pewne $b$. [...] Jakkolwiek przez to zbiory $B$ i $C$ do pewnego stopnia pokrywają się, to istotne jest, aby na podstawie przedłożonej teorii [...], uchwycić różnicę pojęciową [begrifflichen Unterschiede] między zbiorami $B$ i $C$, bo przecież równość pomiędzy wielkościami liczbowymi $b$, $b'$ z $B$ nie oznacza ich identyczności".

Mówiąc o aksjomacie Dedekind ma zatem na uwadze to, że zbiór $B$ jest zupełny w sensie Cauchy'ego.

Dzisiaj wiemy, że ciągłość (w sensie Dedekinda) i zupełność (w sensie Cauchy'ego) nie są równoważnymi własnościami. Natomiast w związku z patosem, jaki przenika uwagę Daubena o „naturze ciągłości" powtórzmy: w *Über die Ausdehnung eines Satzes* Cantor nie ustanawia żadnej odpowiedniości między liczbami rzeczywistymi a linią prostą, bo w rozprawie tej prosta jest nieokreślonym obiektem. Fakt ten staje się zupełnie oczywisty, gdy porównamy drugi paragraf *Über die Ausdehnung eines Satzes* z twierdzeniami o istnieniu i surjektywności miary z *Podstaw geometrii* Karola Borsuka i Wandy Szmielew.

[62] [Dedekind 1872], s. 137.

# Georg Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, 1883

**11.** W §9 tej rozprawy Cantor przedstawia raz jeszcze teorię liczb rzeczywistych. Kontekst rozważań stanowi tym razem teoria mnogości. Punktem wyjścia są liczby wymierne.

„Z uwagi na wielkie znaczenie, jakie dla teorii zbiorów mają tak zwane liczby rzeczywiste, wymierne i niewymierne, chciałbym przedstawić najważniejsze kwestie dotyczące ich definicji. Liczb wymiernych nie będę omawiał, bo wielokrotnie były one w ścisły, arytmetyczny sposób przedstawiane".[63]

Swoją teorię prezentuje Cantor na tle koncepcji Weierstrassa i Dedekinda.

„Chciałbym przedstawić i omówić trzy podstawowe sposoby (w gruncie rzeczy są one chyba jednym i tym samym) ścisłego, arytmetycznego wprowadzenia ogólnych liczb rzeczywistych. Pierwszą definicję stosował przez wiele lat Prof. Weierstrass w swoich wykładach z funkcji analitycznych",[64]

drugi sposób, to teoria („osobliwa definicja") Dedekinda, trzeci – Cantora.

11.1. „Definicja" Weierstrassa.

„W definicji pierwszej, za podstawę przyjęto zbiór dodatnich liczb wymiernych $a_\nu$, oznaczany jako $(a_\nu)$; spełnia on warunek: suma każdej skończonej ilości wyrazów $a_\nu$ jest zawsze mniejsza od pewnej z góry ustalonej granicy. Gdy dane są dwa takie agregaty $(a_\nu)$ i $(a'_\nu)$, to pokazuje się, że możliwe są tylko trzy przypadki",[65]

[63] [Cantor 1883], s. 183.
[64] [Cantor 1883], s. 183.
[65] [Cantor 1883], s. 184.

zapiszmy je symbolicznie:

$$(1)\ \forall n \exists k \forall m [k < m \to |\sum_{i=0}^{m} a_i - \sum_{i=0}^{m} a_i'| < \tfrac{1}{n}],$$

$$(2)\ \exists n \exists k \forall m [k < m \to \sum_{i=0}^{m} a_i - \sum_{i=0}^{m} a_i' > \tfrac{1}{n}],$$

$$(3)\ \exists n \exists k \forall m [k < m \to \sum_{i=0}^{m} a_i' - \sum_{i=0}^{m} a_i > \tfrac{1}{n}],$$

gdzie – powtórzmy – ciągi $(a_\nu), (a_\nu') \subset \mathbb{Q}_+$ są takie, że ciągi sum częściowych $(\sum_{i=0}^{\nu} a_i)$, $(\sum_{i=0}^{\nu} a_i')$ są ograniczone z góry.

„Odpowiednio, jeżeli $b$ i $b'$ są liczbami zdefiniowanymi przez agregaty $(a_\nu)$ i $(a_\nu')$, to w pierwszym przypadku przyjmujemy $b = b'$, w drugim $b > b'$, w trzecim $b < b'$. Jeżeli z dwóch agregatów utworzony jest nowy agregat $(a_\nu + a_\nu')$, to stanowi on podstawę definicji $b + b'$, a jeżeli z agregatów $(a_\nu)$ i $(a_\nu')$ utworzony jest agregat $(a_\nu \cdot a_\nu')$ [...], to stanowi on podstawę definicji iloczynu $bb'$".[66]

Teorię Weierstrassa Cantor opatrzył komentarzem:

„należy podkreślić, że zawsze sumujemy skończenie wiele elementów wymiernych, a liczba $b$ nie jest definiowana jako suma $\sum a_\nu$ nieskończonego ciągu $(a_\nu)$, postępując tak popełnilibyśmy bowiem błąd logiczny; sumę $\sum a_\nu$ definiujemy jako równą skończonej liczbie $b$, która musi być wcześniej zdefiniowana. Weierstrass jako pierwszy zdołał uniknąć tego błędu; ten logiczny błąd popełniano w przeszłości powszechnie, a nie był on zauważony tylko dlatego, że należy do tych nielicznych przypadków, w których faktyczny błąd nie wpływa znacząco na wyniki obliczeń".[67]

11.2. „Definicja Dedekinda przyjmuje w punkcie wyjścia zbiór wszystkich liczb wymiernych. [...] [Przekrój zbioru liczb wymiernych – P.B.] oznacza jako $(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu)$ i wiąże z nim pewną liczbę $b$. [...] Ma ona tę niewątpliwą zaletę w porównaniu z dwoma pozostałymi definicjami, że każdej liczbie $b$ odpowiada dokładnie jeden przekrój [liczb wymiernych – P.B.]. Poważną wadą tej definicji jest natomiast to, że w analizie liczby nigdy nie są 'przekrojami' i potrzeba sporo wysiłku, aby przedstawić je w ten dość sztuczny sposób".[68]

[66] [Cantor 1883], s. 184.

[67] [Cantor 1883], s. 185.

[68] [Cantor 1883], s. 185. Cantor – jak widać – nie zauważa, że liczbie wymiernej odpowiadają dwa przekroje. „Definicja" liczb rzeczywistych jest dlań „definicją" liczb niewymiernych.

11.3. „Definicja" trzecia. Ciąg fundamentalny $(a_n)$ jest definiowany jako przeliczalny zbiór liczb wymiernych, który spełnia warunek

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists k \forall n [|a_{k+n} - a_k| < \varepsilon].$$

„Każdy taki zbiór $(a_\nu)$ nazywam *ciągiem fundamentalnym* i wiążę z nim liczbę $b$, która jest przezeń zdefiniowana i którą dogodnie jest oznaczać tym samym symbolem $(a_\nu)$".[69]

Porządek. Każdy ciąg fundamentalny spełnia jeden z warunków:

(1) $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists k \forall m [k < m \to |a_m| < \varepsilon]$,
(2) $\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists k \forall m [k < m \to a_m > \varepsilon]$,
(3) $\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists k \forall m [k < m \to a_m < -\varepsilon]$.

„W pierwszym przypadku przyjmuję, że $b$ równe jest zero, w drugim, że $b$ jest większe od zera, lub dodatnie, w trzecim, że $b$ jest mniejsze od zera, lub ujemne".[70]

Działania.

„Jeżeli $(a_\nu)$ i $(a'_\nu)$ są ciągami fundamentalnymi, które wyznaczają liczby $b$ i $b'$, to można pokazać, że także $(a_\nu \pm a'_\nu)$ oraz $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ są ciągami fundamentalnymi, które wyznaczają trzy nowe liczby, służące za definicje sumy, różnicy $b \pm b'$ oraz iloczynu $bb'$. Ponadto, jeżeli $b'$ jest różne od zera (w myśl wyżej podanej definicji), to można pokazać, że $(a'_\nu/a_\nu)$ też jest ciągiem fundamentalnym, któremu odpowiada liczba definiująca iloraz $b'/b$".[71]

Przedstawienie liczby wymiernej.

„Podstawowe operacje między liczbą $b$ daną przez ciąg fundamentalny $(a_\nu)$ oraz daną wprost liczbą wymierną $a$, są zawarte w wyżej podanych definicjach, gdy tylko przyjmiemy, że $a'_\nu = a$, $b' = a$",[72]

co znaczy, że liczba wymierna $a$ jest reprezentowana przez ciąg stacjonarny $(a, a, a, \dots)$.

[69] [Cantor 1883], s. 186.
[70] [Cantor 1883], s. 186.
[71] [Cantor 1883], s. 186.
[72] [Cantor 1883], s. 186.

Porządek liczb rzeczywistych.

„Dopiero teraz można podać definicję równości, większości, mniejszości, dla dwóch liczb $b$ i $b'$ (gdzie $b'$ może być też $= a$), mianowicie, mówimy, że $b = b'$, lub $b > b'$, lub $b < b'$, w zależności od tego, czy $b - b'$ jest równe zero, czy jest większe, czy też mniejsze od zera".[73]

Zupełność liczb rzeczywistych.

„Po tych przygotowaniach, otrzymujemy pierwsze twierdzenie, które może być ściśle udowodnione: jeżeli ciąg fundamentalny $(a_\nu)$ wyznacza liczbę $b$, wówczas $b - a_\nu$, wraz ze wzrastającym $\nu$, staje się mniejsze co do wartości bezwzględnej od dowolnej liczby wymiernej, czy też, co na jedno wychodzi, że:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = b.$$

To ważny moment i wskazana jest tu duża ostrożność, bo łatwo o pomyłkę: w trzeciej definicji [tj. Cantora definicji liczb rzeczywistych – P.B.], liczba $b$ nie jest, powiedzmy, definiowana jako granica wyrazów $a_\nu$ ciągu fundamentalnego $(a_\nu)$, bo byłby to błąd logiczny [...], tj. przyjęlibyśmy istnienie granicy $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$. Sytuacja jest raczej odwrotna. W naszych wcześniejszych definicjach pojęcie $b$ było pomyślane jako posiadające pewne własności i związki z liczbami wymiernymi tak, że w rezultacie możemy wyciągnąć logicznie pewny wniosek, iż $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ istnieje i jest równe $b$".[74]

Dalej, po uwagach o sposobie istnienia liczb rzeczywistych – „są równie realne w naszych umysłach, jak liczby wymierne, a nawet, jak liczby całkowite" – Cantor przechodzi do zupełności liczb rzeczywistych:

„Można teraz z łatwością rozszerzyć wypowiedziane wyżej twierdzenie jak następuje: Jeżeli $(b_\nu)$ jest ciągiem liczb wymiernych lub niewymiernych spełniających warunek $\lim_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu} - b_\nu) = 0$ (dla dowolnego $\mu$), wówczas istnieje taka liczba $b$ wyznaczona przez pewien ciąg fundamentalny $(a_\nu)$, że

$$\lim_{\nu=\infty} b_\nu = b".$$[75]

I to wszystko na temat zupełności. Tak więc i w *Grundlagen* Cantor nie podaje dowodu, jakkolwiek odróżnia tu liczbę wymierną $a$ od przedstawienia jej w postaci ciągu stacjonarnego $(a, a, a, \dots)$, to zaś pozwala już udowodnić zupełność liczb rzeczywistych, co pokażemy w następnym punkcie.

[73] [Cantor 1883], s. 186–187.
[74] [Cantor 1883], s. 187.
[75] [Cantor 1883], s. 187.

# Ernest Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable and The Theory of Fourier's Series*, 1907

**12.** W roku 1907, w książce *The Theory of Functions of a Real Variable and The Theory of Fourier's Series* Ernest Hobson podał jeden z pierwszych dowodów zupełności liczb rzeczywistych.[76]

Hobson wyraźnie odróżnia liczbę wymierną $q$ od liczby rzeczywistej $(q, q, q, \dots)$. W definicji warunku Cauchy'ego dla ciągu liczb wymiernych przyjmuje $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$, a dla ciągu liczb rzeczywistych $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, a wreszcie, teorię liczb rzeczywistych poprzedza dowodami podstawowych twierdzeń teorii granic, ale dla ciągów liczb wymiernych: suma, różnica, iloczyn oraz iloraz (przy znanych zastrzeżeniach) ciągów Cauchy'ego jest ciągiem Cauchy'ego.

12.1. „Przyjmujemy, że każdy ciąg Cauchy'ego $\{a_n\}$, którego elementami są liczby wymierne, reprezentuje liczbę rzeczywistą".[77]

Dalej, każdej liczbie wymiernej $x$ przypisuje Hobson liczbę rzeczywistą $(x, x, x, \dots)$, co tak uzasadnia:

„Zespół liczb rzeczywistych zawiera w sobie zespół przedmiotów, który jest podobny do uporządkowanego agregatu liczb wymiernych [...]. Liczby wymierne są zwykle identyfikowane z liczbami rzeczywistymi, którym odpowiadają i są one oznaczane tymi samymi symbolami. W wykładzie Analizy identyczność ta nie rodzi żadnych trudności. Jednak gdy zajmujemy się podstawami zespołu liczb rzeczywistych, a zwłaszcza wtedy, gdy ustalamy

[76] W swoim czasie książka ta była wielkim wydarzeniem, między innymi z tego powodu, że upowszechniła na Wyspach Brytyjskich, wcześniej znaną tylko na kontynencie, teorię miary Lebesgue'a.

[77] [Hobson 1921], s. 30. Ciąg spełniający warunek Cauchy'ego Hobson nazywa ciągiem zbieżnym dlatego, aby uniknąć nieporozumień, convergent sequence tłumaczymy jako ciąg Cauchy'ego; z tych samych powodów, w kilku miejscach przyjmujemy też inne oznaczenia niż w oryginale.

zależność między teorią Cantora i Dedekinda, aby uniknąć logicznych trudności, winniśmy odróżnić pojęciowo liczby wymierne od liczb rzeczywistych, którym one odpowiadają".[78]

12.2. „Ogólna Zasada Zbieżności. Warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności ciągu liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ jest to, aby dla każdej dodatniej liczby $\varepsilon$ istniała taka wartość $n$, że wszystkie $x_n - x_{n+1}$, $x_n - x_{n+2}, x_n - x_{n+3}, \ldots$ będą numerycznie mniejsze od $\varepsilon$".[79]

Dowód przeprowadzony jest w trzech krokach.

(1) „Jeżeli $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ definiują dwie różne liczby rzeczywiste $a,\ b$, to między $a,\ b$ leży nieskończenie wiele liczb, które odpowiadają liczbom wymiernym".[80]

Istotnie, jeżeli $\{a_n\} > \{b_n\}$, to dla pewnego $\delta \in \mathbb{Q}_+$ istnieje takie $k$, że zachodzi

$$a_{k+m} - b_{k+m} \geqslant \delta, \quad |a_k - a_{k+m}| < \frac{\delta}{2}, \quad |b_k - b_{k+m}| < \frac{\delta}{2}.$$

Przyjmując, że $x \in \mathbb{Q}_+ \cap (\frac{\delta}{2}, \delta)$, ciąg stacjonarny $\{a_k - x\}$ „odpowiada" liczbie wymiernej i zachodzi

$$\{a_n\} > \{a_k - x\} > \{b_n\}.$$

(2) „Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego liczb wymiernych i niech $\{\overline{a}_n\}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, które odpowiadają liczbom tworzącym ciąg $\{a_n\}$. Łatwo pokazać, że $\{\overline{a}_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. [...] Widzimy też, że jeżeli $\{\overline{a}_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego to jest nim także $\{a_n\}$".[81]

Kolejne wyrazy ciągu $\{\overline{a}_n\}$ to ciągi stacjonarne liczb wymiernych

$$\begin{array}{c} (a_1, a_1, a_1, \ldots) \\ (a_2, a_2, a_2, \ldots) \\ (a_3, a_3, a_3, \ldots) \\ \vdots \end{array}$$

[78] [Hobson 1921], s. 30.

[79] [Hobson 1921], s. 37; „numerycznie mniejsze" znaczy tu: co do wartości bezwzględnej. Twierdzenie opatrzone jest przypisem, że nazwa twierdzenia została przejęta z książki P. Du Bois-Reymonda, *Die allgemaine Funktiontheorie* (1882).

[80] [Hobson 1921], s. 33.

[81] [Hobson 1921], s. 34.

Dowód własności (2) polega na tym, że zamiast „dowolnie wybranej dodatniej liczby rzeczywistej $\varepsilon$", przyjmuje Hobson $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+$, gdzie $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$. Wówczas, na mocy założenia, istnieje takie $k$, że

$$a_k + \varepsilon > a_{k+m} > a_k - \varepsilon, \quad \text{dla dowolnego } m.$$

„Stąd wynika, że $\overline{a}_{k+m}$ leży między $\overline{a}_k + \bar{\varepsilon}$, $\overline{a}_k - \bar{\varepsilon}$, a to oznacza, że $\{\overline{a}_k\}$ jest ciągiem Cauchy'ego".[82]

(3) „Następnie, niech $\{\alpha_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego liczb rzeczywistych. Pomiędzy liczbami $\alpha_n$ i $\alpha_{n+1}$ leży liczba rzeczywista $\overline{p}_n$, która odpowiada liczbie wymiernej wyznaczonej pod koniec §28 [chodzi o krok (1) dowodu – P.B.]. Powtórzmy tę operację w stosunku do wszystkich par sąsiednich elementów ciągu $\{\alpha_n\}$ i rozważmy ciągi $\{\overline{p}_n\}$ i $\{\alpha_n\}$. [...] zachodzi

$$|\overline{p}_n - \overline{p}_{n+m}| \leqslant |\overline{p}_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_{n+m}| + |\alpha_{n+m} - \overline{p}_{n+m}|".[83]$$

Tak więc $\{\overline{p}_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego liczb rzeczywistych.[84]

Granicą ciągu $\alpha_n$ ma być oczywiście $\{p_n\}$. Zobaczmy, jak Hobson wykazuje równość $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \{p_n\}$. Wcześniej jednak musimy rozwikłać pewne zapętlenie pojęciowe. Otóż o ciągach liczb rzeczywistych Hobson pisze:

„Jeżeli przyjmiemy, że każdy ciąg Cauchy'ego liczb rzeczywistych reprezentuje pewien idealny przedmiot, jeżeli analogicznie, jak w §26 i §27 [tj. jak dla ciągów liczb wymiernych – P.B.] zdefiniujemy równość i nierówność oraz podstawowe operacje, i jeżeli podobnie, jak poprzednio, przyjmiemy, że ciąg Cauchy'ego, w którym wszystkie wyrazy są równe liczbie rzeczywistej $\alpha$ reprezentuje jeden z tych nowych obiektów, który odpowiada $\alpha$, to pokażemy, że ten nowy zespół przedmiotów jest podobny do zespołu liczb rzeczywistych".[85]

Przechodząc do dowodu, czytamy:

„Raz jeszcze

$$\{\alpha_n\} - \{\bar{p}_n\} = \{\alpha_n - \bar{p}_n\} \quad \text{oraz} \quad |\alpha_n - \bar{p}_n| < |\alpha_n - \alpha_{n+1}|,$$

[82] [Hobson 1921], s. 35.

[83] [Hobson 1921], s. 35.

[84] Przy wyborze liczby $\overline{p}_n$ Hobson *implicite* przyjmuje, że ciąg $\{\alpha_n\}$ jest różnowartościowy.

[85] [Hobson 1921], s. 34.

a skoro $\{\alpha_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego, to istnieje taki wskaźnik $k$, że dla wszystkich większych wskaźników $n$ różnice $|\alpha_n - \alpha_{n+1}|$ są mniejsze od dowolnej ustalonej liczby, dlatego $|\alpha_n - \bar{p}_n|$ spełniają ten sam warunek, zatem dwa ciągi Cauchy'ego $\{\alpha_n\}$ i $\{\bar{p}_n\}$ spełniają warunek równości [tj. są równoważne – P.B.], lub inaczej, reprezentują ten sam nowy przedmiot. Wcześniej pokazaliśmy, że jeżeli $\{\bar{p}_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego, to takim ciągiem jest też $\{p_n\}$. Ale $\{p_n\}$ odpowiada pewnej liczbie rzeczywistej $\alpha$, dlatego każdemu ciągowi Cauchy'ego liczb rzeczywistych $\{\alpha_n\}$ odpowiada liczba rzeczywista $\alpha$".[86]

Hobson nie podaje więc bezpośredniego dowodu równości $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \{p_n\}$, tym niemniej przy rozróżnieniu $q$ i $(q, q, q, \dots)$ taki dowód można już przeprowadzić.

Zacznijmy od tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{p}_n = \{p_n\}$. Otóż dla ustalonego $k$ zachodzi

$$\bar{p}_k - \{p_n\} = \{p_k - p_1, p_k - p_2, p_k - p_3, \dots\} = \{p_k - p_n\}.$$

Dla $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+$ istnieje takie $k$, że dla wszystkich $m > k$ zachodzi

$$|p_k - p_m| < \varepsilon,$$

czyli

$$|\bar{p}_k - \{p_n\}| \leqslant \varepsilon,$$

Podobnie przy ustalonym $m$, ale takim, że $m > k$, zachodzi

$$|\bar{p}_m - \{p_n\}| \leqslant \varepsilon,$$

co znaczy, że $\lim_{n\to\infty} \bar{p}_n = \{p_n\}$. Ciąg $\{p_n\}$ możemy przedstawić, jako *przekątną* następującej tablicy

$$\begin{array}{l}
\bar{p}_1 = (p_1,\ p_1,\ p_1,\ \dots\ p_1,\ \dots) \\
\bar{p}_2 = (p_2,\ p_2,\ p_2,\ \dots\ p_2,\ \dots) \\
\bar{p}_3 = (p_3,\ p_3,\ p_3,\ \dots\ p_3,\ \dots) \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots\ \ \vdots\ \ \ddots\ \ \vdots \\
\bar{p}_n = (p_n,\ p_n,\ p_n,\ \dots\ p_n,\ \dots) \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots\ \ \vdots\ \ \dots\ \ \vdots\ \ \ddots
\end{array}$$

Ostatecznie, korzystając z tego, co pokazał już Hobson, że ciąg $\{\alpha_n - \bar{p}_n\}$ jest zbieżny do zera, związek $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \{p_n\}$ otrzymujemy z nierówności trójkąta

$$|\alpha_n - \{p_n\}| \leqslant |\alpha_n - \bar{p}_n| + |\bar{p}_n - \{p_n\}|.$$

[86] [Hobson 1921], s. 35.

Dla dowodu zupełności wystarczy zatem odróżnić $q$ i $(q, q, q, \dots)$. Cóż więc zyskujemy dzięki konstrukcji ilorazowej?

12.3. Hobson podkreśla różnicę w definicji ciągu Cauchy'ego liczb wymiernych i rzeczywistych: w pierwszym przypadku $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$, w drugim $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dodając do tego przedstawienie liczby wymiernej w postaci ciągu stacjonarnego, jest przekonany, że rozwiązał trudność tkwiącą w oryginalnej koncepcji Cantora. Czytamy:

„Zespół $(x, x, x, \dots)$, czy $\{x\}$, gdzie wszystkie wyrazy są równe liczbie wymiernej $x$, jako że jest ciągiem Cauchy'ego, reprezentuje liczbę rzeczywistą odpowiadającą liczbie wymiernej $x$ [...]. Cantora teoria liczb niewymiernych, w postaci, w jakiej została przedstawiona przez Cantora i Heine'go, została skrytykowana [B. Russell, *The Principle of Mathematics*, vol. I, s. 568] na tej podstawie, że zakłada, iż ciąg $\{x\}$, w którym wszystkie wyrazy są równe liczbie wymiernej $x$, reprezentuje tę właśnie liczbę wymierną $x$ i w rezultacie $x$ jest granicą ciągu $\{x\}$, jednak arytmetyczna teoria granic jest rozwijana przez Cantora na gruncie teorii liczb niewymiernych i jako taka nie jest dana przy konstruowaniu podstaw teorii. Przedstawiona wyżej teoria nie jest już podatna na ten zarzut".[87]

Uwaga ta następuje po udowodnieniu odpowiednich twierdzeń o granicach ciągów liczb wymiernych. Idzie tu zatem o to, że w przedstawionej teorii liczb rzeczywistych, teoria granic jest rozwijana najpierw dla ciągów liczb wymiernych, a następnie dla ciągów liczb rzeczywistych. O ile zostanie wykazane, że

$$\forall r \in \mathbb{R}_+ \exists (q \in \mathbb{Q}_R)[0 < q < r],$$

to związek między jedną a drugą teorią granic jest zupełnie prosty. Ale dowód tego faktu jest oczywisty dopiero przy odróżnieniu $\varepsilon$ i $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots)$. Dlatego Hobson wyraźnie odróżnia, i wydaje się być z tego dumny, liczbę wymierną $\varepsilon$ i odpowiadającą jej liczbę rzeczywistą $(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots)$. Przy tym rozróżnieniu można pokazać, że w przestrzeni $\mathbb{Q}$ granicą ciągu stacjonarnego $(x, x, x, \dots)$ jest liczba $x$ oraz, że w przestrzeni $\mathbb{R}$ granicą ciągu stacjonarnego $(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \dots)$, gdzie $x \in \mathbb{Q}$, jest liczba rzeczywista $(x, x, x, \dots)$.

Zobaczmy teraz, jakie słabości w przedłożonej teorii znajduje sam Hobson.

[87] [Hobson 1921], s. 31.

12.4. (1) Co to jest zbiór liczb rzeczywistych?

„Istotą teorii Cantora jest postulat istnienia zespołu przedmiotów myśli, liczb rzeczywistych, uporządkowanych według zasady [...]. Przyjmuje się, że każdy element zespołu liczb rzeczywistych może być symbolicznie przedstawiony za pomocą zbieżnego ciągu liczb wymiernych".[88]

Możemy się zgodzić, że na gruncie teorii Hobsona wiemy, co to jest „zespół liczb" rzeczywistych, mianowicie:

$$\mathbb{R} = \{(a_n) \subset \mathbb{Q} : \ (a_n) \text{ jest ciągiem Cauchy'ego}\}.$$

(2) Co to jest liczba rzeczywista? Powtórzmy definicję:

„Przyjmujemy, że każdy zbieżny ciąg $\{a_n\}$, którego elementami są liczby wymierne reprezentuje liczbę rzeczywistą. Przyjmujemy, że dwa takie ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ reprezentują tę samą liczbę rzeczywistą, gdy spełniają warunek: dla dowolnie wybranej dodatniej liczby wymiernej $\varepsilon$, można znaleźć taką wartość $n$, że $|a_{n+m} - b_{n+m}| < \varepsilon$, dla tej wartości $n$ oraz dla wszystkich wartości $m = 1, 2, 3, \ldots$ . Symbolicznie, $\{a_n\} \equiv \{b_n\}$",

a ostatnie słowo opatrzone jest przypisem:

„Czytelnik przyjmujący pogląd, głoszony przez Heinego i innych, że liczba rzeczywista jest identyczna ze zbiorem reprezentujących ją symboli, może nie przywiązywać do tej równości żadnego bezpośredniego znaczenia. Można przyjąć, że znaczy ona tylko tyle, iż te dwa wyrażenia mogą być zamiennie stosowane, w każdej operacji odnoszącej się do liczb".[89]

W innym miejscu czytamy:

„Jakkolwiek Cantora teoria liczb niewymiernych, czy raczej liczb rzeczywistych, z uwagi na szczegółową prezentację jest poręczniejsza niż teoria Dedekinda, to ma tę wadę, że natura pojedynczej liczby rzeczywistej jest tu niejasna: jakkolwiek jest to indywidualny przedmiot, to może być on reprezentowany przez nieskończenie wiele ciągów zbieżnych i teoria nie wyjaśnia czym jest w rzeczywistości taka liczba".[90]

W wątpliwościach tych Hobson bynajmniej nie był odosobniony. Zobaczmy, dla przykładu, co o teorii liczb niewymiernych pisał Giuseppe Veronese:

[88] [Hobson 1921], s. 29–30.
[89] [Hobson 1921], s. 30.
[90] [Hobson 1921], s. 31.

„Na przykład G. Cantor i Dedekind w swoich wartościowych pracach twierdzą, że ustalając pewien punkt na prostej, można wyznaczyć wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie punktów tej prostej i liczb rzeczywistych tworzących continuum liczbowe. Continuum to budują oni z symboli za pomocą serii abstrakcyjnych definicji, które jakkolwiek są możliwe to jednak zupełnie dowolne".[91]

Wobec faktu, że sami matematycy nie mieli pewności, czym jest liczba rzeczywista, otworzyło się pole dla dociekań filozoficznych o naturę liczby. Tutaj rzecz próbowano rozwiązać głównie na poziomie pytania o istotę liczby naturalnej.[92] Natomiast w matematyce i w związku z liczbami rzeczywistymi problem rozwiązywano na drodze rozróżnienia:

$$q \qquad (q, q, q, \dots) \qquad [(q, q, q, \dots)].$$

12.5. K woli jasności, powiedzmy, jak kwestie te przedstawiają się w konstrukcji ilorazowej.

(1) Co to jest liczba rzeczywista? Liczba rzeczywista jest klasą abstrakcji wyznaczoną przez pewien ciąg Cauchy'ego $(a_n)$ liczb wymiernych:

$$[(a_n)] = \{(b_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : (a_n) \approx (b_n)\},$$

jest więc zbiorem na mocy aksjomatu podzbiorów.[93]

Przypomnijmy aksjomat podzbiorów (dla formuły $\varphi$):

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))],$$

lub krótko

$$y = \{z \in x : \ \varphi(z)\},$$

gdzie $\varphi(z)$ jest formułą teorii ZFC.

(2) Co to jest $\mathbb{R}$? Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest „zespołem" klas abstrakcji. Jest to zbiór na mocy aksjomatu zbioru potęgowego i aksjomatu podzbiorów – co pokazaliśmy wyżej w punkcie 1.3 – lub na mocy aksjomatu zastępowania. Przypomnijmy go. Niech $\psi(x, y)$ będzie przyporządkowaniem (formułą jednoznaczną), tzn.

$$\forall z \exists w [\psi(z, w)] \wedge \forall z \forall w_1 \forall w_2 [(\psi(z, w_1) \wedge \psi(z, w_2)) \rightarrow w_1 = w_2],$$

[91] Guiseppe Veronese, *Fondamenti di geometria* (1891), cytowane za: [Fisher 1994], s. 141.

[92] Np. G. Frege, *Grundlagen der Arithmetik* (1884) i *Grundgesetze der Arithmetik* (1893, 1903), E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik* (1891).

[93] Gdzie $(a_n) \approx (b_n) \leftrightarrow_{df} \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists k \forall m [k < m \rightarrow |a_m - b_m| < \varepsilon]$.

lub krótko

$$\forall z \exists! w[\psi(z,w)],$$

wówczas aksjomat zastępowania (dla formuły $\psi$) ma postać

$$\forall x \exists y \forall w \left[ w \in y \Leftrightarrow \exists z[z \in x \wedge \psi(z,w)] \right],$$

lub krótko

$$y = \{w : \exists z[z \in x \wedge \psi(z,w)]\}.$$

W omawianym przypadku formuła $\psi(z,w)$ w skrócie ma taką postać: $w = [z]_{\approx}$.

W tym ujęciu pytania, czym są liczby rzeczywiste, tj. co to jest $\mathbb{R}$, oraz co to jest liczba rzeczywista, mają już jednoznaczną odpowiedź i nie ma tu już miejsca na wątpliwości dotyczące *natury* liczby.

**13.** Porównajmy to teraz z wyjaśnieniami, jakie znajdujemy w *Analizie* Krzysztofa Maurina i *Arytmetyce teoretycznej* Wacława Sierpińskiego. Czytamy:

„Zbiór klas $\{A_x\}$, $x \in X$, nazywamy przestrzenią ilorazową i oznaczamy przez $X/\Re$ [...]. Klasę $A_x$ oznaczać będziemy przez $[x]$ lub, dokładniej $[x]_{\Re}$”,[94]

gdzie

$$A_x = \{y \in X : (x,y) \in \Re\}.$$

Natomiast zupełnie zagadkowo wygląda to w wykładzie *Arytmetyka teoretyczna*, bo nie tylko, że nie jest jasne, dlaczego (na podstawie jakich aksjomatów) liczby rzeczywiste tworzą zbiór, ale nie wiadomo też, czym jest liczba rzeczywista. Czytamy:

„Liczbę, która jest wymierna, bądź niewymierna, nazywamy liczbą rzeczywistą. Każda liczba rzeczywista wyznacza pewną klasę ciągów podstawowych [...]; o klasie tej będziemy mówili, że odpowiada rozważanej liczbie rzeczywistej. Jeżeli liczba ta jest niewymierna, klasą tą jest sama ta liczba, jeżeli zaś liczba jest wymierna, odpowiadającą jej klasą jest klasa wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach wymiernych, których granicą jest rozważana liczba wymierna. Odpowiedniość między liczbami rzeczywistymi a klasami ciągów podstawowych [...] jest, jak łatwo spostrzec, wzajemnie jednoznaczna”.[95]

[94] [Maurin 1991], t. I, s. 33.

[95] [Sierpiński 1966], s. 202.

Rysuje się tutaj taki obraz:

(1)„Każda liczba rzeczywista wyznacza pewną klasę ciągów podstawowych", czyli

$$r \mapsto [(a_n)].$$

(2) „Jeżeli liczba ta jest niewymierna, klasą tą jest sama ta liczba", czyli np. dla ciągu $(a_n)$, gdzie $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, jest

$$[(a_n)] \mapsto [(a_n)].$$

(3) „[J]eżeli zaś liczba jest wymierna, odpowiadającą jej klasą jest klasa wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach wymiernych, których granicą jest rozważana liczba wymierna", czyli dla $q \in \mathbb{Q}$ jest

$$q \mapsto \{(a_n) \subset \mathbb{Q} : \lim_{n\to\infty} a_n = q\}.$$

(4) „Odpowiedniość między liczbami rzeczywistymi a klasami ciągów podstawowych [...] jest [...] wzajemnie jednoznaczna".

Dziedzinę tej odpowiedniości, oznaczmy ją jako $\varphi$, stanowią „liczby rzeczywiste", oznaczmy je jako $X$, zaś przeciwdziedziną jest zbiór klas abstrakcji ciągów podstawowych, tj. $\mathbf{C}/_{\approx}$. Z poprzednich zdań wynika, że $X$ jest zbiorem, który zawiera $\mathbb{Q}$ oraz te klasy abstrakcji, które „odpowiadają liczbom niewymiernym". Tak więc $X$ ma być zbiorem $\mathbf{C}/_{\approx}$, w którym *zamiast* klas $[(q, q, q, \dots)]$, gdzie $q \in \mathbb{Q}$, *występują* elementy $q$, tj.

$$\varphi : X \mapsto \mathbf{C}/_{\approx}, \quad \text{a przy tym}$$

$$\varphi_{|\mathbb{Q}} : X \ni q \mapsto [(q, q, q, \dots)], \quad \text{oraz} \quad \varphi_{|IQ} : X \ni [(a_n)] \mapsto [(a_n)].$$

Otóż w konstrukcji ilorazowej jest jeden i tylko jeden zbiór liczb rzeczywistych, mianowicie $\mathbf{C}/_{\approx}$ i nie ma poza nim żadnych innych liczb rzeczywistych, nie ma żadnego zbioru $X$, który miałby być odwzorowywany na zbiór $\mathbf{C}/_{\approx}$.

13.1. Uporządkowane ciało ułamków $\mathfrak{R}_Q$ i uporządkowane ciało liczb wymiernych $\mathfrak{Q}$ są izomorficzne, lecz związek, jaki między nimi zachodzi w ramach omawianej konstrukcji w żadnej mierze nie da się do tego sprowadzić. Ciało $\mathfrak{Q}$ jest dane w punkcie wyjścia, $\mathfrak{R}_Q$ jest natomiast definiowane jako podciało ciała $\mathfrak{R}$. Po drugie, w dowodzie zupełności $\mathfrak{R}$ nie można nie odróżniać $\mathfrak{R}_Q$ i $\mathfrak{Q}$.

W wykładzie *Analiza*, przypomnijmy, zaraz po zdefiniowaniu $\mathfrak{R}$ *utożsamia* się ciała $\mathfrak{R}_Q$ i $\mathfrak{Q}$:

„Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ jest przestrzenią ilorazową $\mathbf{C}/_{\sim}$. $\mathbf{Q}$ identyfikujemy ze zbiorem klas ciągów stałych”,[96]

i, jak widzieliśmy, przedstawiony tam dowód zupełności nie jest jasny, lub inaczej, jest zrozumiały tylko dla tego czytelnika, który skądinąd wie, jak udowodnić zupełność liczb rzeczywistych.

13.2. Filozoficznie nastrojeni matematycy mają skłonność do utożsamiania, identyfikowania struktur izomorficznych.[97] Zobaczmy:

„Jednym z najważniejszych pojęć nowoczesnej algebry jest pojęcie izomorfizmu. Określimy teraz to pojęcie dla pierścieni całkowitych [...]. Mówiąc mniej ściśle dwa pierścienie całkowite są izomorficzne, gdy różnią się tylko sposobem zapisu swoich elementów”.[98]

Otóż cały nasz długi wywód związany z zupełnością $\mathfrak{R}$ służy ukazaniu innych niż algebraiczne aspektów ciała $\mathfrak{R}_Q$, w szczególności chcieliśmy pokazać, że w dowodzie zupełności nie można *utożsamiać* $\mathfrak{Q}$ i $\mathfrak{R}_Q$.

Przy okazji zauważmy, że to, co z jednego punktu widzenia jest „tylko sposobem zapisu elementów” w innych kontekstach jest znaczącym osiągnięciem. W jednych dziedzinach matematyki istotne jest to, że liczbę rzeczywistą można przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego, w innych – że liczbę można przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego, a w jeszcze innych przedstawienie nie ma żadnego znaczenia, a istotne jest tylko to, że wszystkie liczby rzeczywiste razem wzięte są ciałem uporządkowanym w sposób ciągły. Pojęcie izomorfizmu związane jest z tym trzecim podejściem. Przy samej konstrukcji liczb rzeczywistych podejście to nie jest właściwe.

[96] [Maurin 1991], s. 41.
[97] Zob. [Maurin 1991], t. I, *Wstęp*.
[98] [Birkhoff, Mac Lane 1957], s. 41.

# Felix Hausdorff
# *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914

**14.** Definiując zupełność liczb rzeczywistych podkreślaliśmy, że to ciało uporządkowane liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}$ jest zupełne, w matematyce natomiast przestrzeń zupełna jest najczęściej rozumiana jako szczególna przestrzeń metryczna.[99] Chodzi więc o to, czy liczby rzeczywiste są w pierwszym rzędzie ciałem uporządkowanym, czy przestrzenią metryczną. Zrazu wydaje się, że jest to jedynie kwestia konwencji, ale pytanie to ma również wymiar merytoryczny.

Wiadomo, że w danej przestrzeni można wprowadzić różne metryki. Gdy liczby rzeczywiste są rozumiane jako przestrzeń metryczna, to mamy na uwadze wyróżnioną metrykę, mianowicie metrykę zadaną przez wartość bezwzględną. Wartość bezwzględna jest definiowana poprzez porządek – „naturalny porządek", jak to się zwykle mówi. Pytanie sprowadza się zatem do tego, czy można matematycznie wyróżnić ów „naturalny porządek".

14.1. Witold Więsław w książce *Matematyka i jej historia* tak pisze o Cantora konstrukcji liczb rzeczywistych:

„Konstrukcje Méraya, Cantora i Heinego to, najkrócej mówiąc, konstrukcje uzupełnienia ciała $\mathcal{Q}$ liczb wymiernych względem zwykłej metryki na prostej",[100]

i trochę dalej

„Jaki jest ogólny schemat konstrukcji? Dotyczy on uzupełnienia przestrzeni metrycznej $(X, d)$ względem metryki $d$ i w istocie niewiele różni się od

[99] Zob. [Kuratowski 1973], rozdz. XV, [Sieklucki 1978], rozdz. II. (Przestrzeń zupełna może być też zdefiniowana jako szczególna przestrzeń jednostajna, ale tego wątku nie podejmujemy.)

[100] [Więsław 1997], s. 100.

opisanej wyżej konstrukcji uzupełnienia przestrzeni metrycznej $\mathcal{Q}$ względem metryki $d(x, y) = |x - y|$".[101]

Niżej przedstawimy Hausdorffa konstrukcję uzupełnienia przestrzeni metrycznej do przestrzeni metrycznej zupełnej i sprawdzimy w czym jest ona podobna do konstrukcji Cantora.

Zacznijmy od pojęcia przestrzeni metrycznej i sięgnijmy do źródeł. Jako pierwszy definicję przestrzeni metrycznej podał Maurice Fréchet w pracy *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (1906),[102] a już w roku 1914, w sposób ogólny o przestrzeniach metrycznych pisał Felix Hausdorff w książce *Grundzüge der Mengenlehre.*[103]

14.2. Przestrzeń metryczna to para $(E, \varrho)$, gdzie $\varrho$ jest funkcją

$$\varrho : E \times E \ni (x, y) \mapsto \varrho(x, y) \in R_+ \cup \{0\} \ ,$$

która spełnia warunki:
$(\alpha)$ $\varrho(x, x) = 0$,
$(\beta)$ $\varrho(x, y) = \varrho(x, y) > 0, \quad \text{dla } x \neq y$,
$(\gamma)$ $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqslant \varrho(x, z)$.[104]

Podawszy tę definicję, Hausdorff pisze:

„Najprostszym przykładem [przestrzeni metrycznej – P.B.] jest zbiór liczb rzeczywistych $E_1$, gdzie odległość jest zdefiniowana jako wartość bezwzględna $|x - y|$ różnicy dwóch liczb".[105]

Dla ciągu punktów $(x_n)$ dowolnej przestrzeni metrycznej $(E, \varrho)$ można zdefiniować warunek Cauchy'ego:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists k \in N \forall m \in N[k < m \to \varrho(x_k, x_m) < \varepsilon],$$

i właśnie na tej podstawie wśród przestrzeni metrycznych wyróżnia się przestrzenie zupełne. Hasudorff tak to przedstawia:

„Ciąg punktów $(x_1, x_2, \dots)$ nazywamy ciągiem fundamentalnym, lub ciągiem Cauchy'ego, gdy dla każdego $\varepsilon$ (dowolnie małego) istnieje w tym ciągu

[101] [Wiesław 1997], s. 102.

[102] Zob. [Engelking 1989], t. II, s. 297, [Sieklucki 1978], s. 136.

[103] W dalszym ciągu będziemy cytować angielskie tłumaczenie oparte na trzecim wydaniu tej książki, ale z *Przedmowy* można wnosić, że rozdział poświęcony przestrzeniom metrycznym jest taki, jak w wydaniu pierwszym; zob. [Hausdorff 1937], s. 5–6.

[104] Zob. [Hausdorff 1937], s. 109; odległość punktu $x$ od punktu $y$ Hausdorff oznacza pisząc po prostu $xy$, nie jest też wprost powiedziane, że przestrzeń metryczna jest parą $(E, \varrho)$.

[105] [Hausdorff 1937], s. 109.

taki punkt $x_m$, że jego odległość od wszystkich następnych punktów jest $< \varepsilon$:

$$x_m x_n < \varepsilon, \quad \text{dla } n > m.$$

Każdy ciąg zbieżny jest oczywiście ciągiem fundamentalnym. Generalnie, twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, gdyż warunek Cauchy'ego odnosi się tylko do samego ciągu, zaś zbieżność w $E$ zależy od przestrzeni $E$ [tj. $(E, \varrho)$ – P.B.]. Dla przykładu, jeżeli $E$ jest przestrzenią liczb wymiernych, wówczas ciąg liczb wymiernych zbieżny do pewnej liczby niewymiernej jest ciągiem fundamentalnym, ale nie jest zbieżny w $E$. Jeżeli każdy ciąg fundamentalny w $E$ jest zbieżny w $E$, to $E$ nazywamy przestrzenią zupełną (zupełnym zbiorem punktowym). Tym sposobem, zbiór liczb wymiernych nie jest, a zbiór liczb rzeczywistych jest przestrzenią zupełną. W istocie, zbieżność każdego fundamentalnego ciągu liczb rzeczywistych stanowi treść tzw. ogólnej zasady zbieżności Cauchy'ego, znanej czytelnikowi z elementarnego kursu".[106]

14.3. Ad „elementarny kurs". W *Uwagach wstępnych* Hausdorff definiuje przedziały osi liczb rzeczywistych – $(a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$, itd. – następnie $\liminf x_n$, $\limsup x_n$ ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)$ oraz $\sup\{f(x) : a \leqslant x \leqslant b\}$ funkcji rzeczywistej $f$; nie przywołuje przy tym ani zasady ciągłości Dedekinda, ani zupełności liczb rzeczywistych.[107]

Autorzy przypisów do cytowanego przez nas wydania podają, że w ustaleniach tych Hausdorff najpewniej odwołuje się do książki: G. Kowalewski, *Einfürung in die Infinitesimalrechnung* (1908).[108] W rozdziale *Konstrukcja Dedekinda* pokazaliśmy, że w książce Kowalewskiego, w dowodzie ciągłości liczb rzeczywistych nie odróżnia się liczb wymiernych $q$ i liczb rzeczywistych $(q, q, q, \dots)$, czy $[(q, q, q, \dots)]$, gdzie $q \in \mathbb{Q}$.[109]

14.4. Uzupełnienie przestrzeni metrycznej do przestrzeni zupełnej.

„Tak jak w §11 za wzór przy uzupełnianiu luk w zbiorach uporządkowanych przyjęliśmy Dedekinda teorię liczb niewymiernych, tak teraz, rozszerzając przestrzeń metryczną $E$ do przestrzeni zupełnej $\overline{E}$, której elementy będą ciągami fundamentalnymi, za wzór posłuży nam teoria Cantora-Méraya, w której liczby niewymierne definiowane są jako ciągi fundamentalne liczb wymiernych".[110]

[106] [Hausdorff 1937], s. 120; $x_m x_n$ oznacza w tekście Hausdorffa – co już sygnalizowaliśmy – odległość $\varrho(x_m x_n)$.

[107] Zob. [Hausdorff 1937], s. 9–10.

[108] Zob. [Hausdorff 1937], s. 342.

[109] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 14.2.

[110] [Hausdorff 1937], s. 123.

Niech $(E,\varrho)$ będzie przestrzenią metryczną, $\xi=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$, $\eta=(y_1,y_2,\dots,y_n,\dots)$, gdzie $\xi,\eta\subset E$. Konstrukcja przestrzeni $\overline{E}$ wygląda następująco.

Hausdorff dowodzi:

($\alpha$) Jeżeli $\xi$ oraz $\eta$ są ciągami fundamentalnymi, to istnieje granica ciągu $(\varrho(x_n,y_n))$. Jest tak, bo ciąg liczb rzeczywistych $(\varrho(x_n,y_n))$ jest ciągiem Cauchy'ego.

($\beta$) Jeżeli $\xi$ jest ciągiem fundamentalnym i $\lim_{n\to\infty}\varrho(x_n,y_n)=0$, to ciąg $\eta$ jest fundamentalny.[111]

Następnie przyjmuje

$$\overline{E}=\{\xi\subset E:\xi\ \ \textit{jest ciągiem Cauchy'ego}\},$$

i definiuje funkcję

$$d:\overline{E}\times\overline{E}\ni(\xi,\eta)\mapsto d(\xi,\eta)=_{df}\lim_{n\to\infty}\varrho(x_n,y_n).$$

Z nierówności trójkąta w przestrzeni $(E,\varrho)$

$$\varrho(x_n,y_n)+\varrho(y_n,z_n)\geqslant\varrho(x_n,z_n),$$

– na podstawie odpowiednich twierdzeń teorii granic – wynika nierówność trójkąta dla funkcji $d$

$$d(\xi,\eta)+d(\eta,\zeta)\geqslant d(\xi,\zeta).$$

Funkcja $d$ będzie spełniała warunek ($\beta$) definicji metryki, jeżeli „przyjmujemy, że dwa ciągi fundamentalne są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi\eta=0$"[112].

Dalej czytamy:

„Ciągi stałe

$$(x,x,x,\dots)$$

są oczywiście ciągami fundamentalnymi; odległość między nimi wynosi $xy$ [tj. $d((x,x,x,\dots),(y,y,y,\dots))=\varrho(x,y)$ – P.B.], tak więc $E$ odpowiada izometrycznie pewnemu podzbiorowi $\overline{E}$. Ciągi te mogą być bezpiecznie identyfikowane z samymi punktami $x$, tak że $E$ staje się po prostu podzbiorem $\overline{E}$. Odległość między $x=(x,x,\dots)$ oraz $\xi=(x_1,x_2,\dots)$ wynosi $x\xi=\lim_{n\to\infty}xx_n$. W szczególności, odległość między $\xi$, a jednym z jego punktów $x_m$ wynosi

$$x_m\xi=\lim_n x_mx_n.$$

[111] Zob. [Hausdorff 1937], s. 123.

[112] [Hausdorff 1937], s. 123; przypomnijmy, że $\xi\eta=0$ oznacza $d(\xi,\eta)=0$.

[...] Stąd wynika, że dla każdego $\xi$ można znaleźć takie $x$, że $x\xi$ jest dowolnie małe ($E$ jest gęste w $\overline{E}$)".[113]

W przyjętych przez nas oznaczeniach można to tak zapisać:

$$\forall \xi \in \overline{E} \forall n \in N \exists x \in E[d((x, x, \dots), \xi) < \frac{1}{n}].$$

Zupełność przestrzeni $\overline{E}$. Niech $(\xi_1, \xi_2, \dots) \subset \overline{E}$ będzie ciągiem fundamentalnym („fundamental suite"), tj. $\xi_i$ jest ciągiem elementów należących do $E$.

„Dla każdego $\xi_n$ wyznaczymy pewne $x_n$ takie, że $x_n\xi_n < \frac{1}{n}$. Wówczas na podstawie uwagi $(\beta)$ $x_n$ tworzy ciąg fundamentalny [fundamental suite] w $\overline{E}$, czy też ciąg fundamentalny $\xi = (x_1, x_2, \dots)$ w $E$. Stąd $\xi x_n \to 0$, a ponadto $x_n\xi_n \to 0$, tak że na podstawie nierówności trójkąta $\xi\xi_n \to 0$, co znaczy, że $\xi_n$ jest zbieżne do $\xi$ i przestrzeń $\overline{E}$ jest zupełna".[114]

„Oczywiście dokonaliśmy tu identyfikacji punktu $x$ należącego do $E$ z ciągiem stacjonarnym $(x, x, x, \dots)$, czy też, w wyniku przyjętej definicji równości ciągów fundamentalnych, z ciągami $(x_1, x_2, \dots)$ zbieżnymi do $x$. Jeżeli nie chcemy mylić tych izometrycznych przestrzeni, możemy przyjąć, co następuje: Jeżeli $V$ jest przestrzenią zupełną $\supseteq E$, wówczas wszystkie ciągi fundamentalne elementów z $E$ zmierzają do punktów $x$ należących do $V$, a zbiór $\overline{E}$ wszystkich tych punktów nazywamy uzupełnieniem $E$; wszystkie uzupełnienia $E$ są izometryczne, a przy tym odpowiednia izometria punkty $E$ przeprowadza na nie same".[115]

14.5. Konstrukcja Hausdorffa jest obecnie tak przedstawiana, że funkcja $d$ jest metryką na zbiorze ilorazowym:

$$d : \overline{E}/_{\approx} \times \overline{E}/_{\approx} \ni ([(x_n)], [(y_n)]) \mapsto d([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n),$$

gdzie

$$(x_n) \approx (y_n) \Leftrightarrow_{df} \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = 0, \quad \text{dla } (x_n), (y_n) \subset E.[116]$$

Ujęcie to jest już wolne od dwuznaczności, z których Hausdorff w pełni zdaje sobie sprawę, ale których nie usunął. Tak więc w miejsce:

(1) „dla każdego $\xi_n \in \overline{E}$ wyznaczymy pewne $x_n \in \overline{E}$ takie, że $x_n\xi_n < \frac{1}{n}$",

[113] [Hausdorff 1937], s. 123.
[114] [Hausdorff 1937], s. 123–124.
[115] [Hausdorff 1937], s. 124.
[116] Zob. [Browkin 1978], s. 201–202.

mamy

(1') dla każdego $\xi_n \in \overline{E}/_{\approx}$ wyznaczymy pewne $[(x_n, x_n, x_n, \dots)] \in \overline{E}/_{\approx}$, gdzie $x_n \in E$, takie, że $d([(x_n, x_n, x_n, \dots)], \xi_n) < \frac{1}{n}$;

w miejsce

(2) „$x_n$ tworzy ciąg fundamentalny w $\overline{E}$",

mamy

(2') elementy $[(x_1, x_1, x_1, \dots)], [(x_2, x_2, x_2, \dots)], \dots, [(x_n, x_n, x_n, \dots)], \dots$ tworzą ciąg fundamentalny w $\overline{E}/_{\approx}$;

w miejsce

(3) „ciąg fundamentalny $\xi = (x_1, x_2, \dots)$ w $E$ $[\dots]$ $\xi\xi_n \to 0$, co znaczy, że $\xi_n$ jest zbieżne do $\xi$ i przestrzeń $\overline{E}$ jest zupełna",

mamy

(3') ciąg $(x_1, x_2, \dots) \subset E$ jest fundamentalny, zatem przyjmując $\xi = [(x_1, x_2, \dots)]$, dostajemy $\xi\xi_n \to 0$, co znaczy, że $\xi_n$ jest zbieżne do $\xi$ i przestrzeń $\overline{E}/_{\approx}$ jest zupełna.

14.6. Krzysztof Maurin tak pisze o Cantora konstrukcji liczb rzeczywistych:

„Metoda ta ma jeszcze ten walor, że prowadzi natychmiast (jak zauważył Hausdorff) [...] do ogólnej procedury uzupełniania przestrzeni $\mathcal{P}$, tzn. do zanurzenia zbioru $\mathcal{P}$ w zbiór $\widetilde{\mathcal{P}}$. [...] Jak zobaczymy, $R = \widetilde{Q}$, tzn. przestrzeń $R$ jest uzupełnieniem liczb wymiernych".[117]

Niżej pokażemy różnice między Cantora konstrukcją liczb rzeczywistych a Hausdorffa konstrukcją uzupełnienia przestrzeni metrycznej do przestrzeni zupełnej.

(1) Hausdorff w istotny sposób korzysta z zupełności liczb rzeczywistych. Otóż definicja funkcji $d$

$$d((x_1, x_2, x_3, \dots)(y_1, y_2, y_3, \dots)) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n),$$

jest poprawna, bo ciąg liczb rzeczywistych $(\varrho(x_n, y_n))$ jest ciągiem Cauchy'ego.

(2) Definiując ciąg $(x_n) \subset E$, taki że $x_n\xi_n < \frac{1}{n}$ i pokazując, że $(x_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego, Hausdorff przyjmuje, że $\frac{1}{n} \to 0$. W ciele liczb rzeczywistych fakt, że $\frac{1}{n} \to 0$ jest równoważny temu tego, że $\mathbb{Q}$ jest gęste w $\mathbb{R}$, innymi słowy, dowodząc zupełności $\mathfrak{R}$ należy pokazać, że $\mathbb{Q}$ jest gęste w $\mathbb{R}$.[118]

[117] [Maurin 1991], s. 40.

[118] Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 1.3–1.4.

(3) Jeżeli $R = \widetilde{Q}$, gdzie $\widetilde{Q}$ ma być rozumiane jako uzupełnienie przestrzeni $\mathbb{Q}$ *metodą* Hausdorffa, to odpowiednikiem pary $(E, \varrho)$, będzie para $(\mathbb{Q}, |\ |)$. Wówczas kluczowa definicja konstrukcji Hausdorffa

$$d(\xi, \eta) =_{df} \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n)$$

miałaby postać

$$||(x_n) - (y_n)|| = \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n|,$$

gdzie $(|x_n - y_n|)$ jest ciągiem w przestrzeni $(\mathbb{Q}, |\ |)$. Taka definicja oczywiście byłaby niepoprawna.

Przeprowadzając Cantora konstrukcje liczb rzeczywistych pokazuje się, że zachodzi

$$||[(x_n)]|| = [(|x_n|)],$$

gdzie – jak pamiętamy – wartość bezwzględna $||\ ||$ w $\mathfrak{R}$, oraz wartość bezwzględna $|\ |$ w $\mathfrak{Q}$, definiowane są na podstawie faktu, że $\mathfrak{R}$ oraz $\mathfrak{Q}$ są ciałami uporządkowanymi. W konstrukcji Hausdorffa porządek w ogóle nie jest uwzględniany.

Przejdźmy do porządku w ciałach liczb wymiernych i liczb rzeczywistych. W przypadku ciała $\mathcal{Q}$ łatwo można pokazać, że istnieje dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami w $\mathcal{Q}$ i dlatego może być on uznany za „naturalny". W przypadku $\mathfrak{R}$ rzecz jest bardziej złożona.

Pokazuje się, że w ciele rzeczywiście domkniętym istnieje dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami.[119] Ciało liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ jest ciałem rzeczywiście domkniętym, bo $\mathcal{R}(\sqrt{-1})$ jest ciałem algebraicznie domkniętym. Z kolei, w dowodzie, że $\mathcal{R}(\sqrt{-1})$ jest ciałem algebraicznie domkniętym, korzysta się – jak wiadomo – z faktu, że liczby rzeczywiste są zupełne w sensie Cauchy'ego, czy też ciągłe w sensie Dedekinda.

Przyjmując, że istotą konstrukcji liczb rzeczywistych jest dowód zupełności widzimy radykalną różnicę między Cantora konstrukcją liczb rzeczywistych a Hausdorffa konstrukcją uzupełnienia przestrzeni metrycznej do przestrzeni metrycznej. Hasusdorff korzysta z zupełności liczb rzeczywistych oraz gęstości zbioru $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$, a więc z jednoznaczej charakterystyki porządku liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, <)$: porządek $<$ jest ciągły w sensie Dedekinda i zawiera podzbiór przeliczalny gęsty w $(\mathbb{R}, <)$. Ponadto, porządek $<$ jest związany ze strukturą algebraiczną ciała $\mathcal{R}$.

14.7. Przedstawimy jeszcze jedna próbę dowodu zupełności liczb rzeczywistych z pominięciem rozróżnienia $\mathfrak{Q}$ i $\mathfrak{R}_Q$. W *Geometrii* Karola Siekluckiego znajdujemy taki oto dowód zupełności przestrzeni metrycznej liczb rzeczywistych.

[119] Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 4–7.

„Ponieważ z lematu [...] wynika, że każdy zbiór ograniczony na prostej liczbowej $R$ zawiera się w pewnym przedziale domkniętym, czyli w pewnej podprzestrzeni zwartej, więc z twierdzeń [...] wynika następujące

Twierdzenie (Cauchy). Na prostej liczbowej $R$ każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny".[120]

Zobaczmy teraz, jak dowodzona jest zwartość przedziału domkniętego.

„Twierdzenie (Bolzano, Weierstrass). Dla każdego ciągu liczb $x_n \in I$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, istnieje podciąg zbieżny w $I$".[121]

$I$ oznacza tu przedział domknięty liczb rzeczywistych $[0, 1]$. Definiowane są niemalejący ciąg $(a_n)$ i nierosnący ciąg $(b_n)$ takie, że dla każdego $n$ nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(x_k)$ spełnia nierówności $a_{n+1} \leqslant x_k \leqslant b_{n+1}$. I dalej,

„Przyjmijmy $x_0 = \sup\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Z własności ciągów $(a_n)$ i $(b_n)$, a także z własności kresu górnego wynika [...]. Własność przedziału jednostkowego $I$ sformułowana w powyższym twierdzeniu przysługuje również każdemu przedziałowi domkniętemu jako zbiorowi podobnemu do przedziału jednostkowego".[122]

W definicji punktu $x_0$ korzysta się z zasady *supremum*, czyli z aksjomatu ciągłości Dedekinda. Tak więc, zbiór liczb rzeczywistych jest przestrzenią (metryczną!) zupełną, bo jest ciągły w sensie Dedekinda.[123]

[120] [Sieklucki 1978], s. 125.
[121] [Sieklucki 1978], s. 118.
[122] [Sieklucki 1978], s. 118.
[123] Dla porównania: „W myśl znanego twierdzenia Cauchy'ego z analizy, *przestrzeń liczb rzeczywistych jest zupełna*" [Kuratowski 1973], s. 181. K woli jasności należy dopowiedzieć: zupełność jest twierdzeniem, gdy ciało liczb rzeczywistych jest konstruowane, albo aksjomatem, gdy przyjmuje się aksjomatyczny opis liczb rzeczywistych.

# Przestrzeń Baire'a

**15.** Podamy teraz przykład przestrzeni metrycznej zupełnej i ośrodkowej. Nie jest on wprost związany ani z Cantora konstrukcją liczb rzeczywistych, ani z konstrukcją Hausdorffa, jest natomiast interesujący sam w sobie i w istocie był już przywoływany w związku z niezupełnością $\mathbb{Q}$, a w dalszej części pracy też będziemy się do niego odwoływać.

15.1. W tym punkcie przyjmujemy, że $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych bez zera. Przestrzeń Baire'a to zbiór $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ z metryką

$$\varrho((x_n),(y_n)) = \frac{1}{\min\{n \in \mathbb{N} :\ x_n \neq y_n\}}\ , \quad \text{dla}\ \ (x_n) \neq (y_n).^{124}$$

Jest to przestrzeń metryczna zupełna, tzn. dla każdego ciągu $(\alpha_n) \subset \mathcal{N}$, który spełnia warunek

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists k \forall m [k < m \to \varrho(\alpha_k, \alpha_m) < \varepsilon],$$

istnieje $\beta \in \mathcal{N}$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(\alpha_n, \beta) = 0.$$

Przykład ten jest dla nas szczególnie ciekawy, bo na podstawie twierdzenia o przedstawieniu liczby rzeczywistej w postaci ułamka łańcuchowego zbiór $\mathcal{N}$ można *identyfikować* ze zbiorem liczb niewymiernych z przedziału $(0,1)$.

Przedstawimy podstawowe definicje i twierdzenia stanowiące podstawę tej *identyfikacji*.

[124] Zob. [Hausdorff 1937], s. 117–118, [Kuratowski 1973], s. 159, [Kuratowski Mostowski 1978], s. 143.

15.2. Ułamek łańcuchowy to skończony ciąg liczb rzeczywistych dodatnich $(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n)$. Wartość ułamka $(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n)$ to liczba

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{\vdots}{\cfrac{\vdots}{\cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}};$$

wartość ułamka $(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n)$ oznacza się symbolem $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Nieskończony ułamek łańcuchowy, to nieskończony ciąg liczb rzeczywistych $(a_0; a_1, a_2, \dots)$, gdzie $a_i > 0$, dla $i \geqslant 1$.

Gdy istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n],$$

to mówimy, że ułamek $(a_0; a_1, a_2, \dots)$ jest zbieżny, a liczbę tę, to jest $\lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, nazywa się jego wartością.

Pokazuje się, że każdy nieskończony ułamek łańcuchowy $(a_0; a_1, a_2, \dots)$ taki, że $a_i \in \mathbb{N}$, dla $i \geqslant 1$, jest zbieżny.[125]

15.3. Dla ustalenia związku między zbiorami $\mathcal{N}$ i $IQ \cap (0, 1)$ zasadnicze znaczenie ma twierdzenie[126]:

(i) Każda liczba niewymierna $\alpha$ jest wartością dokładnie jednego ułamka łańcuchowego. Jest to ułamek nieskończony, którego kolejne wyrazy można wyznaczyć z wzorów rekurencyjnych

$$a_0 = E(\alpha), \quad a_1 = E\left(\frac{1}{\alpha - E(\alpha)}\right), \quad a_{k+1} = E\left(\frac{1}{a_k - E(a_k)}\right),$$

gdzie $E(x)$ oznacza część całkowitą liczby $x$.

W dowodzie pokazuje się m.in., że dla każdego $n$ jest $a_k \neq E(a_k)$. Jednocześnie pokazuje się, że dla liczby wymiernej $p$, w algorytmie

$$a_0 = E(p), \quad a_1 = E\left(\frac{1}{p - E(p)}\right), \quad a_{k+1} = E\left(\frac{1}{a_k - E(a_k)}\right),$$

[125] Zob. [Narkiewicz 1977], s. 274.

[126] Zob. [Narkiewicz 1977], s. 277.

istnieje takie $n$, że $a_{n+1} = E(a_{n+1})$. Stąd otrzymuje się drugą część twierdzenia:

(ii) Każda liczba wymierna $p$ jest wartością dwóch ułamków łańcuchowych. Są to ułamki skończone postaci $(a_0; a_1, \dots, a_{n+1})$, $(a_0; a_1, \dots, a_{n+1} - 1, 1)$, gdzie $a_{n+1} \neq 1$.

Przykłady. Liczba $\sqrt{2}$ jest wartością nieskończonego ułamka łańcuchowego $(1; 2, 2, 2, \dots)$, co zapisujemy też jako:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}.$$

Liczba $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ jest wartością nieskończonego ułamka $(1; 1, 1, 1, \dots)$, co zapisujemy też jako:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

Liczba $\frac{5}{7} =$ jest wartością dwóch ułamków skończonych: $(0; 1, 2, 2)$ oraz $(0; 1, 2, 2, 1)$, co w skrócie zapisujemy:

$$\frac{5}{7} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}.$$

Z twierdzenia (i) wynika, że funkcja

$$\mathcal{N} \ni (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto [0; x_1, x_2, x_3, \dots] \in IQ \cap (0, 1),$$

lub inaczej, przyporządkowanie

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cdots}}},$$

jest bijekcją.

# Pierścień ilorazowy

**16.** W tym punkcie przedstawimy algebraiczny opis Cantora konstrukcji liczb rzeczywistych. Otóż fakt, że $(R, \oplus, \odot, 0_R, 1_R)$ jest ciałem algebraicznym można otrzymać nie tylko tak, jak to przedstawiliśmy w punkcie 1.4., przez bezpośrednie sprawdzenie aksjomatów, ale jako wniosek z twierdzenia o pierścieniu ilorazowym:

Pierścień ilorazowy $P/I$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy $I$ jest ideałem maksymalnym pierścienia $P$.[127]

W tym celu postępujemy jak następuje: W zbiorze $\mathbf{C}$, gdzie

$$\mathbf{C} = \{(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : (a_n) \textit{ spełnia warunek Cauchy'ego}\},$$

definiowane są działania

$$(a_n)\widetilde{\oplus}(b_n) = (a_n + b_n), \quad (a_n)\widetilde{\odot}(b_n) = (a_n \cdot b_n),$$

oraz dwa elementy

$$0_C = (0, 0, \ldots), \quad 1_C = (1, 1, \ldots).$$

Pokazuje się, że $\mathrm{P} = (\mathbf{C}, \widetilde{\oplus}, \widetilde{\odot}, 0_C, 1_C)$ jest pierścieniem całkowitym, a następnie, że zbiór $\mathrm{I} = \{(a_n) \in \mathbf{C} : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\}$ jest ideałem maksymalnym pierścienia P, tzn.

(1) $(\mathrm{I}, \widetilde{\oplus}, 0_C)$ jest podgrupą grupy $(\mathbf{C}, \widetilde{\oplus}, 0_C)$,
(2) $\forall \alpha \in \mathbf{C} \forall \beta \in \mathrm{I}\ [\alpha \odot \beta \in \mathrm{I}]$,
(3) $\forall \mathrm{J} \subset \mathbf{C}\ [(\mathrm{I} \subset \mathrm{J},\ I \neq J,\ \mathrm{J} \text{ jest ideałem}) \to \mathrm{J} = \mathbf{C}]$.[128]

[127] Zob. [Browkin 1978], s. 52.

[128] Warunki (1)–(2) definiują ideał pierścienia, warunek (3) – ideał maksymalny. W (3) J oznacza zarazem ideał i zbiór, na którym określone są działania w ideale.

Na podstawie twierdzenia o pierścieniu ilorazowym, P/I jest ciałem. Pokazując, że

$$(a_n) \approx (b_n) \Leftrightarrow (a_n) - (b_n) \in \mathrm{I}$$

dostajemy

$$\mathrm{P/I} = (R, \oplus, \odot, 0_R, 1_R).$$

16.1. Pewnym wariantem konstrukcji Cantora jest następująca konstrukcja. Punktem wyjścia jest teraz nie ciało liczb wymiernych, ale pierścień liczb dwójkowych D, czyli zbiór

$$D = \left\{ \frac{j}{2^n} : \ j \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

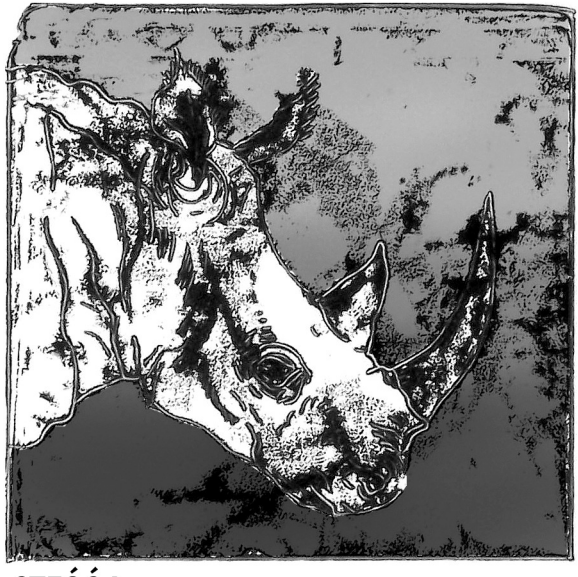
wzięty z (odpowiednio zawężonym) dodawaniem, mnożeniem oraz porządkiem liczb wymiernych; tak więc $\mathrm{D} = (D, +, \cdot, 0, 1, <)$. Dalej postępujemy w znany już sposób:

(1) $\mathbf{C}_D = \left\{ (a_n) \in D^{\mathbb{N}} : \forall n \exists k \forall m \left[ k < m \to |a_k - a_m| < \frac{1}{2^n} \right] \right\}$,
(2) $\mathrm{I} = \{ (a_n) \in \mathbf{C}_D : \forall n \exists k \forall m \left[ k < m \to |a_m| < \frac{1}{2^n} \right] \}$,
(3) $R_D =_{df} \mathbf{C}_D/\mathrm{I}$.

Podobnie jak $\mathbb{Q}$, zbiór liczb dwójkowych jest gęsty w $(\mathbb{R}, <)$, a przy tym liczby dwójkowe mają naturalną interpretację geometryczną: gdy na prostej jest ustalony punkt 0 i punkt jednostkowy 1, to punkty *odpowiadające* liczbom dwójkowym otrzymywane są za pomocą dwóch operacji – dodawania odcinków i wyznaczania środka odcinka. Ten właśnie fakt jest *wykorzystany* w geometrii elementarnej, w dowodzie twierdzenia o wprowadzeniu metryki w przestrzeni absolutnej.[129]

[129] Zob. rozdz. *O ciągłości linii prostej.*

# O PRZEDMIOCIE MATEMATYCZNYM



# CZĘŚĆ I

# O przedmiocie matematycznym

Jednym z zagadnień filozoficznej refleksji nad matematyką poczynając od Platona jest pytanie o status ontologiczny obiektów matematycznych, np. liczb, czy figur geometrycznych. We współczesnej filozofii przyjęło ono postać pytania o przedmiot matematyczny. Ostatnimy laty, po wystąpieniu Paula Benacerrafa z artykułem *What numbers could not be?* kwestia ta zyskała nową dynamikę.[1] Z dyskusji nad tezami Benacerrafa wyłonił się nawet nowy nurt filozofii matematyki, mianowicie amerykański strukturalizm.[2]

Generalnie zagadnienie przedmiotu matematycznego wyznacza szereg pytań natury ontologicznej, jak na przykład takie: Czym jest, lub co to jest przedmiot matematyczny? Czy istnieje, a jeżeli tak, to w jaki sposób? Czy jest konstruowany, czy też odkrywany? Czy jest zależny, czy też niezależny od człowieka?

Z klasycznych szkół filozofii matematyki stosunkowo najwięcej miejsca temu zagadnieniu poświęca szeroko rozumiany realizm. Realiści utrzymują, że przedmioty matematyczne istnieją poza czasem i przestrzenią i nie wchodzą w związki przyczynowe; istnieją obiektywnie, niezależnie od tego czy są, czy też nie są poznawane; istnieją niezależnie od naszych definicji i konstrukcji. Poznanie matematyczne polega – zdaniem realistów – na odkrywaniu tych przedmiotów lub ich własności. Mówiąc najogólniej, przedmioty matematyczne to „byty platońskie" – nie są to więc ani przedmioty fizyczne, ani psychiczne.[3]

Pytanie o przedmiot matematyczny rozpatrzymy w ramach ontologii rozumianej jako nauka o przedmiocie w ogóle. Znane są oczywiście różne ontologie i już w punkcie wyjścia wskazana jest duża ostrożność przy wyborze tej adekwatnej do stawianego zagadnienia. W ontologiach, które dopuszczają jedynie przedmioty fizyczne, psychiczne i ewentualnie idealne, sposób

[1] Zob. [Horsten 2007]. Pracę Benacerrafa omawiamy w rozdz. *Aksjomaty*, pkt. 6.

[2] Strukturalizmem nazywa się także ogólne poglądy na matematykę prezentowane przez grupę Bourbaki, dlatego k woli jasności piszemy o amerykańskim strukturalizmie. Sztandarową postacią tej szkoły jest Stewart Shapiro; zob. rozdz. *Aksjomaty*, pkt. 9.

[3] Zob. [Barker 1969], [Gödel 1964].

istnienia przedmiotów matematycznych jest w zasadzie przesądzony drogą eliminacji: przedmioty matematyczne nie są przedmiotami fizycznymi, bo są np. niezmienne, nie są przedmiotami psychicznymi, bo są np. intersubiektywne, pozostaje zatem trzecia możliwość, broniona zwykle jeszcze bez jasnego rozpoznania idealnego sposobu istnienia. Pytanie o przedmiot matematyczny stawiane w ramach takiej ontologii byłoby jedynie utwierdzaniem się w przekonaniu, które wcześniej, świadomie lub nie i na innym gruncie, zostało już przesądzone.

Pytanie o przedmiot matematyczny rozpatrzymy w ramach ontologii wypracowanej przez Romana Ingardena, a wyłożonej w jego *Sporze o istnienie świata*. W ontologii Ingardena sfera tego, co nie jest fizyczne i nie jest psychiczne jest zróżnicowana, występują tam trzy rodzaje przedmiotów: idee, indywidualne przedmioty idealne oraz przedmioty intencjonalne, dokładniej, przedmioty pochodnie intencjonalne („wtórnie czysto intencjonalne")[4], przedmioty intencjonalne w znaczeniu określonym przez Ingardena w pracy *O dziele literackim*, te, które występują w warstwie przedmiotów przedstawionych. Wszystkie te przedmioty, tj. idee, indywidualne przedmioty idealne oraz przedmioty pochodnie intencjonalne, są intersubiektywne, są poza czasem oraz przestrzenią i nie uczestniczą w związkach przyczynowych. Ponadto, ich charakterystyka jest na tyle rozbudowana, że aby wykazać, iż przedmiot matematyczny jest przedmiotem takiego, a nie innego rodzaju, że jest np. ideą, musimy zdobyć w miarę bogatą i co najważniejsze pozytywną charakterystykę, innymi słowy: w ramach tej ontologii samo stwierdzenie, że przedmiot matematyczny nie jest przedmiotem fizycznym i nie jest przedmiotem psychicznym jest dalece niewystarczające.

Wprowadzając w ontologię Ingardena, powiedzmy już w tym miejscu, że to, co wyżej nazywaliśmy przedmiotem fizycznym u Ingardena jest przedmiotem realnym, to, co nazywaliśmy przedmiotem psychicznym u Ingardena jest przedmiotem pierwotnie intencjonalnym, który jest konstytuowany w aktach świadomości spełnianych przez pewien podmiot i który jest bezpośrednio dany tylko temu podmiotowi. Z kolei – i to jest dla nas najważniejsze – napięcie związane z pytaniami, czy przedmiot matematyczny jest odkrywany, czy też stwarzany, czy jest zależny, czy też niezależny od człowieka, w ramach tej ontologii przenosi się na opozycję idealny – intencjonalny: przedmiot idealny jest niezależny od człowieka, a jego poznanie można nazwać odkrywaniem, o przedmiocie pochodnie intencjonalnym powiemy, że jest stwarzany przez człowieka i w tym sensie jest zależny, ale jednocześnie – powtórzmy – jest to przedmiot intersubiektywny. W ramach ontologii Ingardena można zatem, przynajmniej w punkcie wyjścia, zgadzać się co do

[4]Zob. [Ingarden 1988], s. 180.

tego, że przedmioty matematyczne nie są przedmiotami fizycznymi i nie są przedmiotami psychicznymi, a jednocześnie kwestią otwartą pozostaje to, czy przedmioty matematyczne są „bytami platońskimi" w wyżej naszkicowanym sensie.

W ontologii Ingardena – jak już zauważyliśmy – są dwie odmiany przedmiotu intencjonalnego: pierwotnie i pochodnie intencjonalny. Dalej, mówiąc o przedmiocie intencjonalnym, będziemy mieli na uwadze przedmiot pochodnie intencjonalny – ten intersubiektywny przedmiot intencjonalny. Ale także i to pojęcie musimy jeszcze zawęzić.

Przedmioty intencjonalne po raz pierwszy badał Ingarden w pracy *Das literarische Kunstwerk*. Przedstawioną tam analizę dzieła literackiego – w istocie analizy Ingardena odnoszą się do tradycyjnej XIX-wiecznej powieści – uznano za rozstrzygający argument przeciwko psychologizmowi w estetyce, a *Das literarische Kunstwerk* jest dziś klasyczną pozycją estetyki fenomenologicznej. Z czasem, rozwijając ideę dzieła sztuki jako przedmiotu intencjonalnego, uwzględniając specyfikę innych dziedzin, Ingarden przedstawił analogiczną koncepcję dzieła muzycznego, teatralnego, malarskiego i architektonicznego. W rezultacie przedmiot intencjonalny jest formą przedmiotową, która ma jeszcze różne odmiany.

Samo dzieło literackie jest, według Ingardena, przedmiotem intencjonalnym. Jego specyficzna forma polega na budowie warstwowej – dzieło literackie zbudowane jest z czterech warst: (1) brzmień słów i jednostek fonetycznych wyższego rzędu, (2) jednostek znaczeniowych, (3) aspektów schematycznych, (4) przedmiotów przedstawionych (postaci, rzeczy, wydarzenia).

Przedmiotem intencjonalnym jest też *fragment* dzieła literackiego, mianowicie postać literacka i dalej, mówiąc o przedmiocie intencjonalnym mamy na uwadze nie przedmiot pochodnie intencjonalny w ogóle, bo wiemy już, że jest wiele odmian takich przedmiotów, ale ten specyficzny przedmiot jakim jest postać literacka.

W kolejnych punktach tego rozdziału pokażemy, że przedmiot matematyczny jest przedmiotem intencjonalnym. W tym celu nie będziemy jednak zajmować się przedmiotem matematycznym w ogóle, lecz, aby być najbliżej konkretu, wybranym, acz jednym z ważniejszych przedmiotów matematycznych, mianowicie liczbami rzeczywistymi. Liczby rzeczywiste natomiast, w pierwszym przybliżeniu i dla ustalenia uwagi, traktujemy tak jak są one zwykle traktowane w matematyce, to jest jako ciało uporządkowane w sposób ciągły – $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$. W dalszej części pracy pokażemy, że ciało uporządkowane w sposób ciągły jest tylko jednym, bynajmniej nie jedynym, sposobem ujęcia konstrukcji przedstawionej w *Stetigkeit und irrationale Za-*

*hlen*, liczby rzeczywiste mogą być też definiowane jako szczególne ciało topologiczne.

Nie jest oczywiście przesądzone, że przedłożone analizy w prosty sposób można powtórzyć i zastosować do innych przedmiotów, np. liczb naturalnych, czy figur geometrycznych, tym niemniej taką samą sytuację, jak w przypadku liczb rzeczywistych znajdujemy przy innych strukturach liczbowych: kwaternionach, liczbach $p$-addycznych, niestandardowych liczbach rzeczywistych i liczbach Conway'a. Liczby rzeczywiste, obok tego, że służą nam za wzorzec przedmiotu matematycznego, wprowadzają też w centrum klasycznej matematyki, dzięki czemu możemy podjąć też inne wątki, nie związane wprost z zagadnieniem przedmiotu matematycznego.

Plan tego rozdziału jest następujący: najpierw, aby przybliżyć intuicyjnie przedmiot intencjonalny, przedstawimy klasyczny przykład takiego przedmiotu, następnie podamy jego charakterystykę ontologiczną, aż wreszcie pokażemy, że liczby rzeczywiste mogą być opisane jako przedmiot intencjonalny.

**1.** Za wzór przedmiotu intencjonalnego posłuży nam Lolita, bohaterka powieści Vladimira Nabokova *Lolita*. W związku z tym kilka zdań tytułem wyjaśnienia.

W warstwie literackiej powieść Nabokova jest arcydziełem. W warstwie psychologicznej jest opisem pewnej perwersji, może choroby i zapewne to było źródłem jej skomplikowanych losów wydawniczych: zrazu, z powodu cenzury obyczajowej nie znalazła wydawcy w USA i po raz pierwszy ukazała się w paryskiej oficynie wydającej literaturę pornograficzną. Aspekt obyczajowy *Lolity* nie ma w niniejszej pracy żadnego merytorycznego znaczenia, tym niemniej nie chcemy, aby był on jakimkolwiek obciążeniem, czy źródłem nieporozumień stąd niniejsze usprawiedliwienie: Vladimir Nabokov należy do pisarzy rozwijających klasyczną XIX-wieczną powieść, co w szczególności wiąże się z tym, że z niezwykłą pieczołowitością dba o szczegóły opisów. Z drugiej strony, jednym z istotnych momentów ontologicznej analizy postaci literackiej jest swoista schematyczność przedstawionych postaci (występowanie miejsc niedookreślenia). W każdej postaci literackiej można wskazać takie miejsca niedookreślenia, tym niemniej przykłady, jakimi zwykle ilustruje się ten fenomen są o tyle dyskusyjne, że przyjmują *zewnętrzny* – jeśli można tak powiedzieć – punkt widzenia, tj. perspektywę, która w analizowanej powieści nie jest uwzględniana. Drastycznie przejaskrawiając takie podejście można by powiedzieć, że miejscem niedookreślenia Tadeusza – tytułowej postaci poematu *Pan Tadeusz* – jest jego grupa krwi; innymi słowy, Tadeusz miałby być niedookreślony pod względem, który w poemacie w ogóle nie jest, i nie mógł być uwzględniany, bo grupę krwi odkryto w roku

1901. W opisach Lolity naszą uwagę zwróciło to, że jedno z miejsc niedookreślenia tej postaci zostaje wskazane w samej powieści, lub inaczej, sam tekst nakierowuje uwagę czytelnika na miejsce, które okazuje się być miejscem niedookreślenia w rozumieniu Ingardena i w tym sensie w samej powieści wyznaczony jest aspekt, pod którym postać literacka jest niedookreślona. To właśnie, w zestawieniu z mistrzostwem opisów, jest jedynym powodem wyboru Lolity za wzorzec przedmiotu intencjonalnego.

1.1. Opisy Lolity są liczne i różnorakie, a przy tym w większości pochodzą od wielbiącego jej dziewczęcą urodę mężczyzny – Humberta Humberta. Obok zapisów antropometrycznych: wzrost, waga, obwód uda, łydki, szyi itd., znajdujemy detale medycznej natury, takie jak ten, że wyrostek robaczkowy nie został usunięty, że na boku ma drobne, ciemnobrązowe znamię, a u dołu zgrabnej łydeczki, kilka cali nad brzegiem grubej, białej skarpetki małą bliznę, że na ramieniu ma bliznę w kształcie ósemki po szczepionce przeciwko ospie. W większości jednak opisy są bardziej osobiste, co bynajmniej nie ujmuje im konkretności. Tak więc, oczy Lolity są puste, jasnoszare, rzęsy czarne jak sadza. Twarz pokrywają piegi, z czego pięć rozłożonych jest niesymetrycznie na zadartym nosku; wargi są czerwone jak oblizany czerwony cukierek, a dolna z nich jest uroczo pełniejsza; przednie zęby – duże; głos – przenikliwie wysoki; włosy – ciepło brązowe, z grzywką i falami po bokach, z naturalnymi lokami puszczonymi z tyłu, a do tego, kilka razy zauważony przez Humberta Humberta, jedwabisty połysk nad skronią, przechodzący w żywy brąz włosów. Karnacja i opalenizna są subtelnie cieniowane: ramiona mają kolor miodu, a po płaczu twarz Lolity przyjmuje odcień różu Botticellego. Do tego należy dodać przebogaty portret psychologiczny oddający rozwój i dojrzewanie postaci. Taką była Lolita między dwunastym a czternastym rokiem życia. To, że rosła i zmieniała się jest w powieści precyzyjnie zapisywane. Po trzech latach niewidzenia Lolity Humbert Humbert znajduje ją znacznie odmienioną. Jest wyższa o parę cali, ma nową fryzurę, nowe uszy, a jej głowa jakby się zmniejszyła, policzki zapadły się, piegi zbladły. Tyle o Lolicie.[5]

1.2. W opisach tych rysuje się coś, co ma strukturę realnego przedmiotu; to coś zarazem, w odróżnieniu od przedmiotu realnego *sensu stricto*, nie istnieje autonomicznie, lecz tylko jako wyznaczone przez tekst. Do tego przedmiotu odnoszą się wszystkie wyżej przytoczone określenia. Jednocześnie temu czemuś, temu przedmiotowi można przypisać określenia, których

[5] Zob. [Nabokov 1991]. W powyższym akapicie zebraliśmy wszystkie opisy, jakie można znaleźć w książce. Ich sugestywność i obrazowość jest oczywiście dziełem Nabokova (oraz tłumacza) i w zasadzie cały ten *passus* można by zamknąć w cudzysłów.

nie sposób uznać za charakterystykę Lolity, jak na przykład to, że owo coś w całości zostało wymyślone przez Nabokova, że zostało następnie utrwalone w piśmie, że jest w jakiś sposób odtwarzane przez każdego czytelnika.

Całość, do której odnoszą się te dwie grupy określeń Ingarden nazywa przedmiotem intencjonalnym. Tak więc Lolita z całym zestawem określeń, jakie otrzymała od Nabokova jest tylko częścią przedmiotu intencjonalnego – ta część nazywa się zawartością. Mamy tu zatem trzy zasadnicze elementy: twórcę, tekst oraz przedmiot intencjonalny – ową całość, w której postać Lolity stanowi zawartość.

Niżej przedstawimy charakterystykę przedmiotu intencjonalnego. Jest ona oparta na *Sporze o istnienie świata*. W odróżnieniu od *Das literarische Kunstwerk*, *Spór* jest traktatem ściśle ontologicznym, klasyczną już pozycją XX-wiecznej ontologii, a przedmiot intencjonalny jest tu charakteryzowany obok innych form przedmiotowych. W charakterystyce przedmiotu intencjonalnego będziemy odwoływać się do przedstawionej wyżej modelowej sytuacji.

**2.** Ontologiczna charakterystyka przedmiotu intencjonalnego będzie dwojaka: najpierw scharakteryzujemy sposób istnienia, a następnie budowę formalną. Opis sposobu istnienia polega na zestawieniu różnych aspektów istnienia, które Ingarden nazywa momentami bytowymi. Istnienie przedmiotu intencjonalnego charakteryzują: pochodność, samodzielność, zależność, niesamoistność oraz nieaktualność.

2.1. Pochodność bytowa oznacza, że przedmiot „istnieć może tylko z wytworzenia przez inny przedmiot”.[6] Dla naszego przykładu oznacza to, że źródło istnienia przedmiotu intencjonalnego jest w odpowiednich aktach świadomości Nabokowa, że przedmiot intencjonalny zaczyna istnieć dzięki pisarzowi.

2.2. Samodzielność oznacza, że przedmiot intencjonalny nie musi współistnieć „w obrębie jednej całości z jakimś innym przedmiotem”[7], innymi słowy, że jest odrębnym przedmiotem, a nie aspektem, częścią czy własnością jakiegoś przedmiotu. Dla nas znaczy to, że przedmiot intencjonalny nie jest częścią przeżyć czy to Nabokova, czy też czytelnika, że nie jest częścią, czy własnością książki, rozumianej jako konkretny realny przedmiot.

2.3. Zależność. W zdaniach wstępnych tego rozdziału była mowa o zależności w dość ogólnym rozumieniu, teraz mamy na uwadze czysto tech-

[6] [Ingarden 1987], t. I, s. 92.
[7] Zob. [Ingarden 1987], t. I, s. 116.

niczne znaczenie, jakie temu pojęciu nadał Ingarden w swojej ontologii. Tak więc zależność oznacza, że przedmiot intencjonalny jest samodzielną całością, która „wymaga dla swego istnienia istnienia jakiegoś innego przedmiotu bytowo samodzielnego".[8]

O ile pochodność bytowa oddaje to, że przedmiot powstaje, zaczyna istnieć, o tyle zależność ujmuje to, że dla dalszego istnienia przedmiot intencjonalny wymaga jakiegoś innego przedmiotu, że jego dalsze istnienie musi być *podtrzymywane* przez coś innego. To coś, co *podtrzymuje* istnienie przedmiotu intencjonalnego nazywane jest podstawą bytową.

Co to znaczy? Dzieło literackie powstaje w aktach twórczych pisarza, ale jego dalsze istnienie jest możliwe dzięki temu, że zostało zapisane. Książka rozumiana jako konkretny, materialny przedmiot, jest tym, co pozwala dziełu trwać. Z drugiej strony podstawę bytową tworu literackiego stanowi język – słowa oraz zdania, które same też są tworami intencjonalnymi. Znaczenia słów i sensy zdań są intersubiektywne, intersubiektywna jest również podstawa materialna przedmiotu intencjonalnego – konkretne egzemplarze książki. Wszystko to razem sprawia, że przedmiot intencjonalny, w odróżnieniu od aktów pisarza i aktów czytelnika, jest przedmiotem intersubiektywnym.

2.4. Niesamoistność wiąże się z tym, że przedmiot intencjonalny nie jest sam w sobie immanentnie określony. Za tym technicznym językiem stoi stosunkowo prosta intuicja: Lolita posiada te i tylko te cechy, które są przypisane jej w tekście. Ingarden tak to ujmuje: „immanentne kwalifikacje nie występują [...] w zawartości przedmiotów czysto intencjonalnych. Wszystkie określenia [...], które w ich zawartości występują, są przedmiotowi czysto intencjonalnemu w jakiś sposób jedynie przypisane, 'domniemane'".[9]

2.5. Nieaktualność. Ten moment bytowy nie poddaje się krótkiej charakterystyce, ale z drugiej strony nie będzie on przywoływany w dalszych rozważaniach, dlatego poprzestaniemy tylko na wskazaniu trzech najważniejszych kwestii. Otóż z nieaktualnością wiąże się: (1) brak oddziaływań przyczynowych między przedmiotem intencjonalnym a przedmiotami realnymi, co oznacza, że wytwarzanie przedmiotu intencjonalnego nie ma charakteru przyczynowego, (2) niezmienność przedmiotu intencjonalnego, (3) aczasowość (pozaczasowość) przedmiotu intencjonalnego.[10] Trzeba jednak przyznać, że idzie tu o ściśle określone pojęcia czasu i zmiany, które w ontologii Ingardena zostały wypracowane dla przedmiotu realnego. Faktem

[8] [Ingarden 1987], t. I, s. 121–122.

[9] [Ingarden 1987], t. I, s. 89.

[10] Ingardena rozumienie czasu oraz zmiany przedstawiliśmy odpowiednio w artykułach: [Błaszczyk 1996] oraz [Błaszczyk 1999].

jednak jest, że przedmioty intencjonalne w jakimś sensie zmieniają się, co w pewnym zakresie jest zaznaczone np. w historii języka, czy w historycznej zmienności odczytywania dzieła literackiego. Jaki jest ontologiczny sens tych zmian? Tego wątku nie będziemy rozwijać.

**3.** Aspekty strukturalne, czy jak mówi Ingarden, charakterystykę formalno-ontologiczną przedmiotu intencjonalnego wyznaczają dwa momenty: dwustronność budowy oraz schematyczność (występowanie miejsc niedookreślenia).

3.1. Dwustronność budowy. Przedmiot intencjonalny posiada dwie jakby strony; tworzą je struktura intencjonalna (przedmiot intencjonalny jako taki) oraz zawartość. Z tym wiąże się występowanie dwóch podmiotów: podmiot przedmiotu intencjonalnego jako takiego oraz podmiot przedmiotu, który stanowi zawartość. Właściwym i ważniejszym jest ten pierwszy podmiot; niejako przyjmuje on na siebie historyczność i określenia związane z genezą przedmiotu intencjonalnego.

3.2. Zawartość przedmiotu intencjonalnego, tj. Lolita, ma formę rzeczy (przedmiotu trwającego w czasie). Ona to – w pewnym uproszczeniu polegającym na tym, że podmiot *sensu stricto* jest momentem przedmiotu, a nie całym przedmiotem – stanowi drugi podmiot przedmiotu intencjonalnego. Lolita posiada te i tylko te określenia, które Nabokov jej przypisał i zapisał w tekście książki. Do zawartości przedmiotu intencjonalnego zalicza Ingarden także „charakter bytowy". Jest to wyznaczony wprost lub tylko domniemany sposób istnienia przedmiotu, który występuje w zawartości. Nie jest to istnienie *sensu stricto* i dlatego słowo istnieje Ingarden ujmuje w cudzysłów, albo mówi o „charakterze bytowym":

„Albowiem w swej zawartości przedmiot intencjonalny 'jest' dokładnie taki, jakim jest domniemany, i 'istnieje' w ten sposób, jaki jest mu wyznaczony w akcie go określającym".[11]

Jest bowiem tak: nawet jeżeli w tekście nie jest wprost powiedziane, że Lolita jest realnym przedmiotem, to owa realność jest domniema przez to, że jest ona elementem świata, który z kolei jest domniemany jako realny.

3.3. Schematyczność. Powiedzieliśmy już, że Lolita posiada te i tylko te własności, które są jej przypisane w tekście. Gdy uwzględnimy, że jest ona domniemana jako przedmiot realny, to jako taki przedmiot powinna

[11] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 201; zob. także [Ingarden 1988], §33.

posiadać jeszcze inne własności niż tylko te, które zostały jej przypisane. Owe luki w określeniu Lolity nazywane są miejscami niedookreślenia.

Przykłady. (1) Nic nie jest powiedziane o uszach Lolity, co jest znamienne o tyle, że spotykając ją po latach, Humbert Humbert notuje: „Nowa, spiętrzona fryzura, nowe uszy".[12] Ale uszy człowieka nie rosną tak szybko, aby w ciągu trzech lat stały się wyraźnie większe, czy zmieniły kształt. Zmieniła się twarz Lolity i na jej nowym obliczu uwydatniły się uszy, w zasadzie te same sprzed trzech lat. Ale jakie one właściwie są? Małe? Duże? Odstające? Przylegające? Wąskie? Zaokrąglone? Jaki jest ich płatek i czy w ogóle mają one jakiś płatek? W powieści nic nie jest na ten temat powiedziane. (2) Wiemy, że Lolita ma piegi, lecz nic nie jest powiedziane o ich barwie, możemy jedynie domniemywać, że jest to jakiś odcień brązu.

**4.** Przechodzimy do liczb rzeczywistych. W tym przypadku podstawową triadę twórca–tekst–przedmiot wyznaczony przez tekst stanowią: Richard Dedekind–*Stetigkeit und irrationale Zahlen*–przedmiot intencjonalny wyznaczony przez tę pracę.

Opisując liczby rzeczywiste jako przedmiot intencjonalny nie wyczerpujemy oczywiście wszystkich aspektów rozprawy Dedekinda. W tekście *Stetigkeit und irrationale Zahlen* można wyróżnić co najmniej cztery warstwy. Tak więc mamy warstwę:

(1) odniesień:

(1a) do problemów, są to przede wszystkim arytmetyczne podstawy rachunku różniczkowego,[13]

(1b) do innych tekstów, przede wszystkim *Elementów* Euklidesa;[14]

(2) warstwę oznaczeń symbolicznych;[15]

(3) warstwę dedukcyjną: definicje, twierdzenia, dowody;[16]

(4) warstwę przedmiotową, do której zaliczamy liczby wymierne,[17] linię prostą[18] oraz liczby rzeczywiste.

Pokazując, że liczby rzeczywiste są faktycznie przedmiotem intencjonalnym w wyżej omówionym sensie, przeanalizujemy trzy momenty: dwustronność budowy, pochodność oraz schematyczność.

---

[12] [Nabokov 1991], s. 301.

[13] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 6 oraz 17.

[14] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 8–9.

[15] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 11.

[16] Definicje: przekrój zbioru uporządkowanego, ciągłość porządku, dodawanie i porządek przekrojów, przedział zbioru liniowo uporządkowanego, ciągłość funkcji. Dowody: w zbiorze $(\mathbb{Q}, <)$ istnieje nieskończenie wiele luk, zbiór $(\mathbb{R}, <)$ jest ciągły w sensie Dedekinda, dowody z §7.

[17] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 7.

[18] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 8.

Przeprowadzana analogia między postacią literacką a przedmiotem matematycznym ogranicza się zatem do sposobu istnienia i budowy formalnej.

Porównując tekst literacki i matematyczny jako twory warstwowe można pokazać, że warstawa odniesień historycznych i problemowych odróżnia tekst matematyczy od tekstu literackiego.

4.1. Dwustronność budowy. Zawartość przedmiotu intencjonalnego stanowią liczby rzeczywiste utworzone metodą, którą dzisiaj nazywamy metodą przekrojów Dedekinda. Opisując to współczesnym językiem powiemy, że zbiór $\mathbb{R}$ to, na mocy definicji, zbiór wszystkich takich przekrojów uporządkowanego zbioru liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, <)$, tj.

$$\mathbb{R} = \{(A, B) : A, B \neq \emptyset, A \cup B = \mathbb{Q}, \forall x \in A \forall y \in B[x < y]\}.^{19}$$

W zbiorze tym definiowana jest równość,[20] definiowany jest porządek, o którym Dedekind pokazuje, że jest ciągły w myśl definicji podanej w pracy, tj. – w przyjętej przez nas terminologii – ciągły w sensie Dedekinda,[21] definiowane są dodawanie i mnożenie.[22] I co ważne, w strukturze tej można – jak pisze Dedekind – „czysto arytmetycznie" odtworzyć podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego; w rozprawie dowodzone są dwa takie twierdzenia:[23]

(1) „Jeżeli wielkość $x$ rośnie stale, ale nie ponad wszelką granicę, to wielkość ta zbliża się do pewnej granicy";

(2) „Jeżeli przy procesie zmieniania się wielkości $x$, do każdej liczby dodatniej $\delta$ można dobrać odpowiednie miejsce, od którego począwszy $x$ zmienia się mniej niż o $\delta$, to wówczas $x$ zbliża się do pewnej wartości granicznej".

Ale obok określeń, które odnoszą się do liczb rzeczywistych jest też cała grupa określeń odnoszących się do całości wyznaczonej przez tekst rozprawy, których do liczb rzeczywistych nie sposób odnosić. Nie jest przecież cechą porządku ciągłego to, że został on wymyślony przez Dedekinda 24 listopada 1858 roku – tę datę podaje Dedekind w *Przedmowie*:

„twierdzenie to [wyżej zacytowane tw. (1) – P.B.] może być w pewnym sensie traktowane jako wystarczający fundament analizy infinitezymalnej. Chodzi

[19] Zob. [Dedekind 1872], §4.

[20] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 11.4.

[21] Zob. [Dedekind 1872], §5; zob. też rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 11.5, 13, 14.

[22] Zob. [Dedekind 1872], §6; zob. też rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 16.

[23] Zob. [Dedekind 1872], §7; zob. też rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 17.

jeszcze tylko o to, aby odkryć jego właściwe źródło w elementach arytmetyki, a zarazem uzyskać jakąś rzeczywistą definicję istoty ciągłości. Udało mi się to 24 listopada 1858 r. i w kilka dni potem poinformowałem o wyniku moich rozważań mego drogiego przyjaciela Durège'a".[24]

Nie jest cechą tego porządku, że był modelowany przez Dedekinda na wzór linii prostej – Dedekind przyznaje to w rozprawie:

„Przeprowadzone wyżej porównanie dziedziny $R$ liczb wymiernych i linii prostej doprowadziło do stwierdzenia istnienia luk, niezupełności, czy nieciągłości tej pierwszej, podczas gdy prostej przypisujemy zupełność, brak luk, czyli ciągłość. Na czym jednak polega ta ciągłość? [...] W poprzednich paragrafach zwrócono uwagę na to, że każdy punkt $p$ prostej dzieli ją na dwie części, że każdy punkt jednej z tych części leży na lewo od każdego punktu drugiej części. Istotę ciągłości widzę teraz w odwróceniu".[25]

Określenia te odnoszą się do przedmiotu intencjonalnego jako takiego nie zaś do jego zawartości.

We wstępie powiedzieliśmy, że przedmiot matematyczny jest przedmiotem intencjonalnym, teraz, gdy znamy już budowę przedmiotu intencjonalnego, możemy precyzyjnie wyrazić zasadniczą tezę: przedmiot matematyczny stanowi zawartość przedmiotu intencjonalnego; liczby rzeczywiste, podobnie jak Lolita, nie są całym przedmiotem intencjonalnym, lecz stanowią zawartość przedmiotu intencjonalnego.

Matematyka traktuje o zawartości przedmiotu intencjonalnego, historia matematyki – o całym przedmiocie intencjonalnym.

4.2. O pochodności. Pochodność – przypomnijmy – związana jest z tym, że przedmiot intencjonalny zaczyna istnieć; odnosi się to do całego przedmiotu, a więc i do jego zawartości. W konsekwencji trzeba przyjąć, że tak jak przed rokiem 1872 nie było rozprawy Dedekinda, tak też i przed tym rokiem nie było tego, co dzisiaj w matematyce uważamy za liczby rzeczywiste, nie było przedmiotu, do którego odwołujemy się – wprost lub pośrednio, np. poprzez charakterystykę aksjomatyczną – mając na uwadze liczby rzeczywiste.

Kwestia ta ma dwa aspekty: matematyczny i historyczny. Aspekt matematyczny związany jest z zasadniczym celem rozprawy Dedekinda, chodzi mianowicie o ustalenie arytmetycznych podstaw rachunku różniczkowego. W związku z tym możemy powiedzieć: Nie ma twierdzenia *świadczącego* o tym, że klasyczna analiza musi być rozwijana w ciele uporządkowanym

[24] [Dedekind 1872], s. 136–137.
[25] [Dedekind 1872], s. 141.

w sposób ciągły i na podstawie pojęcia granicy. Dedekind nie *odkrywa* koniecznej, czyli jedynej, „arytmetycznej" podstawy analizy matematycznej, ale konstruuje system, który stanowi jedno z możliwych rozwiązań problemu „arytmetycznych podstaw analizy matematycznej", tj. zastanego przez Dedekinda, gmachu analizy matematycznej.

W latach 60. XX wieku Abraham Robinson pokazał, że możliwe jest też inne rozwiązanie problemu arytmetycznych podstaw rachunku różniczkowego: analizę można oprzeć nie na pojęciu granicy, lecz na pojęciu nieskończenie małej, a odpowiednim systemem liczbowym jest ciało niestandardowych liczb rzeczywistych, które nie jest ciągłe w sensie Dedekinda. To w jakim sensie klasyczną analizę można oprzeć na pojęciu nieskończenie małej przedstawimy w rozdziale *Niestandardowe liczby rzeczywiste*.

Aspekt historyczny wiąże się z komentarzami wypowiadanymi przy okazji konstrukcji liczb rzeczywistych metodą przekrojów Dedekinda, chodzi mianowicie o tezę, że w pewnym sensie liczby rzeczywiste jako pierwszy skonstruował nie Dedekind, ale grecki matematyk Eudoxos. Doskonałą ilustracją tej myśli są słowa Bourbakiego zawarte w *Nocie historycznej* poświęconej liczbom rzeczywistym:

„to Grekom zawdzięczamy pierwszą, ścisłą i spójną teorię stosunków wielkości, czyli w istocie liczb rzeczywistych".[26]

Ten wątek omówimy w rozdziale *Eudoxos versus Dedekind*

4.3. Schematyczność. Występujący w zawartości przedmiotu intencjonalnego przedmiot matematyczny nie ma domniemanego sposobu istnienia. To sprawia, że musimy odpowiedzieć na pytanie: jak rozumieć własność przedmiotu matematycznego? Nie znajdując podstaw dla jakiś arbitralnych ograniczeń, przyjmujemy jak najbardziej liberalne stanowisko: o przedmiocie matematycznym można orzekać wszystko to, co jest orzekane w teoriach matematycznych.

Kilka przykładowych własności liczb rzeczywistych: liczb algebraicznych jest przeliczalnie wiele, ciało liczb rzeczywistych nie jest algebraicznie domknięte, ciało liczb rzeczywistych jest ciałem rzeczywiście domkniętym, przedziały są jedynymi podzbiorami spójnymi $\mathbb{R}$ (w topologii zadanej przez porządek), istnieją funkcje rzeczywiste nieciągłe, czy ogólniej, samo pojęcie granicy odsłania szereg własności odróżniających liczby rzeczywiste od ciał, w których można rozwijać rachunek różniczkowy, np. istnieją funkcje rzeczywiste różniczkowalne nie posiadające drugiej pochodnej, funkcje zespolone natomiast jeżeli mają pierwszą pochodną (w pewnym obszarze), to mają

[26] [Bourbaki 1966(b)], s. 406.

(w tym obszarze) wszystkie następne pochodne. Mówiąc ogólnie, każda własność jest własnością w ramach pewnej teorii i nie ma własności poza teorią, sam przedmiot natomiast – liczby rzeczywiste – jest ponad poszczególnymi teoriami. Mówiąc metaforycznie, liczby rzeczywiste umieszczane są w różnych teoriach matematycznych niczym substancja w probówkach z różnymi odczynnikami, a w rezultacie poznajemy ich różne własności.

Do tego, co zostało wyżej powiedziane dodajmy jeszcze jeden warunek: do teorii matematycznej zaliczamy przyjmowane środki badawcze, a więc np. to, że przyjmuje się logikę pierwszego lub drugiego rzędu. Wśród teorii mamy zatem także teorie sformalizowane, które stwarzają wyjątkowo *sterylne* warunki. Podamy dwa przykłady własności związanych z teoriami sformalizowanymi.

(1) W ZF (teoria mnogości Zermelo-Fraenkla) + AC (aksjomat wyboru) istnieją podzbiory zbioru $\mathbb{R}$ niemierzalne w sensie miary Lebesgue'a; (1') w teorii ZF+AD (aksjomat determinacji) każdy podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ jest mierzalny w sensie miary Lebesgue'a.[27]

(2) W ZF+AC ciągłość funkcji w sensie Cauchy'ego (cc) jest równoważna ciągłości w sensie Heinego (hc); (2') w ZF (z językiem pierwszego rzędu) warunki te nie są równoważne: implikacji $(hc) \to (cc)$ nie da się udowodnić.[28]

Przyjmując powyższe rozumienie własności i pamiętając, że własność odsłania się zawsze w ramach pewnej teorii, można wskazać miejsca niedookreślenia ciała liczb rzeczywistych: otóż miejsca niedookreślenia wiążemy ze zdaniami niezależnymi. Przykłady.

(1) Przyjmując, że rozważamy zbiór liczb rzeczywistych w teorii mnogości ZF+AC (z logiką pierwszego rzędu) możemy spytać, gdzie plasuje się moc tego zbioru w hierarchii alefów (liczb kardynalnych dobrze uporządkowanych), lub inaczej: jak duże jest continuum. I tu natrafiamy na miejsce niedookreślenia. Z niezależności hipotezy continuum wynika, że w ramach tej teorii nie ma pozytywnej odpowiedzi na to pytanie, tj. nie można pokazać, któremu alefowi jest równa liczba kardynalna $2^{\aleph_0}$.

(2) Przyjmując, że rozważamy zbiór uporządkowany $(\mathbb{R}, <)$ można spytać, czy zbiór ten ma następującą własność: $(\mathbb{R}, <)$ jest izomorficzny z każdym liniowo uporządkowanym zbiorem $(X, <_X)$ takim, że porządek $<_X$ jest ciągły w sensie Dedekinda, w $X$ nie ma elementu pierwszego ani ostatniego i każda rodzina przedziałów parami rozłącznych jest co najwyżej przeliczalna. Pozytywna odpowiedź na to pytanie nazywa się hipotezą Suslina. Hipoteza Suslina jest zdaniem niezależnym teorii mnogości ZF+AC (z logiką pierwszego rzędu), a stąd wynika, że w ramach tej teorii nie można wykazać,

[27] Zob. [Mycielski, Świerczkowski 1964].

[28] Zob. [Jeagerman 1962], [Mostowski 1969], rozdz. XIV, §4.

że liczby rzeczywiste mają tę własność i nie można też wykazać, że nie mają tej własności.[29]

4.4. Wiążąc miejsce niedookreślenia z domniemanym sposobem istnienia wykraczamy już poza ustalenia samego Ingardena, dlatego przedstawione wyżej tezy dotyczące schematyczności są jedynie pierwszym przybliżeniem. Ontologiczne kwestie związane ze schematycznością przedmiotu intencjonalnego omówimy w rozdziale *O przedmiocie matematycznym. Część II*.

**5.** Powiedzieliśmy wyżej, że dzisiejsze prace traktujące o liczbach rzeczywistych, czy wykorzystujące liczby rzeczywiste odwołują się do konstrukcji Dedekinda, a przecież wiadomo, że nie jest to jedyna konstrukcja liczb rzeczywistych funkcjonująca w matematyce. Nawet za bardziej popularną uznawana jest konstrukcja zarysowana przez Georga Cantora w pracach *Über die Ausdehnung eines Satz aus der Theorie der trigonometrische Reihen* oraz *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*.

Konstrukcją Cantora nazywana jest obecnie konstrukcja, w której zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ to *ex definitione* zbiór ilorazowy $\mathbf{C}/_{\approx}$, gdzie $\mathbf{C}$ oznacza zbiór ciągów liczb wymiernych spełniających warunek Cauchy'ego, natomiast $\approx$ to relacja: $(a_n) \approx (b_n) \leftrightarrow_{df} \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. W zbiorze tym zdefiniowane są dodawanie, mnożenie oraz porządek tak, że powstaje ciało uporządkowane. Ciało to jest zupełne w tym sensie, że każdy ciąg liczb rzeczywistych spełniających warunek Cauchy'ego jest zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej.

Naturalne jest zatem pytanie: jaki związek zachodzi między konstrukcjami Cantora i Dedekinda? Odpowiedź jest następująca: z punktu widzenia ontologii Ingardena *Stetigkeit und irrationale Zahlen* oraz prace Cantora wyznaczają dwa różne przedmioty intencjonalne. Ale różne przedmioty intencjonalne mają różne zawartości (ontologiczna zasada tożsamości przedmiotu intencjonalnego). Czym zatem różnią się te konstrukcje? Wskażemy trzy różnice.

(1) Ciała skonstruowane przez Cantora i Dedekinda są oczywiście izomorficzne, ale izomorfizm pomija naturę elementów ciał, pomija to z czego i jak zostały one skonstruowane, to zaś należy do zawartości odpowiednich przedmiotów intencjonalnych. W konstrukcji Dedekinda liczba rzeczywista jest parą podzbiorów zbioru liczb wymiernych, w konstrukcji Cantora – zbiorem ciągów Cauchy'ego (klasą abstrakcji wyznaczoną przez pewien ciąg).

(2) W konstrukcji Dedekinda decydującą własnością jest ciągłość w sensie Dedekinda (DC), w konstrukcji Cantora – zupełność w sensie Cauchy'ego (CC). Są to różne własności – różne w dwojakim sensie. Po pierwsze, (DC)

[29] Zob. rozdz. *O przedmiocie matematycznym. Część II*, pkt. 12–13.

można orzekać tylko o zbiorze, w którym jest określona struktura porządkowa, (CC) można orzekać albo o przestrzeni metrycznej, albo o ciele uporządkowanym. Tak więc (DC) może być własnością przedmiotu, o którym (CC) w ogóle nie jest orzekana,[30] albo (CC) może być własnością przedmiotu, o którym (DC) w ogóle nie jest orzekana.[31] Po drugie, w przypadku ciała uporządkowanego jest tak, że $(DC) \rightarrow (CC)$, ale nie na odwrót: ciało uporządkowane niestandardowych liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}^*$ jest zupełne w sensie Cauchy'ego i nie jest ciągłe w sensie Dedekinda.[32]

(3) Konstrukcje te różnią się metodą. Metoda przekrojów Dedekinda przedstawiana jest obecnie jako metoda uzupełnienie porządku liniowego do porządku ciągłego w sensie Dedekinda. Metoda Cantora przedstawiana jest jako metoda uzupełniania przestrzeni metrycznej do przestrzeni metrycznej zupełnej.

Metody te *ujawniają się* też w dowodzie twierdzenia o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych. Otóż dowód ten jest zwykle tak prowadzony: Dane są dwa ciała uporządkowane $F_1$ i $F_2$ spełniające ustalone aksjomaty, zawierają one izomorficzne ciała ułamków, odpowiednio $Q_{F_1}$ i $Q_{F_2}$. Naturalny izomorfizm między $Q_{F_1}$ i $Q_{F_2}$ jest rozszerzany do izomorfizmu między $F_1$ i $F_2$, a rozszerzanie to jest wzorowane na uzupełnianiu ciała liczb wymiernych albo metodą Cantora za pomocą ciągów Cauchy'ego,[33] albo metodą przekrojów Dedekinda.[34]

5.1. Przeciwstawiając konstrukcję Cantora konstrukcji Dedekinda w istocie przeciwstawiamy, z jednej strony, ontologiczną zasadę tożsamości przedmiotu intencjonalnego, z drugiej – *utożsamienie* tych konstrukcji, przeprowadzone na podstawie twierdzenia o kategoryczności. Nasze badania mają charakter ontologiczny, dlatego pierwszeństwo oraz większą wagę przyznajemy ontologicznej zasadzie tożsamości. Ale jest też po temu i drugi, nawet ważniejszy powód. W rozdziale *Aksjomaty* pokażemy, że gdy ujmujemy konstrukcję Dedekinda jako ciało uporządkowane, to przyjmujemy tylko jeden z możliwych sposobów opisu zawartości przedmiotu intencjonalnego wyznaczonego przez rozprawę *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Otóż zawartość ta może być też przedstawiona jako ciało unormowane, a wówczas zachodzi twierdzenie – twierdzenie Ostrowskiego – analogiczne do twierdzenia o kate-

[30] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 5.

[31] Zob. rozdz. *Konstrukcja Cantora*, pkt. 15.

[32] Zob. rozdz. *Niestandardowe liczby rzeczywiste*, pkt. 8. Inny przykład ciała, które ma własność $(CC)$ i nie ma własności $(DC)$ podany jest w rozdziale *Archimedes, Archimedes*, pkt. 8.

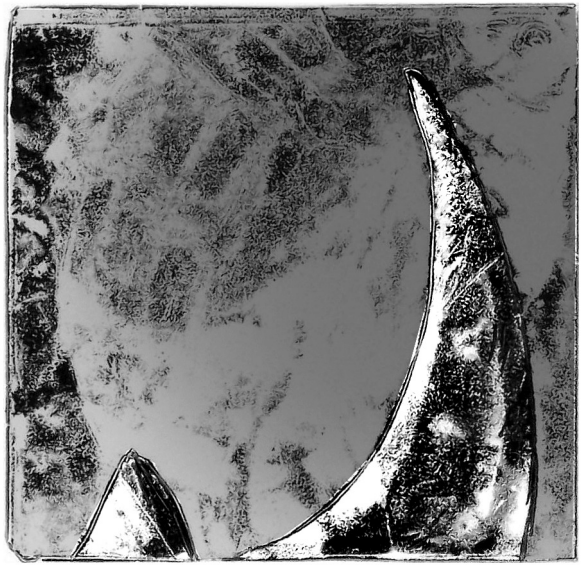
[33] Zob. [Cohen, Ehrlich 1963], rozdz. 5.

[34] Zob. [Birkhoff, Mac Lane 1957], rozdz. IV; zob. też rozdz. *Aksjomaty*, pkt. 2.

goryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych;[35] zawartość ta może być również przedstawiona jako ciało topologiczne, a wówczas zachodzi twierdzenie – twierdzenie Pontriagina – analogiczne do twierdzenia o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych.[36] Tak więc w opisie liczb rzeczywistych pierwszeństwo przyznajemy zasadzie ontologicznej, bo w ramach ontologii możemy postawić pytanie: czym jest owo *coś*, co raz jest ujmowane jako ciało uporządkowane, raz jako ciało unormowane, a raz jako ciało topologiczne.

[35]Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 15.
[36]Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 18–19.

# NIESTANDARDOWE LICZBY RZECZYWISTE



# Niestandardowe liczby rzeczywiste

**1.** Niech $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem uporządkowanym w sposób ciągły. Niech $F$ będzie ultrafiltrem na zbiorze $\mathbb{N}$ zawierającym filtr Frecheta, tj. zbiór:

$$\{A \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ jest zbiorem skończonym}\}.^{1}$$

W zbiorze $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiujemy relację

$$(a_n) \equiv (b_n) \leftrightarrow_{df} \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in F.$$

Pokazuje się, że $\equiv$ jest relacją równoważności.

Niech $\mathbb{R}^*$ oznacza zbiór ilorazowy $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\equiv}$, $\mathbb{N}^* =_{df} \{[(n_j)] : (n_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$, $\mathbb{Q}^* =_{df} \{[(q_j)] : (q_j) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\}$.

W zbiorze $\mathbb{R}^*$ definiujemy działania oraz porządek:

$$[(a_n)] +_F [(b_n)] =_{df} [(a_n + b_n)], \qquad [(a_n)] \cdot_F [(b_n)] =_{df} [(a_n \cdot b_n)],$$

$$[(a_n)] <_F [(b_n)] \leftrightarrow_{df} \{n \in \mathbb{N} : a_n < b_n\} \in F.$$

Niech $r \in \mathbb{R}$. Przyjmujemy, że $r^*$ oznacza klasę równoważności ciągu stałego $(r, r, r, \dots)$, tj. $r^* = [(r, r, r, \dots)]$. Pokazuje się, że

$$\mathfrak{R}^* = (\mathbb{R}^*, +_F, \cdot_F, 0^*, 1^*, <_F)$$

jest ciałem uporządkowanym; ciało to nazywamy ciałem niestandardowych liczb rzeczywistych.[2]

[1] Rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ jest filtrem gdy: (1) $A, B \in \mathcal{F} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$, (2) $A \in \mathcal{F} \wedge A \subset B \rightarrow B \in \mathcal{F}$, (3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Gdy $\mathcal{F}$ jest filtrem i (4) $\forall A \subset \mathbb{N}[A \in \mathcal{F} \vee \mathbb{N} \backslash A \in \mathcal{F}]$, to $\mathcal{F}$ jest ultrafiltrem. Korzystając z aksjomatu wyboru dowodzi się, że każdy filtr jest zawarty w pewnym ultrafiltrze. Zob. [Capiński, Cutland 1995], s. 13, [Robinson 1966], s. 15–17. Konstrukcja ciała $\mathfrak{R}^*$ zależy oczywiście od wyboru ultrafiltru, pokazuje się jednak, że przy założeniu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ciało $\mathfrak{R}^*$ nie zależy od wyboru ultrafiltru w tym sensie, że wybierając inny ultrafiltr (niegłówny) otrzymujemy ciało izomorficzne z $\mathfrak{R}^*$; zob. [Prestel 1995], s. 326.

[2] Zob. [Capiński, Cutland 1995], rozdz. 2, [Goldblatt 1998], rozdz. I.

1.1. Z faktu, że w ciele $\mathfrak{R}$ spełniony jest aksjomat Archimedesa w wersji

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+ \exists n \in \mathbb{N}[na > b], \quad \text{gdzie } na =_{df} \underbrace{a + \cdots + a}_{n-razy},$$

wynika, że w ciele $\mathfrak{R}^*$ spełniony jest aksjomat Archimedesa w wersji:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \exists n \in \mathbb{N}^*[n \cdot_F a \geqslant_F b].$$

Są dwie różnice między tymi wersjami aksjomatu Archimedesa: (1) w pierwszej formule $n \in \mathbb{N}$, w drugiej – $n \in \mathbb{N}^*$, (2) symbol $na$ jest definiowany na podstawie twierdzenia o definicjach indukcyjnych,[3] symbol $n \cdot_F a$ oznacza mnożenie w ciele $\mathfrak{R}^*$.

**2.** Wartość bezwzględną w $\mathfrak{R}^*$ definiujemy tak, jak w dowolnym ciele uporządkowanym:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dla } a \geqslant_F 0^* \\ -a, & \text{dla } a <_F 0^*. \end{cases}$$

Zbiór

$$O = \{x \in \mathbb{R}^* : \exists \theta \in \mathbb{R}_+[|x| <_F \theta^*]\}$$

nazywamy zbiorem liczb ograniczonych. Można pokazać, że $\mathcal{O} = (O, +_F, \cdot_F)$ jest pierścieniem.

Zbiór

$$\Omega = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^* : \forall \theta \in \mathbb{R}_+[|\varepsilon| <_F \theta^*]\}$$

nazywamy zbiorem nieskończenie małych. Biorąc pod uwagę definicję porządku $<_F$, przyjmując, że $(a_n) \subset \mathbb{R}$, otrzymujemy:

$$\Omega = \{[(a_n)] \in \mathbb{R}^* : \forall \theta \in \mathbb{R}_+[\{n \in \mathbb{N} : |a_n| < \theta\} \in F]\}.$$

Przykład nieskończenie małej: $\varepsilon = [(\frac{1}{n})] = [(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)]$, czy ogólniej: gdy $(a_n) \subset \mathbb{R}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $[(a_n)] \in \Omega$. Istotnie, dla dowolnego $\theta \in \mathbb{R}_+$ istnieje takie $n_0$, że dla $n > n_0$ jest $|a_n| < \theta$. Stąd wynika, że

$$\{n \in \mathbb{N} : |a_n| < \theta\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\} \in F,$$

i ostatecznie $\{n \in \mathbb{N} : |a_n| < \theta\} \in F$.

2.1. Można pokazać, że struktura $(\Omega, +_F, \cdot_F)$ jest pierścieniem, zaś $\mathcal{I} = (\Omega, +_F)$ ideałem maksymalnym pierścienia $\mathcal{O}$. Stąd wynika, że w zbiorze $\Omega$ nie ma liczby największej, ani najmniejszej oraz to, że w zbiorze dodatnich

[3] Zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], rozdz. III, §2.

liczb ograniczonych $O_+$ nie ma liczby najmniejszej. W rezultacie przekrój $(A, B)$ zbioru $(\mathbb{R}^*, <_F)$, gdzie $A = \mathbb{R}^*_- \cup \Omega$, $B = \mathbb{R}^* \backslash A$, wyznacza lukę, zatem ciało $\mathfrak{R}^*$ nie jest uporządkowane w sposób ciągły.[4]

Można pokazać, że pierścień ilorazowy $\mathcal{O}/_{\mathcal{I}}$ jest izomorficzny z ciałem liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.[5]

2.2. Można pokazać, że zbiór wszystkich przekrojów zbioru $(\mathbb{R}^*, <_F)$ wzięty z takim porządkiem, jak w oryginalnej konstrukcji Dedekinda, jest ciągły w sensie Dedekinda.[6] Jednocześnie tak jak $(\mathbb{R}^*, <_F)$ nie jest przestrzenią ośrodkową tak i powstały zbiór nie jest przestrzenią ośrodkową, a więc i nie jest izomorficzny z $(\mathbb{R}, <)$.

Jakkolwiek naśladując konstrukcję Dedekinda łatwo otrzymać zbiór uporządkowany w sposób ciągły, to powtórzenie definicji działań na przekrojach nie prowadzi do struktury ciała. Dlaczego?

Weźmy wyżej zdefiniowany przekrój $(A, B)$. Liczby nieskończenie małe są zamknięte na dodawanie i mnożenie, dlatego zgodnie z definicją dodawania oraz mnożenia przekrojów będzie:[7]

$$(A, B) + (A, B) = (A, B),$$

$$(A, B) \circ (A, B) = (A, B).$$

Tak więc zbiór przekrojów z wyżej zdefiniowanym działaniami nie tworzy ani grupy addytywnej, ani multiplikatywnej.

Przykład ten pokazuje, że konstrukcji Dedekinda nie da się sprowadzić do „wstawiania w luki brakujących elementów".[8] W *Stetigkeit und irrationale Zahlen* znajduje się sposób na rozszerzenie ciała liczb wymiernych, a nie samego zbioru liczb wymiernych.

**3.** W zbiorze $\mathbb{R}^*$ definiujemy relację

$$r \approx s \leftrightarrow_{df} r - s \in \Omega.$$

Łatwo zobaczyć, że $\approx$ jest relacją równoważności. Pokażemy, że zachodzi:

Twierdzenie 1. Ciało $\mathfrak{R}$ jest ciągłe w sensie Dedekinda wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall a \in O \exists! r \in \mathbb{R}[a \approx r^*].$$

[4] Lub inaczej: w dowolnym ciele uporządkowanym w sposób ciągły spełniony jest aksjomat Archimedesa. Ciało $\mathfrak{R}^*$ nie jest archimedesowe, *ergo* nie jest ciałem uporządkowanym w sposób ciągły; zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 2.

[5] Zob. [Goldblatt 1998], s. 54, [Robinson 1966], s. 56–57; zob. też niżej Twierdzenie 1.

[6] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 18 (1).

[7] Zob. [Dedekind 1872], §6; zob. też wyżej rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 16.

[8] Zob. np. [Batóg 2000], s. 30–31, [Bell 2005], s. 149–151, [Boyer 1949], s. 408–413.

Istotnie. Przyjmijmy, że ciało $\mathfrak{R}$ jest ciągłe.[9] Niech $a \in O$. Przyjmijmy

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^* <_F a\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x^* \geqslant_F a\}.$$

Para $(A, B)$ stanowi przekrój zbioru $(\mathbb{R}, <)$ i wyznacza pewną liczbę rzeczywistą $r$. Można pokazać, że $r^* \approx a$. Wprost z definicji relacji $\approx$ wynika, że dokładnie jedna liczba rzeczywista $r$ spełnia warunek $a \approx r^*$.

Niech teraz para $(A, B)$ będzie przekrojem zbioru $(\mathbb{R}, <)$. Z aksjomatu Archimedesa wynika, że zbiór ułamków $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $(\mathbb{R}, <)$, stąd zaś dostajemy:[10]

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists a \in A \exists b \in B[b - a < n^{-1}].$$

Na podstawie tej własności pokazujemy, że istnieje taki ciąg liczb rzeczywistych $(r_n)$, że $r_{2k} \in A$, $r_{2k+1} \in B$, $r_{2k+1} - r_{2k} < \frac{1}{k}$ oraz podciąg $(r_{2k})$ jest niemalejący, a podciąg $(r_{2k+1})$ jest nierosnący. Wtedy niestandardowa liczba rzeczywista $a = [(r_n)]$ jest ograniczona oraz

$$\forall x \in A \forall y \in B[x^* \leqslant_F a \leqslant_F y^*].$$

Niech $r \in \mathbb{R}$ będzie tą jedyną liczbą, dla której zachodzi $r^* \approx a$. Wówczas $r$ jest albo największą liczbą w klasie $A$, albo najmniejszą liczbą w klasie $B$.

Liczbę rzeczywistą $r$ wyznaczoną w Twierdzeniu 1. nazywamy częścią standardową liczby $a$ i oznaczamy jako $st(a)$.[11]

**4.** Można pokazać, że $(\{r^* : r \in \mathbb{R}\}, +_F, \cdot_F, 0^*, 1^*, <_F)$, gdzie porządek $<_F$ jest odpowiednio zawężony, jest ciałem izomorficznym z ciałem liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}$. Na tej podstawie przyjmujemy, że $\mathfrak{R}$ jest podciałem ciała $\mathfrak{R}^*$, a działania i porządek w $\mathfrak{R}^*$ oznaczamy tymi samymi symbolami, co działania i porządek w $\mathfrak{R}$.

Przyjmując tę konwencję każdą liczbę ograniczoną $a \in O$ można zapisać w postaci $a = st(a) + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon \in \Omega$. Gdy $a \in O$, to monadą $\mu(a)$ nazywa się zbiór tych liczb ograniczonych, które leżą nieskończenie blisko $a$, tj. $\mu(a) = \{x \in O : \ a \approx x\}$. W ten sposób zbiór liczb ograniczonych $O$ można przedstawić jako sumę nieprzeliczalnej ilości monad $\mu(r)$, gdzie $r \in \mathbb{R}$:

$$O = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \mu(r).$$

[9] W konstrukcji ciała $\mathfrak{R}^*$ wykorzystujemy jedynie fakt, że $\mathfrak{R}$ jest ciałem uporządkowanym. Twierdzenie to można zatem rozumieć jako charakterystykę ciała uporządkowanego $\mathfrak{K}$: Ciało $\mathfrak{K}$ jest ciągłe w sensie Dedekinda wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{K}$ jest ciałem archimedesowym i $\forall a \in O \exists! k \in \mathbb{K}[a \approx k^*]$.

[10] Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 1.3.

[11] Zob. [Capiński, Cutland 1995], s. 16–17, [Prestel 1995], s. 314–315, gdzie dowodzona jest pierwsza część twierdzenia. Por. [Goldblatt 1998], s. 55–56, gdzie równoważność jest dowodzona bez założenia o archimedesowości ciała.

Stąd zaś wynika, że przestrzeń $(\mathfrak{R}^*, \tau_<)$ nie jest ośrodkowa.

**5.** W tym punkcie pokażemy, jak klasycznie rozumianą zbieżność ciągu liczb rzeczywistych $(a_n)$ można wyrazić w strukturze $\mathfrak{R}^*$.

Niech $f$ będzie funkcją rzeczywistą, tj. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Przez $f^*$ oznaczamy funkcję z $\mathbb{R}^*$ do $\mathbb{R}^*$ zdefiniowaną jak następuje:

$$f^*([r_n]) = [f(r_n)], \quad \text{gdzie } [(r_n)] \in \mathbb{R}^*.$$

Gdy $r \in \mathbb{R}$, to $f^*(r^*) = [(f(r), f(r), f(r), \dots)] = (f(r))^*$.

Niech $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Przez $(a_n)^*$ rozumiemy funkcję z $\mathbb{N}^*$ do $\mathbb{R}^*$ zdefiniowaną jak następuje:

$$a^*_N = [(a_{n_j})], \quad \text{gdzie } N \in \mathbb{N}^*,\ N = [(n_j)],\ (n_j) \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Przyjmijmy oznaczenie $\mathbb{N}_\infty =_{df} \mathbb{N}^* \backslash \{n^* : n \in \mathbb{N}\}$. Na podstawie faktu:

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n \in F \to \exists! i \leqslant n [A_i \in F], \quad \text{gdzie } A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ dla } i \neq j, \quad (1)$$

można pokazać, że gdy $K = [(k_j)] \in \mathbb{N}_\infty$, to ciąg $(k_j)$ zawiera podciąg rosnący $(k_{j_n})$ taki, że $\{j_n : n \in \mathbb{N}\} \in F$. Gdy $\{j_n : n \in \mathbb{N}\} \in F$, to na podstawie (1) dostajemy, że $\{j_n > k : n \in \mathbb{N}\} \in F$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

5.1. Niech $(a_n) \subset \mathbb{R}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pokażemy, że zachodzi:

Twierdzenie 2.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leftrightarrow \forall K \in \mathbb{N}_\infty [a^*_K \approx a].$$

Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, niech $K = [(k_j)] \in \mathbb{N}_\infty$, niech $(k_{j_n})$ będzie takim rosnącym podciągiem ciągu $(k_j)$, że $\{j_n : n \in \mathbb{N}\} \in F$. Pokażemy, że $a^*_K \approx a$, tzn.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+ [|a^*_K - a| < \theta].$$

Niech $\theta \in \mathbb{R}_+$. Nierówność $|a^*_K - a| < \theta$ zachodzi wtedy, gdy

$$\{k_j \in \mathbb{N} : |a_{k_j} - a| < \theta\} \in F.$$

Z warunku $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ dostajemy, że istnieje takie $n_0$, że dla $n > n_0$ jest $|a_n - a| < \theta$, a stąd $\{j_n > n_0 : |a_{j_n} - a| < \theta\} \in F$, co oznacza, że $a^*_K \approx a$.

Przypuśćmy teraz, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$. Istnieje zatem takie $\theta \in \mathbb{R}_+$, że

$$\forall k \exists n [n > k \wedge |a_n - a| \geqslant \theta].$$

Istnieje wówczas taki ciąg rosnący $(j_n)$, że dla każdego $n$ zachodzi

$$|a_{j_n} - a| \geqslant \theta.$$

Liczba $K = [(j_n)]$ spełnia warunek $K \in \mathbb{N}_\infty$ oraz zachodzi

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : |a_{j_n} - a| \geqslant \theta\} \in F,$$

co znaczy, że $|a^*_K - a| \geqslant \theta$. Ostatecznie $\exists K \in \mathbb{N}_\infty[\neg(a^*_K \approx a)]$.[12]

**6.** Podobnie jak w poprzednim punkcie można udowodnić wiele innych podstawowych faktów klasycznej analizy. Niech $(a_n) \subset \mathbb{R}$, niech $a, b \in \mathbb{R}$, niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Twierdzenie 3.

$$(a_n) \text{ jest ciągiem Cauchy'ego} \leftrightarrow \forall K, L \in \mathbb{N}_\infty[a^*_K \approx a^*_L].$$

Twierdzenie 4.

$$b \text{ jest punktem skupienia ciągu } (a_n) \ \leftrightarrow \exists K \in \mathbb{N}_\infty[a^*_K \approx b].$$

Twierdzenie 5.

$$f \text{ jest ciągła w } a \ \leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*[x \approx a \to f^*(x) \approx f(a)].$$

Twierdzenie 6.

$$f'(a) = b \leftrightarrow \forall \varepsilon \in \Omega_0 \left[\frac{f^*(a+\varepsilon) - f^*(a)}{\varepsilon} \approx b\right], \quad \text{gdzie } \ \Omega_0 = \Omega \setminus \{0\}.$$

Podobnie i całkę Riemanna można *przełożyć* na odpowiednią formułę analizy niestandardowej.[13]

Mając na uwadze te fakty mówimy, że klasyczną analizę można rozwijać w ciele $\mathfrak{R}$ stosując pojęcie granicy, albo w ciele $\mathfrak{R}^*$ stosując pojęcie nieskończenie małej. W tym sensie podstawowe fakty klasycznej analizy można wyrazić w ciele uporządkowanym, które nie jest ciągłe w sensie Dedekinda.

**7.** W niniejszym szkicu w ogóle nie przywoływaliśmy kluczowej zasady analizy niestandardowej – zasady transferu. Mając konstrukcję ciała $\mathfrak{R}^*$ zasadę transferu (w istocie twierdzenie Łosia o ultrapotędze) można udowodnić, a wówczas Twierdzenia 2–6 w prosty sposób można otrzymać jako wnioski z zasady transferu. W aksjomatycznej prezentacji analizy niestandardowej zasada transferu jest przyjęta jako aksjomat. Podobnie jest z liczbami

[12] Zob. [Capiński, Cutland 1995], s. 17.

[13] Zob. [Capiński, Cutland 1995], rozdz. 2, [Goldblatt 1998], rozdz. II, [Robinson 1966], s. 58–79.

rzeczywistymi: gdy ciało $\mathfrak{R}$ jest konstruowane, to ciągłość jest dowodzona, natomiast w ujęciu aksjomatycznym stanowi jeden z aksjomatów.[14]

**8.** Pokażemy, że ciało $\mathfrak{R}^*$ jest zupełne w sensie Cauchy'ego.[15]

Twierdzenie 8. Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$ spełnia warunek

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ \exists k \forall n [n > k \to |a_k - a_n| < \varepsilon],$$

to $\exists k \forall n [n > k \to a_n = a_k]$.

Zacznijmy od szczególnego przypadku: niech ciąg $(a_n)$ będzie różnowartościowy. Rozważmy rodzinę przedziałów otwartych $\{(0, |a_i - a_j|) \colon i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ i uporządkujmy ją w porządku *malejącym*:

$$(0, r_1) \supseteq (0, r_2) \supseteq (0, r_3) \supseteq \dots, \qquad \text{gdzie } r_k = |a_i - a_j|.$$

Z twierdzenia o nasyceniu wynika, że $\bigcap \{(0, r_n) : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$.[16] Niech $r \in \bigcap \{(0, r_n) : n \in \mathbb{N}\}$ i weźmy liczbę $\frac{r}{4}$. Przyjmując w warunku Cauchy'ego $\varepsilon = \frac{r}{4}$ dostajemy, że istnieje takie $k$, że dla $n, m > k$ i $n \neq m$ zachodzi $|a_n - a_m| < \frac{r}{2}$, co jest sprzeczne z definicją liczby $r$.

Ogólnie, jeżeli $(a_n)$ jest dowolnym ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego, to zbiór liczbowy $\{a_1, a_2, \dots\}$ jest skończony lub nieskończony. Gdy jest skończony, to poczynając od pewnego miejsca $(a_n)$ jest ciągiem stałym. Gdy jest nieskończony, to istnieje różnowartościowy podciąg $(a_{n_k})$ ciągu $(a_n)$. Ciąg $(a_{n_k})$ jest ciągiem Cauchy'ego, a to – jak już wiemy – prowadzi do sprzeczności.

Ostatecznie, gdy ciąg $(a_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego, to poczynając od pewnego miejsca, jest ciągiem stałym:

$$\exists k \forall n [n > k \to a_n = a_k],$$

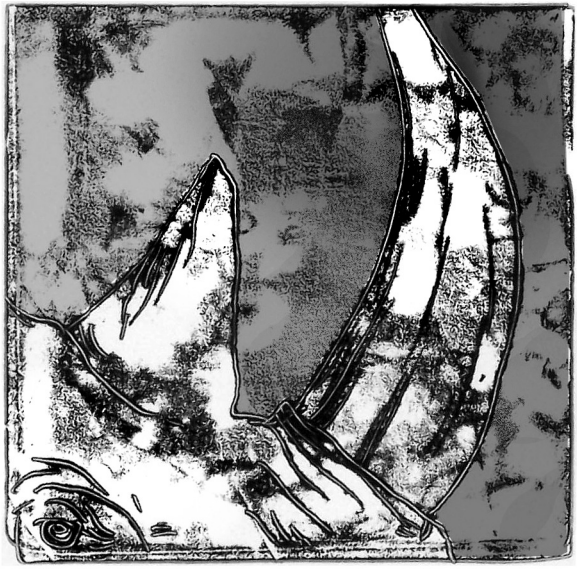
co znaczy, że jest on zbieżny w $\mathfrak{R}^*$.

[14] Dokładne sformułowanie zasady transferu oraz jej dowód są podane w [Capiński, Cutland 1995], *Appendix*. Zob. też rozdz. *O przedmiocie matematycznym. Część II*, pkt. 12.7.

[15] Zob. „Istnieją ciała uporządkowane zupełne w sensie Cauchy'ego i niearchimedesowe. Odpowiedni przykład podamy w rozdz. 12, gdzie liczby rzeczywiste będą rozszerzone do ciała ${}^*\mathbb{R}$ liczb niestandardowych. W tym rozszerzonym ciele istnieją liczby nieskończenie małe i nieskończenie duże, dlatego ${}^*\mathbb{R}$ jest niearchimedesowe, a jednocześnie każdy ciąg Cauchy'ego jest ciągiem stałym, a więc zbieżnym" [Maizner 1995(b)], s. 50. Rozdział 12, o którym mowa w cytacie to artykuł [Prestel 1995]. Ani Mainzer, ani Prestel nie podają dowodu zupełności ciała niestandardowych liczb rzeczywistych, nie wskazują też odpowiedniej literatury.

[16] Zob. [Goldblatt 1998], s. 138–139. Odcinki są zbiorami wewnętrznymi (internal) i spełniają założenie twierdzenia o nasyceniu; zob. [Goldblatt 1998], rozdz. 11.

# EUDOXOS *versus* DEDEKIND



# Euklides, *Elementy*

Powstanie *Elementów* określa się tak samo, jak okres życia Euklidesa: około roku 300 p.n.e. Oryginału nie odnaleziono. Tekst grecki ustalił i wydał w latach 1883–1888 duński filolog klasyczny Johan Ludvig Heiberg. Podstawę tej edycji stanowiły manuskrypty datowane na X wiek n.e., przede wszystkim krytyczna edycja *Elementów* Theona z Aleksandrii (IV wiek n.e.), zapisy wykładów tegoż Theona, oraz manuskrypt zrabowany z Biblioteki Watykańskiej przez wojska napoleońskie i odkryty w Paryżu w roku 1808 przez Francois Peyrarda. Ustalając tekst *Elementów* uwzględniano przekłady i komentarze arabskie oraz łacińskie.[1]

Współczesne tłumaczenia opierają się na edycji Heiberga. Dla nas podstawą jest tłumaczenie Thomasa Heatha.[2]

## Wielkość ($\mu\varepsilon\gamma\varepsilon\theta o\varsigma$)

**1.** Wielkość podpada pod kategorię ilości. Arystoteles pisze:

„Ilość jest bądź rozdzielna, bądź ciągła. [...] Przykładem ilości rozdzielnej jest liczba i mowa, przykładem ilości ciągłej jest linia, powierzchnia, ciało, a ponadto czas i miejsce".[3]

W *Elementach* znajdujemy dwa rodzaje wielkości: liczby (wielkości rozdzielne) i wielkości geometryczne (ciągłe). Odpowiednio rozwinięte są dwie teorie proporcji: w Księdze VII i w Księdze V.

## Euklides, *Elementy*, Księga VII

**2.** Liczba ($\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$). Liczba to liczba naturalna, przy czym, zero w ogóle nie występuje w *Elementach*, zaś 1 nie jest liczbą, tylko jednostką, z której powstają liczby;

---

[1] Zob. [Fowler 1999], rozdz. VI, [Heath 1956], t. I, *Wstęp*, s. 1–151.

[2] Zob. [Heath 1956]. Cytując *Elementy*, zgodnie ze zwyczajem, podajemy numer księgi (w notacji rzymskiej) oraz numer twierdzenia lub definicji (w notacji arabskiej).

[3] [Arystoteles], *Kategorie*, 6.4b.

„An unit ($\mu o\nu\alpha\varsigma$) is that by virtue of which each of the things that exist is called one";[4]

„A number is a multitude ($\pi\lambda\eta\theta o\varsigma$) composed of units";[5]

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-razy}.$$

Tak więc liczba to liczba naturalna poczynając od 2.

2.1. Liczby można dodawać, mnożyć i odejmować (mniejszą od większej), przy tym, mnożenie jest definiowane przez dodawanie,[6] a przemienność mnożenia jest dowodzona.[7]

2.2. Porządek liczb. Dwie liczby mogą być równe, jedna może być większa lub mniejsza od drugiej;

„A number is a part ($\mu\epsilon\varrho o\varsigma$) of a number, the less of the greater, when it measures the greater; but parts ($\mu\epsilon\varrho\eta$) when it does not measure it".[8]

Liczba $n$ stanowi „part" liczby $m$, lub inaczej: $n$ „mierzy" $m$, gdy dla pewnego $k$ jest

$$kn = \underbrace{n + \cdots + n}_{k-razy} = m.$$

Liczba $n$ stanowi „parts" liczby $m$, gdy

$$\exists u \exists k, l[ku = n,\ lu = m],$$

gdzie $u$ jest liczbą lub 1, a $k$, $l$ to liczby (w rozumieniu Euklidesa).

Z dowodu twierdzenia VII.4

„Any number is either a part or parts of any number, the less of the greater",[9]

---

[4][Euklides], VII, def. 1, „Jedno to to, dzięki czemu każda z rzeczy, które są jest nazywana jedną"; „Jednością jest to, na mocy czego każda z rzeczy istniejących nazywa się jedną" [Widomski 1996], s. 73.

[5][Euklides], VII, def. 2, „Liczba to wielość złożona z jedności"; „Liczba zatem jest wielością z jedności" [Widomski 1996], s. 73.

[6]Zob. [Euklides], VII, def. 15.

[7]Zob. [Euklides], VII, tw. 16.

[8][Euklides], VII, def. 3, 4, „Liczba jest częścią liczby, mniejsza większej, gdy mierzy większą, a częściami, gdy nie mierzy jej".

[9][Euklides], VII, tw. 4, „Każda liczba jest albo częścią, albo częściami innej liczby, mniejsza większej".

wynika, że również wtedy, gdy $n$ i $m$ są względnie pierwsze, liczba mniejsza stanowi „parts" większej.[10] Zatem porządek i dodawanie liczb związane są prawem:

$$n > m \leftrightarrow \exists k[m + k = n],$$

gdzie $k$ jest liczbą lub 1.

Ponadto, porządek liczb jest *implicite* scharakteryzowany przez aksjomat indukcji w wersji: w dowolnym niepustym podzbiorze liczb naturalnych istnieje element najmniejszy. Czytamy bowiem:

„Any composite number is measured by some prime number. [...] For, since $A$ is composite, some number will measure it. [...] let it be $B$. Now, if $B$ is prime, what was enjoined will have been done. But if it is composite, some number will measure it. [...] let it be $C$. [...] if $C$ is prime [...]. But if it is composite [...]. Thus, if the investigation be continued in this way, some prime number will be found which will measure the number before it, which will also measure $A$. For, if it is not found, an infinite series of numbers will measure the number $A$, each of which is less than the other: which is impossible in numbers".[11]

Aksjomat indukcji jest *de facto* stosowany już w pierwszym twierdzeniu Księgi VII. Czytamy:

„Two unequal numbers being set out, and the less being continually subtracted in turn from the greater, if the number which is left never measures the one before it until an unit is left, the original numbers will be prime to one another".[12]

[10] Zob. „First, let $A$, $BC$ be prime to one another. Then, if $BC$ be divided into units in it, each unit of those in $BC$ will be some part of $A$; so that $BC$ is parts of $A$" [Euklides], dowód tw. VII.4.

[11] [Euklides], VII, tw. 31, „Liczba złożona jest mierzona przez pewną liczbę pierwszą. [...] Albowiem, gdy $A$ jest złożona, to mierzy ją pewna liczba, niech to będzie $B$. Gdy $B$ jest pierwsza, to osiągnęliśmy to, co było zamierzone. Gdy zaś jest złożona, to będzie mierzona przez pewną liczbę. [...] niech to będzie $C$. [...] gdy $C$ jest pierwsza [...]. Gdy zaś jest złożona [...]. Stąd, gdy rozumowanie to będzie prowadzone w ten sposób, to znajdziemy pewną liczbę pierwszą, która mierzy liczbę ją poprzedzającą i która będzie też mierzyła $A$. Bo gdyby nie było takiej, to byłby nieskończony ciąg liczb mierzących $A$, z których każda jest co raz mniejsza, a dla liczb nie jest to możliwe". Historia zasadniczego twierdzenia arytmetyki zaczyna się właśnie od tego twierdzenia Euklidesa; zob. [Birkhoff, Mac Lane 1957], rozdz. I oraz [Göksel, Özkan 2001].

[12] [Euklides], VII, tw. 1, „Niech dane są dwie nierówne liczby i mniejsza jest kolejno odejmowana od większej. Gdy liczba, która jest resztą nigdy nie mierzy tej, która ją poprzedza do czasu, aż resztą będzie jedno, to dane na wstępie liczby są względnie pierwsze".

W samej tezie, a następnie w dowodzie podany jest algorytm nazywany dzisiaj algorytmem Euklidesa. W twierdzeniu następnym algorytm ten służy wyznaczeniu największego wspólnego dzielnika:

„Given two numbers not prime to one another, to find their greatest common measure".[13]

W rezultacie, w Księdze VII jest przyjęte, że algorytm opisany w twierdzeniu VII.1 po zastosowaniu do dowolnej pary liczb *zakończy się – ostatnią resztą* będzie albo 1, albo pewna liczba naturalna.

W dzisiejszej matematyce fakt, że algorytm Euklidesa zastosowany do liczb naturalnych musi *się zakończyć* jest tak uzasadniany: w wyniku zastosowania algorytmu powstaje malejący ciąg reszt, a ciąg taki musi być skończony.[14]

Fakt, że malejący ciąg liczb naturalnych musi być skończony to właśnie aksjomat indukcji w wersji wyżej przedstawionej.[15]

2.3. Algorytm Euklidesa był znany na długo przed Euklidesem i był stosowany do badania stosunków wielkości geometrycznych.[16] Euklides najpewniej jako pierwszy zastosował go do liczb.

Z matematycznego punktu widzenia, różnica między liczbami a wielkościami geometrycznymi w *Elementach* polega na tym, że algorytm Euklidesa zastosowany do liczb musi się *zakończyć*, a w przypadku wielkości geometrycznych tak być nie musi, dokładniej: gdy wielkości są niewspółmierne, to algorytm *nie zakończy się*, gdy wielkości są współmierne, to algorytm *zakończy się*; taki właśnie jest sens cytowanego wyżej twierdzenia VII.4 oraz twierdzeń X.2 i X.5:

---

[13] [Euklides], VII, tw. 2, „Znaleźć największą wspólną miarę dwóch danych liczb, które nie są względnie pierwsze".

[14] Zob. [Birkhoff, Mac Lane 1957], s. 27–28.

[15] Wśród historyków matematyki greckiej trwa spór o to, czy Grecy „świadomie" stosowali indukcję matematyczną; zob. [Acerbi 2000]. Problem pochodzi stąd, że zasada indukcji jest różnie formułowana. „Istnieje powszechna zgoda co do tego, że Indukcja Zupełna [...] po raz pierwszy została świadomie użyta jako metoda dowodzenia w *Traitè du triangle arithmètique* Błażeja Pascala (1623-1662)" [Acerbi 2000], s. 57. Przez „indukcję pascalowską" rozumie się schemat (P): $(\varphi(1) \wedge \forall n \in N[\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1)]) \rightarrow \forall n \in N[\varphi(n)]$, gdzie $\varphi(n)$ jest formułą arytmetyki liczb naturalnych. Gdy za „indukcję pascalowską" przyjmiemy zdanie (P'): $\forall M \subset N[(1 \in M \wedge \forall n \in N[n \in M \rightarrow n+1 \in M]) \rightarrow M = N]$, to otrzymamy, że (P') jest równoważne temu, że zbiór $(N, <)$ jest dobrze uporządkowany; zob. [Rasiowa 1979], rozdz. II. Ale równoważność ta została ustalona nie wcześniej niż pod koniec XIX wieku.

[16] Zob. [Fowler 1999], [Knorr 1978]. Książki te niemal w całości poświęcone są odtworzeniu pre-Euklidesowej teorii proporcji, opartej na algorytmie „powtarzania odejmowania" (anthyphairesis), który w *Elementach* jest opisany w twierdzeniach VII.1, 2 oraz X. 2, 3.

„If, when the less of two unequal magnitudes is continually subtracted in turn from the greater, that which is left never measures the one before it, the magnitudes will be incommensurable",[17]

„Commensurable magnitudes have to one another the ratio which a number has to a number".[18]

Twierdzenia te można powiązać z twierdzeniami teorii liczb, w których ustalona jest odpowiedniość między nieskończonymi ułamkami łańcuchowymi i liczbami niewymiernymi oraz skończonymi ułamkami łańcuchowymi i liczbami wymiernymi.[19]

**3.** Punktem wyjścia teorii proporcji rozwijanej w Księdze VII jest definicja:

„Numbers are proportional when the first is the same multiple, or the same part, or the same parts of the second that the third is is of the fourth";[20]

$$m : n :: k : l \leftrightarrow_{df} \exists p[pn = m, pl = k] \vee \exists p[pm = n, pk = l] \vee$$

$$\vee \exists u_1, u_2 \exists p, q[m = pu_1, n = qu_1,\ k = pu_2, l = qu_2],$$

gdzie $u_1$, $u_2$ to liczby lub 1, a $p$, $q$ to liczby.[21]

3.1. W Księdze VII twierdzenia 6-10 traktują o pojęciach „part" oraz „parts", twierdzenia 11-22 – o proporcjach,[22] pozostałe – wprost o liczbach naturalnych.[23]

---

[17] „Gdy mniejsza z dwóch nierównych wielkości jest kolejno odejmowana od większej, a to co zostaje nigdy nie mierzy tego, co przed nim, to wielkości te są niewspółmierne".

[18] „Wielkości współmierne są do siebie w takim stosunku, jak liczba do liczby".

[19] Zob. wyżej rozdz. II, pkt. 15.

[20] [Euklides], VII, def. 20, „Liczby są proporcjonalne, gdy pierwsza z nich jest tą samą wielokrotnością, lub tą samą częścią, lub tymi samymi częściami drugiej, co trzecia czwartej".

[21] W sprawie oznaczeń $m : n$ oraz $m : n :: k : l$ zob. przypis 47 na str. 200.

[22] Np. „If four numbers be proportional, the number produced from the first and fourth will be equal to the number produced from the second and third; and if the number produced from the first and fourth be equal to that produced from the second and third, the four numbers will be proportional", VII.18; symbolicznie: $m : n :: p : q \leftrightarrow mq = np$, znane dzisiaj z definicji liczby wymiernej. Por. „Ogólnie, $x/y$ jest taką relacją dowolnej liczby $z$ do dowolnej liczby naturalnej $w$, że $y \times z = x \times w$" – i dalej, w przypisie – „Takie określenie stosunku w zasadzie pochodzi od Peano" [Quine 1974], s. 260. „Takie określenie stosunku pochodzi" – jak widzimy – od Euklidesa.

[23] Np. „Given two numbers, to find the least that they measure", VII. 34.

Teoria proporcji oparta na definicji VII.20 służy dowodzeniu twierdzeń o liczbach naturalnych – tych w Księdze VII, a następie w VIII i IX.[24]

3.2. Teoria proporcji z Księgi VII często, zwłaszcza wtedy, gdy przeprowadzana jest analogia między konstrukcją liczb rzeczywistych za pomocą przekrojów Dedekinda a teorią proporcji z Księgi V, jest interpretowana jako teoria liczb wymiernych: proporcja to równość stosunków, stosunek liczb to ułamek i w rezultacie proporcja $m : n :: p : q$ to równość ułamków $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Trzymając się faktów możemy powiedzieć co następuje:

(1) Ani w Księdze VII, ani w Księdze V nie jest zdefiniowane pojęcie stosunku.[25]

(2) Nawet gdy przyjąć, że stosunek liczb jest ułamkiem, a proporcja równością, to i tak nigdzie w *Elementach* owe „ułamki" nie są ani dodawane, ani mnożone, co więcej, w dobie Euklidesa operacje takie nie były nawet znane. Tej jednej kwestii David Fowler poświęcił odrębny rozdział – rozdział VII – swej książki *The Mathematics of Palto's Academy*. Czytamy tam:

„W rozdziale tym pokażę, że w greckich tekstach matematycznych, naukowych, finansowych, pedagogicznych pochodzących z okresu przed Heronem i Diofantesem nie znajdujemy ani pojęcia ułamka zwykłego $p/q$, ani operacji na ułamkach takich jak np. $p/q \times r/s = pr/qs$, czy $p/q + r/s = (ps + qr)/ps$".[26]

(3) Dodajmy, że nigdzie w *Elementach* owe „ułamki" nie są porównywane w sensie relacji mniejszy–większy, oraz jeszcze i to, że (4) jako pierwszy definicję $p/q < r/s \leftrightarrow_{df} ps < qr$ podał Heinrich Weber w roku 1895.[27]

W rezultacie, nawet gdy przyjąć, że stosunek $m : n$ jest ułamkiem $\frac{m}{n}$, to różnica między dzisiejszym rozumieniem liczb wymiernych, a tym, co można znaleźć w *Elementach* jest taka, jak między ciałem uporządkowanym $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$ a zbiorem $\mathbb{Q}$. W żadnym więc razie nie można przyjąć, że w *Elementach* występują przekroje zbioru $(\mathbb{Q}, <)$.

---

[24] Np. „Given three numbers, to investigate when it is possible to find a fourth proportional", IX.19, „Prime numbers are more then any assigned multitude of prime numbers", IX.20, czy twierdzenie IX.35 o sumie wyrazów postępu geometrycznego.

[25] Zob. niżej pkt. 4.

[26] [Fowler 1999], s. 227. Por. „Dowód niewymierności $\sqrt{2}$ pojawia się w *Analitykach pierwszych* Arystotelesa (41a). Przyjmujemy istnienie ułamka $\frac{a}{b}$, gdzie $a, b$ są liczbami całkowitymi, którego kwadrat byłby równy 2" [Widomski 1996], s. 34. Ale przecież Arystoteles nie mógł zapisać równania $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2$.

[27] Zob. niżej pkt. 9.

Euklides, *Elementy*, Księga V

Księga V *Elementów* zawiera wykład teorii proporcji wielkości ciągłych. Jej autorstwo przypisuje się Eudoxosowi z Knidos i dlatego jest nazywana teorią proporcji Eudoxosa.[28] Euklides stosuje ją w teorii figur podobnych (Księga VI) do klasyfikacji wielkości współmiernych i niewspółmiernych (Księga X) oraz do badania stosunków brył (Księgi XI i XII).

**4.** Stosunek ($\lambda o\gamma o\varsigma$). Stosunek to relacja ze względu na wielkość (size, $\pi\eta\lambda\kappa o\tau\eta\varepsilon\varsigma$) między wielkościami (magnitudes, $\mu\varepsilon\gamma\varepsilon\theta o\varsigma$) tego samego rodzaju;

„A ratio is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind".[29]

Jak dotąd nikomu nie udało się *rozszyfrować*, nadać matematycznego sensu tej definicji; mając to na uwadze mówimy, że w *Elementach* nie ma definicji stosunku. Z drugiej strony, w interpretacjach, w których teoria proporcji z Księgi V jest porównywana z teorią liczb rzeczywistych, to właśnie stosunkowi przypisywana jest liczba rzeczywista. Historycznie jest to usprawiedliwione tym, że przed sformułowaniem teorii Eudoxosa w matematyce greckiej funkcjonowały co najmniej dwie teorie proporcji, w obydwu zdefiniowany był stosunek, a proporcja polegała na porównaniu stosunków.[30]

Faktem jest, że w *Elementach* stosunki nie występują samodzielnie, a jedynie w proporcji i tylko od intepretacji zależy, czy będzie ona uznana za równość stosunków, czy też za relację między parami wielkości.

4.1. Wielkości występujące w stosunku są wielkościami tego samego rodzaju. Doskonale ilustruje to twierdzenie VI.1:

„Triangles [...] which are under the same hight are to one another as their bases".[31]

W proporcji występują tu z jednej strony trójkąty ($T_1,\ T_2$), z drugiej – odcinki ($b_1,\ b_2$) i twierdzenie można zapisać w postaci $T_1 : T_2 :: b_1 : b_2$.

[28] Zob. [Heath 1956], t. II, s. 113.

[29] [Euklides], V, def. 3, „Stosunek to pewna relacja z uwagi na mierzenie między wielkościami tego samego rodzaju"; „Stosunek iest, wzaiemne dwóch wielkości iednego rodzaiu, co do ilości, porównanie" [Czech 1817], s. 136.

[30] Zob. [Berggren 1984], [Fowler 1999], [Knorr 1978].

[31] [Euklides], VI, tw. 1, „Trójkąty [...] o tych samych wysokościach mają się tak do siebie, jak ich podstawy"; „Troykąty [...] maiące też samę wysokość są między sobą iak podstawy" [Czech 1817], s. 179.

Ivor Grattan-Guiness skatalogował wielkości geometryczne występujące w *Elementach*.[32] I tak dla przykładu wielkościami tego samego rodzaju są: (1) odcinki prostoliniowe, (2) kąty płaskie, (3) trójkąty, (4) prostokąty, (5) łuki ustalonego okręgu; odpowiednio wielkościami różnego rodzaju są: odcinek i kąt, prostokąt i odcinek, prostokąt i łuk okręgu.

4.2. Wielkości geometryczne różnego rodzaju nie są porównywane; wielkości tego samego rodzaju są uporządkowane: jedna jest większa, mniejsza, bądź równa drugiej.

Wielkości tego samego rodzaju można dodawać, w szczególności można tworzyć wielokrotności danej wielkości $A$; „multiple of $A$" oznacza:

$$nA = \underbrace{A + \cdots + A}_{n-razy}.$$

Związek między dodawaniem a porządkiem wielkości (tego samego rodzaju) dany jest w definicji V.4:

„Magnitudes are said to have a ratio to one another which are capable, when multiplied, of exceeding one another";[33]

$$\forall A, B \exists n[nA > B].$$

W nowożytności definicja ta zyskała nazwę aksjomatu Archimedesa.[34]

4.3. Przyjmując, że wielkości tego samego rodzaju należą do struktury $\mathfrak{M} = (M, +, <)$ i biorąc pod uwagę to, co w Księdze V powiedziane jest wprost lub *implicite* dostajemy, że dodawanie jest (1) działaniem wewnętrz-

[32] Zob. [Grattan-Guiness 1996].

[33] [Euklides], V, def. 4, „O wielkościach mówimy, że jedna jest w stosunku do drugiej, gdy biorąc wielokrotność jednej można przekroczyć drugą"; „Mówi się, że wielkości maią stosunek między sobą, kiedy mnieysza z nich powtórzona wielokrotnie, może przewyższyć większą" [Czech 1817], s. 136.

[34] W istocie aksjomat podany przez samego Archimedesa ma już inną postać, mianowicie: „Of unequal lines, unequal surfaces, and unequal solids, the greater exceeds the less by such a magnitude as, when added to itself, can be made to exceed any assigned magnitude among those which are comparable with [it and with] another one" [Archimedes], Book I, s. 4; symbolicznie: $A < B \to \exists n[n(B - A) > B,\ n(B - A) > A]$. Można wskazać strukturę, w której zachodzi aksjomat Archimedesa w myśl definicji V.4 i nie zachodzi aksjomat Archimedesa w wersji Archimedesa; zob. niżej pkt. 5.2. Natomiast w zbiorze jednoelementowym zachodzi aksjomat Archimedesa w wersji Archimedesa i nie zachodzi aksjomat Archimedesa w myśl definicji V.4.

nym,[35] (2) łącznym i przemiennym[36], (3) porządek jest liniowy.[37] Związek dodawania z porządkiem zadany jest aksjomatami:

(E1) $\exists n \in N[nA > B]$,
(E2) $A > C \rightarrow \exists E \in \mathfrak{M}[C + E = A]$,[38]
(E3) $A > C \rightarrow A + B > C + B$.[39]

Ponadto do aksjomatów charakteryzujących strukturę $\mathfrak{M}$ należy zaliczyć:

(E4) $\forall A \forall n \exists B[nB = A]$,[40]
(E5) $\forall A, B, C \in \mathfrak{M} \exists X \in \mathfrak{M}[A : B :: C : X]$.[41]

Strukturę $\mathfrak{M}$ będziemy nazywać dalej strukturą wielkości. O $\mathfrak{M}$ przyjmujemy, że spełnione są założenia (1)-(3), natomiast aksjomaty z grupy (E1)-(E5) będziemy przyjmować w zależności od kontekstu.

(E1) to definicja V.4. Aksjomat (E2) został zauważony w dwóch komentarzach.[42] Aksjomat (E3) nie został – o ile nam wiadomo – nigdzie zauważony; będzie on *bohaterem* drugiej części niniejszego rozdziału.

Aksjomat (E4) występuje jako założenie dowodu twierdzenia V.5. W komentarzach nie przywiązuje się doń znaczenia, bo twierdzenie V.5 może być udowodnione i bez tego założenia, a z drugiej strony nigdzie w *Elementach* Euklides nie powołuje się na twierdzenie V.5. Ale (E4) znajdujemy też jako założenie dowodu twierdzenia X.6., które jest o tyle ciekawe, że *spotykają* się w nim teorie proporcji z Księgi V i VII. Dodajmy wreszcie, że aksjomat (E4) jest dyskusyjny z uwagi na zagadnienie trysekcji kąta, a kąty – przypomnijmy – są wielkościami geometrycznymi, do których odnosi się teoria proporcji z Księgi V.[43]

Element $X$ występujący w aksjomacie (E5) to tak zwana czwarta proporcjonalna. W Księdze XII, gdzie teoria proporcji jest powiązana z metodą wyczerpywania, założenie o istnieniu czwartej proporcjonalnej odgrywa

[35] Zob. [Euklides], V, *passim*. W istocie dopuszczamy się tu pewnego uproszczenia, które w ogóle pozwala opisać teorię proporcji językiem współczesnej matematyki.

[36] Zob. [Euklides] dowód twierdzenia V.1.

[37] Przechodniość jest zakładana w dowodzie twierdzenia V.8, spójność – w dowodach twierdzeń V.9, V.10, V.18.

[38] Zob. dowód twierdzenia V.8.

[39] Zob. dowody twierdzeń V.12 i V.25.

[40] Zob. dowód twierdzenia V.5.

[41] Zob. dowód twierdzenia V.18. Definicję proporcji $A : B :: C : X$ podajemy niżej w pkt. 5.

[42] Zob. [Bourbaki 1966(b)], [Mainzer 1995(a)]. David Joyce natomiast interpretuje (E2) jako definicję porządku: $A > C \leftrightarrow_{df} \exists E \in M[C + E = A]$; zob. [Joyce 1997].

[43] Zob. [Euklides], VI, tw. 33.

kluczową rolę. We współczesnych komentarzach założenie o czwartej proporcjonalnej jest kojarzone z aksjomatem ciągłości.[44]

**5.** Proporcja ($\alpha\nu\alpha\lambda o\gamma\iota\alpha$). Definicja V.5 to definicja proporcji:

„Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order".[45]

Definicja V.6 ustala nazwę:

„Let magnitudes which have the same ratio be called proportional".[46]

Zgodnie ze zwyczajem, stosunek wielkości $A$ i $B$ zapisujemy jako $A : B$, zaś proporcję – jako $A : B :: C : D$.[47] Definicję V.5 można więc tak przedstawić:

$$(1) \quad A : B :: C : D \leftrightarrow_{df} \forall m, n[(nA >_1 mB, nC >_2 mD) \vee$$

$$\vee(nA = mB, nC = mD) \vee (nA <_1 mB, nC <_2 mD)],$$

[44] Zob. [Stein 1990].

[45] [Euklides], V, def. 5, „O wielkościach mówimy, że są w tym samym stosunku, pierwsza do drugiej i trzecia do czwartej, gdy biorąc dowolne wielokrotności pierwszej i trzeciej oraz dowolne wielokrotności drugiej i czwartej, pierwsze wielokrotności będą jednocześnie większe, jednocześnie równe lub jednocześnie mniejsze od odpowiednio wziętych drugich wielokrotności"; „Mówi się, że wielkości są w jednym i tymże samym stosunku, pierwsza do drugiey, i trzecia do czwarty, kiedy wziąwszy pierwszey i trzeciey równie wielokrotne, drugiej i czwartey równie wielokrotnie; w każdey odmianie wielokrotnego wielokrotych powtórzenia, każdą z dwóch pierwszych wielokrotnych, każdą z dwóch drugich wielokrotnych, albo zarazem iedna drugą przewyższa, albo zarazem jednej drugiej jest równa, albo zarazem iedna od drugiej iest mnieysza, to iest gdy wielokrotna pierwszey wielkości iest równa lub mnieysza od wielokrotney trzeciey wielkości, iest też wielokrotna drugiey wielkości większa, równa lub mnieysza od wielokrotney czawartey wielkości" [Czech 1817], s. 136–137; zob. też [Kulczycki 1973], s. 264. Zob. też tłumaczenie z greckiego na angielski dokonane przez Fabio Acerbi: „Magnitudes are said to be in the same ratio, first to second and third to fourth, when the equimultiples of the first and third at the same time exceed or at the same time are equal to or at the same time fall short of the equimultiples of second and fourth, compared to one another, whatever [is] each multiple of each [magnitude]" [Acerbi 2003], s. 194.

[46] [Euklides], V, def. 6, „Wielkości, które są w tym samym stosunku nazwijmy proporcjonalnymi"; „Wielkości, które maią jeden i tenże sam stosunek, zowią się proporcyonalne" [Czech 1817], s. 137.

[47] Zwyczaj ten został zapoczątkowany w XVII wieku przez Vicenta Winga (stosunek) i Williama Outgethered (proporcja); zob. [Grattan-Guiness 1996], s. 365–366.

gdzie wielkości $A, B$ oraz $C, D$ są parami tego samego rodzaju, co zapisujemy jako $A, B \in \mathfrak{M}_1 = (M_1, +, <_1)$ oraz $C, D \in \mathfrak{M}_2 = (M_2, +, <_2)$.[48]

W literaturze przedmiotu można też spotkać i takie wersje:

$$(2) \quad A : B :: C : D \leftrightarrow_{df} \forall m, n[(nA >_1 mB \rightarrow nC >_2 mD) \wedge$$
$$\wedge(nA = mB \rightarrow nC = mD) \wedge (nA <_1 mB \rightarrow nC <_2 mD)],$$

oraz

$$(3) \quad A : B :: C : D \leftrightarrow_{df} \forall m, n[(nA >_1 mB \leftrightarrow nC >_2 mD) \wedge$$
$$\wedge(nA = mB \leftrightarrow nC = mD) \wedge (nA <_1 mB \leftrightarrow nC <_2 mD)].$$

Przyjmując, że porządki w $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ są liniowe, definicje te są równoważne.

5.1. Porządek stosunków. Definicja V.7 to definicja porządku:

„When, of the equimultiples, the multiple of the first magnitude exceeds the multiple of the second, but the multiple of the third does not exceed the multiple of the fourth, then the first is said to have a greater ratio to the second then the third has to the fourth";[49]

$$A : B \succ C : D \leftrightarrow_{df} \exists m, n[nA >_1 mB,\ nC \leqslant_2 mD],$$

gdzie $A, B \in \mathfrak{W}_1$ oraz $C, D \in \mathfrak{W}_2$.

5.2. Przyjmijmy teraz, że w $\mathfrak{M}$ spełniony jest aksjomat Archimedesa i pomińmy (E2) oraz (E3). Pokażemy, że nie musi wtedy zachodzić prawo trychotomii tak rozumiane:

$$A : B \prec C : D \vee A : B :: C : D \vee A : B \succ C : D.^{50}$$

Przyjmijmy $\mathfrak{M} = (M, +, <)$, gdzie $M$ to zbiór niestandardowych liczb rzeczywistych ograniczonych, o części standardowej dodatniej;[51]

$$M = \{x \in \mathbb{R}^* : st(x) > 0,\ \exists r \in \mathbb{R}_+[0 < |x| \leqslant r]\},$$

[48] Pomijamy indeksy przy symbolu dodawania.

[49] [Euklides], V, def. 7, „Przy równych wielokrotnościach, gdy wielokrotność pierwszej wielkości przekracza wielokrotność drugiej, a wielokrotność trzeciej nie przekracza wielokrotności czwartej, wtedy mówimy, że pierwsza jest w większym stosunku do drugiej niż trzecia do czwartej"; „Jeżeli zaś z równie wielokrotnych, wielokrotna pierwszey przewyższa wielokrotną drugiey, lecz wielokrotna trzeciey nie przewyższa wielokrotney czawartey; na ten czas mówi się, pierwsza do drugiey większy ma stosunek, niż trzecia do czwartey, lub co iedno iest, że trzecia do czwartey mnieyszy ma stosunek, niż pierwsza do drugiey" [Czech 1817], s. 137.

[50] Por. [Joyce 1997], gdzie prawo trychotomii jest dowodzone jedynie przy założeniu (E1).

[51] Zob. rozdz. *Niestandardowe liczby rzeczywiste.*

a dodawanie i porządek w $M$ są takie, jak w ciele niestandardowych liczb rzeczywistych. Stąd od razu otrzymujemy, że dodawanie jest łączne i przemienne, a porządek jest liniowy i zgodny z dodawaniem.

W $\mathfrak{M}$ spełniony jest aksjomat Archimedesa. Istotnie, jeżeli $A > B$, to $st(A) \geqslant st(B)$ i istnieje taka liczba naturalna $n$, że zachodzi $nst(B) > st(A)$, a wówczas $nB > A$.

Tak więc w strukturze relacyjnej $\mathfrak{M}$ spełnione są aksjomaty (E1) oraz (E3); można pokazać, że nie jest spełniony aksjomat (E2).

Niech teraz $\varepsilon$ będzie dodatnią nieskończenie małą, niech $A = 3 - \varepsilon$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 2$. Zachodzi $\frac{3-\varepsilon}{2} < \frac{3}{2}$. Między liczbami $\frac{3-\varepsilon}{2}$ i $\frac{3}{2}$ nie leży żadna standardowa liczba wymierna, dlatego gdy $m \neq 3k$ lub $n \neq 2k$, gdzie $k \in N$, to

$$\frac{3-\varepsilon}{2} < \frac{m}{n} \leftrightarrow \frac{3}{2} < \frac{m}{n} \quad \text{oraz} \quad \frac{3-\varepsilon}{2} > \frac{m}{n} \leftrightarrow \frac{3}{2} > \frac{m}{n},$$

lub w równoważnej postaci

$$n \cdot (3-\varepsilon) < m \cdot 2 \leftrightarrow n \cdot 3 < m \cdot 2 \quad \text{oraz} \quad n \cdot (3-\varepsilon) > m \cdot 2 \leftrightarrow n \cdot 3 > m \cdot 2.$$

Gdy $m = 3k$ i $n = 2k$, to

$$\frac{3-\varepsilon}{2} < \frac{m}{n} \wedge \frac{3}{2} = \frac{m}{n},$$

lub w równoważnej postaci

$$n \cdot (3-\varepsilon) < m \cdot 2 \wedge n \cdot 3 = m \cdot 2.$$

Stąd, ostatecznie dostajemy:

$$\neg(A : B \prec C : D) \wedge \neg(A : B :: C : D) \wedge \neg(A : B \succ C : D).^{52}$$

Equimultiples ($\pi o \lambda \lambda \alpha \pi \lambda \alpha \sigma \iota \alpha$)

**6.** *Elementy*, Księga X, twierdzenie 5:

„Commensurable magnitudes have to one another the ratio which a number has to a number".[53]

[52] Omawiając teorię proporcji Heinricha Webera, pokażemy, że relacja proporcji nie jest zwrotna. Zob. niżej pkt. 20.

[53] [Euklides], X, tw. 5, „Wielkości współmierne są do siebie w takim stosunku, jak liczba do liczby".

To ważne twierdzenie, bo traktuje o proporcji, w której z jednej strony występują wielkości geometryczne (commensurable magnitudes), a z drugiej – liczby. Heath pisze w komentarzu, że w dowodzie tego twierdzenia Euklides przyjmuje definicję VII.20 i wielkości geometryczne traktuje, jak liczby, chociaż powinien zastosować definicję V.5 i liczby potraktować, jak wielkości geometryczne. Dalej zaś czytamy:

„Dlatego jest tu pewna luka. Euklides powinien udowodnić, że wielkości proporcjonalne w sensie definicji VII.20 są także proporcjonalne w sensie definicji V.5, lub, że proporcja liczb jest szczególnym przypadkiem proporcji wielkości. Udowodnił to Simson w Twierdzeniu $C$ dodanym do Księgi V".[54]

Biorąc pod uwagę tylko tekst *Elementów* nic, poza sugestiami Heatha, który na marginesie podaje numery twierdzeń i definicji zastosowanych w dowodzie, nie wskazuje na to, która definicja została użyta. Sam Euklides nie pisze, z jakiej definicji korzysta i na jakie twierdzenie się powołuje. Można pokazać, że w dowodzie twierdzenia X.5 korzysta z ustaleń obu Ksiąg, V i VII, ale szczegółowe uzasadnienie zbyt daleko odwiodłoby nas o zasadniczego wątku.

6.1. Robert Simson zamieścił wspomniany przez Heatha dowód we własnej edycji *Elementów*. Rzecz ukazała się po raz pierwszy w roku 1756, w Glasgow[55] pod tytułem: *The Elements of Euclid viz. The First Six Books, Together with the the Eleventh and Twelfth. The Errors by Which Theon and Others Have Long Ago Vitiated These Books, are Corrected and Some of Euclid's Demonstrations Are Restored*.[56]

W wydaniu Simsona nie ma więc – jak widać – Księgi VII i już chociażby dlatego liczby występujące w proporcji zostały potraktowane, jak wielkości geometryczne. Ciekawe jest natomiast to, że dla przeprowadzenia wspomnianego „dowodu" Simson przyjmuje dwa aksjomaty:

$$\forall n[A \leqslant B \leftrightarrow nA \leqslant nB],$$

$$\forall n, m[nA \leqslant mA \leftrightarrow nB \leqslant mB].^{57}$$

[54] [Heath 1956], t. III, s. 25.

[55] Edycja Simsona była wznawiana ponad 70 razy, ostatnie wydania miały miejsce w roku 1933 (Londyn, Toronto) i 1944 (Sao Paolo), i przez długie lata stanowiła podstawę podręczników geometrii; zob. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Simson.

[56] Dokładniej: Simson wydał *Elementy* po łacinie, natomiast wyżej przytoczyliśmy tytuł angielskiego tłumaczenia z roku 1810 (Philadelphia); zob. [Goldstein 2000], s. 52–53.

[57] Zob. [Heath 1956], t. II. s. 126–131.

Dla porównania, pod koniec XX wieku, związek między definicją VII.20 i V.5, jest dowodzony przy założeniu, skądinąd nawet nie podanym wprost, a jakby oczywistym samym przez się:

$$nA < mB \rightarrow n < m.$$[58]

Różnica jest wyraźna: we współczesnym ujęciu, współczynniki w multiples są po prostu liczbami naturalnymi i mogą być *odrywane* od wielkości geometrycznych. Patrząc z tej perspektywy, edycja Simsona należy do innej epoki – znacznie bliższej Euklidesowi.

6.2. Sześć pierwszych twierdzeń Księgi V traktuje o multiples. Czytamy, dla przykładu:

„If there be any number of magnitudes whatever which are, respectively, equimultiples of any magnitudes equal in multitude, then, whatever multiple one of the magnitudes is of one, that multiple also will be of all";[59]

„If two magnitudes be equimultiples of two magnitudes, and any magnitudes subtracted from them be equimultiples of the same, the remainders also are either equal to the same or equimultiples of them".[60]

W połowie XIX wieku, po blisko stu latach od edycji Simsona, język equimultiples stał się już niezrozumiały. Twierdzenia V.1–V.6 August De Morgan opatrzył takim komentarzem:

„proste twierdzenia arytmetyczne, wyrażone w języku zupełnie niezrozumiałym dla współczesnego czytelnika. Pierwsze, dla przykładu, nie mówi

[58] Zob. „Jeśli $a : b$ jest (dowolną) proporcją [...]. Mamy $m \cdot p \cdot a < m \cdot q \cdot b = n \cdot q \cdot a$, skąd $p \cdot m < n \cdot q$" [Mioduszewski 1996], s. 64.

[59] [Euklides], V, tw. 1, „Gdy dana jest dowolna ilość dowolnych wielkości, które są odpowiednio tymi samymi wielokrotnościami tej samej ilości wielkości, bez względu na to jaką wielokrotnością jednej z nich jest druga, będą one tą samą wielokrotnością wszystkich"; „Jeżeli ilekolwiek wielkości są ilukolwiek w równey liczbie wielkości, każda każdey równie wielokrotnemi; ilekrotna iest wielkość iedna wielkości iednej, tylekrotne będą i wszystkie wszystkich" [Czech 1817], s. 141.

[60] [Euklides], V, tw. 6, „Gdy dwie wielkości są tymi samymi wielokrotnościami pewnych wielkości, a dowolne odejmowane od nich wielkości są tymi samymi wielokrotnościami tej samej, to reszty też są albo równe tej samej, albo jej równymi wielokrotnościami"; „Jeżeli dwie wielkości są równie wielokrotne dwóch drugich wielkości, i pewne części pierwszych są równie wielokrotne wielkości drugich; będą i pozostałe części pierwszych wielkości, albo równe wielkościom drugim, albo względem nich równie wielokrotne" [Czech 1817], s. 146–147.

nic więcej niż to, że dziesięć akrów i dziesięć roods [1 rood=10,117 ara – P.B.] to tyle samo, co jeden akr i jeden rood dziesięć razy wzięte".[61]

Heath zaś dopowiada:

„Dlatego jednym z zadań uwag, jakie dołączamy do tych i do pozostałych twierdzeń Księgi V, jest to, aby wyjaśnić czytelnikowi znaczenie tych twierdzeń, w ten sposób, że zamieszczamy obok nich te same prawdy, ale wyrażone w dużo prostszej i bardziej zrozumiałej (algebraicznej) notacji. Tak więc, wielkości będziemy oznaczać pierwszymi literami alfabetu $a, b, c$ itd., przyjmując małe litery, aby odróżnić je od oznaczeń przyjmowanych przez Euklidesa; małe litery $m, n, p$ itd. będą reprezentowały liczby całkowite. Tym sposobem $ma$ zawsze będzie znaczyło $m$ razy $a$, czy też $m$-tą wielokrotność $a$ [$m^{th}$ multiple of $a$] (przyjmując $1.a$ jako pierwszą, $2.a$ jako drugą wielokrotność itd.)".[62]

Zgodnie z tą konwencją, twierdzenia V.1–V.6 są *intepretowane* jak następuje:

(1) $ma + mb + mc + \cdots = m(a + b + c + \dots)$,
(2) $ma + na = (m + n)a$,
(3) $m.na = mn.a$,
(4) $a : b = c : d \rightarrow ma : nb = mc : nd$,[63]
(5) $ma - mb = m(a - b)$,
(6) „jeżeli $n$ jest mniejsze od $m$, to $ma - na$ jest tą samą wielokrotnością $a$, co $mb - nb$ wielokrotnością $b$".[64]

Dowody podane przez Euklidesa polegają na podziale wielkości, która jest multiple (wielokrotnością): jeżeli $AB$ jest wielokrotnością $E$, to $AB$ można podzielić na wielkości $AG$ i $GB$ przystające do $E$ (istotnie, w dowodach Euklides zwykle przyjmuje, że wielokrotność *składa się* z dwóch *części*);

[61] Cytowane za [Heath 1956], t. II, s. 139, przy czym Heath nie podaje źródła; zdanie to pochodzi albo z A. De Morgan, *Supplementary Remarks on the first six Books of Euclid's Elements* (1849), albo z broszurki A. De Morgan, *First Notions in Logic* (1839).

[62] [Heath 1956], t. II, s. 139.

[63] Proporcję $a : b :: c : d$ Heath zapisuje jako równość $a : b = c : d$.

[64] Zob. [Heath 1956], t. II, s. 138-148. Zmienne, że twierdzenia V.6. nie udało się zapisać tak *gładko*, jak pięć poprzednich. Przyjmując konwencję zapisu algebraicznego należałoby je przedstawić jako $ma - mb = m(a - b)$. Różnica polega na tym, że w twierdzeniu V.6 wielkości $a$, $b$ oraz $a-b$ są współmierne, zaś w V.5 – dowolne. Dla Euklidesa jest to powód, aby przypadki te rozpatrzyć jako osobne twierdzenia.

„For, since $AB$ is the same multiple of $E$ [...]. Let $AB$ be divided into magnitudes $AG$, $GB$ equal to $E$".[65]

Według Heatha jest natomiast tak, że to „$m$ jest dzielone na jednostki [units]", ale w *Elementach* to, że $m$ „składa się z jednostek" będzie powiedziane dopiero w definicji VII.2.

6.3. Dzisiaj, to prawda, trudno jest interpretować twierdzenia V.1–V.6. inaczej niż Heath, ale nie można też nie zauważyć, że jednak dokonujemy tu interpretacji, wszak Euklides ani nie definiuje działania $nA$, ani twierdzenia V.1–V.6 nie są aksjomatami charakteryzującymi to działanie, ani Euklides nie mówi o współczynnikach liczbowych występujących w multiples, a wreszcie faktem jest, że definicja liczby oraz dodawanie i mnożenie liczb są określone dopiero w Księdze VII.

Gdybyśmy chcieli współczynniki występujące w multiples uznać za liczby, to wydaje się, że miast prostej identyfikacji, związek ten trafniej byłoby ujmować przez analogię do związku, jaki zachodzi między liczbami naturalnymi w teorii i liczbami naturalnymi w metateorii, stąd zapis, który przyjęliśmy w opisie teorii proporcji z Księgi V:

$$nA = \underbrace{A + \cdots + A}_{n-razy}.$$

Tak czy inaczej, identyfikacja, której dokonał Heath winna być uzasadniona. Z punktu widzenia matematyki przemawia za nią poważny argument: tak, jak liczby, tak i współczynniki w multiples charakteryzuje aksjomat indukcji. Nie jest on oczywiście *explicite* sformułowany, ale jest stosowany. Otóż w dowodzie twierdzenia V.8 mamy, że wielkość $D$ jest mniejsza od wielkości $K$ i w odniesieniu do tych wielkości Euklides pisze:

„let $L$ be taken double of $D$, $M$ triple of it, and successive multiples increasing one by one, until what is taken is a multiple of $D$ and the first that is greater than $K$".[66]

Z założenia, wielkości $D$ i $K$ są archimedesowe, a stąd wynika, że dla pewnej liczby $n$ zachodzi $nD > K$. Euklides natomiast przyjmuje takie $n$,

[65][Euklides], V, tw. 1, „Albowiem, skoro $AB$ jest tą samą wielokrotnością $E$ [..]. Niech $AB$ będzie podzielona na wielkości $AG$ i $BG$ równe $E$"; „Ponieważ wielkość $AB$, równie iest wielokrotna wielkości $E$ [...]. Podzielmy $AB$, na części równe $E$, te niech będą $AG$, $GD$" [Czech 1817], s. 141.

[66][Eulides], V, tw. 8, „niech $L$ będzie podwojeniem, $M$ – potrojeniem $D$, a kolejne wielokrotności niech zwiększają się o jeden tak długo, aż otrzymamy taką wielkrotność $D$, która jest większa od $K$"; nie przytaczamy tłumaczenia Czecha, bo występują tam inne oznaczenia literowe, zob. [Czech 1817], s. 153.

które spełnia warunek: $(n+1)D > K \geqslant nD$. Element taki istnieje przy założeniu, że w *dowolnym niepustym podzbiorze współczynników multiples* istnieje element najmniejszy.

Ale nawet przy tej optymistycznej interpretacji pozostaje pewne residuum: aksjomat indukcji charakteryzuje porządek liczb naturalnych, natomiast w *Elementach* o porządku współczynników występujących w multiples nic nie jest powiedziane.

# *Teza* Heatha

Pochodność bytowa. Z tym aspektem przedmiotu intencjonalnego wiąże się prosta, wręcz banalna myśl: przedmiot intencjonalny powstaje i zaczyna istnieć w czasie historycznym. W konsekwencji trzeba jednak przyjąć, że tak jak przed rokiem 1872 nie było rozprawy Dedekinda, tak też przed rokiem 1872 nie było przedmiotu, do którego odwołujemy się – wprost lub pośrednio – mając na uwadze liczby rzeczywiste. Takie ujęcie jest w oczywistej sprzeczności z tym, co znajdujemy w pracach z historii matematyki, czy w okazjonalnych uwagach zamieszczanych w książkach matematycznych, a wypowiadanych zwykle w związku z konstrukcją lub definicją ciała liczb rzeczywistych. Powszechnie bowiem uważa się, że konstrukcję liczb rzeczywistych metodą przekrojów liczb wymiernych jako pierwszy zarysował, przeprowadził, czy też odkrył grecki matematyk Eudoxos z Knidos. Doskonałą ilustracją tej myśli są słowa Johna Conway'a z pierwszych kart jego książki *On Numbers and Games*:

„Dedekind (a przed nim autor piątej księgi [*Elementów* – P.B.] Euklidesa – uważa się, że był to Eudoxos) skonstruował liczby rzeczywiste z liczb wymiernych. Konstrukcja polegała na podziale liczb wymiernych na dwa takie zbiory $L$ i $R$, że żaden element zbioru $L$ nie jest większy od żadnego elementu zbioru $R$, i na ustaleniu, że wtedy, gdy w klasach $L$ i $R$ nie ma elementów skrajnych, to za pomocą 'podziału' $\{L, R\}$ definiowana jest nowa liczba".[67]

Dla przykładu przytoczymy jeszcze dwie inne wypowiedzi tego typu:

„Ciało liczb rzeczywistych było znane już w starożytności (Eudoksos), choć dopiero R. Dedekind w roku 1858 (drukiem w roku 1872) podał pierwszą definicję liczby rzeczywistej – za pomocą przekroju w ciele $\mathcal{Q}$"; [68]

[67] [Conway 2001], s. 3.
[68] [Maurin 1991], t. II, s. 319.

„Ważna możliwość zdefiniowania dowolnych liczb rzeczywistych przez liczby wymierne została odkryta przez greckiego matematyka Eudoksosa, który znalazł metodę wyznaczania, kiedy dwa różne stosunki wyrażające się liczbami rzeczywistymi są równe. [...] W terminologii nowoczesnej ta definicja Eudoksosa opisuje liczbę rzeczywistą dodatnią $r = a/b$ za pomocą zbioru $S$ wszystkich dodatnich stosunków wymiernych $n/m$, dla których $ma > nb$, następująco: $r$ jest większe niż każdy stosunek $n/m$ z $S$ i jest najmniejszą liczbą rzeczywistą większą od wszystkich tych stosunków".[69]

W cytowanych uwagach, jak i w pracach, które dalej przywołujemy, jest respektowany fakt historyczny, że Grecy nie mówili o liczbach rzeczywistych, ale o stosunkach wielkości geometrycznych. W rezultacie, w tezie o związku teorii Eudoxosa z teorią liczb rzeczywistych chodzi o to, że istnieje zależność między teorią proporcji a teorią liczb rzeczywistych. Zupełnie jasno przedstawia to Nicolas Bourbaki:

„to Grekom zawdzięczamy pierwszą, ścisłą i spójną teorię stosunków wielkości, czyli w istocie liczb rzeczywistych".[70]

Związek między teorią proporcji a teorią liczb rzeczywistych ma polegać na tym, że każdemu stosunkowi wielkości można przyporządkować liczbę rzeczywistą, acz powszechnie przyznaje się, że przyporządkowanie takie nie jest bijekcją.[71] Czasami pokazuje się, że na gruncie teorii proporcji można zdefiniować mnożenie,[72] a nawet dodawanie stosunków,[73] co ma chyba sugerować, że Eudoxos mógł znać nie tylko liczby rzeczywiste, ale i ciało liczb rzeczywistych.

Niżej zajmiemy się jedynie tezą, że stosunkowi wielkości można przyporządkować liczbę rzeczywistą. Myśl ta jasno i wyraźnie została przedstawiona już na początku XX wieku przez Thomasa Heatha i dlatego nazwaliśmy ją *tezą* Heatha.

Rozumowanie Heatha można krótko tak przedstawić: Stosunkowi wielkości geometrycznych $x : y$ przyporządkowane są dwa zbiory $A_{x,y}, B_{x,y} \subset \mathbb{Q}_+$. Para $(A_{x,y}, B_{x,y})$ stanowi przekrój zbioru $(\mathbb{Q}_+, <)$ i *definiuje*, czy po prostu jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Na tej podstawie przyjmuje się, że każdemu stosunkowi wielkości geometrycznych można przyporządkować liczbę rzeczywistą.

---

[69] [Birkhoff, Mac Lane 1957], s. 99-100; $a/b$ oznacza tu stosunek $a : b$ odcinków $a$ i $b$. (W miejsce $ma > nb$, w tekście stoi $ma < nb$, co jest oczywistą pomyłką.)

[70] [Bourbaki 1966(b)], s. 406.

[71] Wyjątkiem jest [Stein 1990].

[72] Zob. [Baszmakowa 1975(b)], [Stein 1990].

[73] Zob. [Stein 1990].

Znamienne są tu dwa momenty: (1) definicja zbiorów $A_{x,y}, B_{x,y}$, (2) założenie, że para $(A_{x,y}, B_{x,y})$ jest przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}_+, <)$.

Zbiory $A_{x,y}, B_{x,y}$ mogą być definiowane na dwa sposoby: albo na gruncie *Elementów*, albo na gruncie czysto matematycznym bez odwołania do teorii proporcji Eudoxosa. W związku z tym wyróżniamy dwie wersje *tezy* Heatha: historyczną i matematyczną. Ich wspólnym założeniem jest to, że para $(A_{x,y}, B_{x,y})$ stanowi przekrój zbioru $(\mathbb{Q}_+, <)$. Wskazując odpowiedni kontrprzykład pokażemy, że z założeń przyjmowanych o strukturze $\mathfrak{M}$ bynajmniej to nie wynika. Ostatecznie pokażemy więc, że *teza* Heatha tak w wersji historycznej, jak i matematycznej jest błędna.

W tej części przyjmujemy, że w strukturze $\mathfrak{M}$ spełniony jest aksjomat Archimedesa. Tylko ten jeden aksjomat jest *explicite* podany przez Euklidesa i tylko ten jeden aksjomat jest *explicite* zakładany w opracowaniach, w których szkicowana lub dowodzona jest *teza* Heatha. Definicję proporcji V.5. przyjmujemy w wersji (3).

## Komentarz Heatha do definicji V.5, 1908

*Elementy* w opracowaniu Heiberga na język angielski jako pierwszy przełożył Sir Thomas Heath. Pierwsze wydanie tego tłumaczenia miało miejsce w roku 1908, drugie (zmienione i poprawione) – w 1926. W roku 1956 wydawnictwo Dover Publications na mocy porozumienia z dotychczasowym wydawcą Cambridge University Press wznowiło drugie wydanie i od tego czasu książka jest wydawana w sposób ciągły, jako reprint.[74]

Obok samego tłumaczenia edycja Heatha zawiera mnóstwo objaśnień i komentarzy o charakterze filologicznym, historycznym i matematycznym; to monumentalne i wybitne dzieło.

**7.** Definicję proporcji z Księgi V Heath opatrzył takim komentarzem:

„Jest oczywiste, że istnieje ścisła odpowiedniość, niemal zgodność, między Euklidesa definicją równych stosunków i współczesną teorią liczb niewymiernych pochodzącą od Dedekinda. Zakładając, że liczby naturalne są uporządkowane rosnąco, rozszerzając następnie dziedzinę liczb tak, by zawierała (1) zarówno liczby ujemne, jak i dodatnie, (2) ułamki $a/b$, gdzie $a, b$ są liczbami naturalnymi, pod warunkiem, że $b$ jest różne od zera, porządkując ułamki wraz z innymi liczbami na podstawie definicji:

$$\frac{a}{b} <=> \frac{c}{d} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad ad <=> cd,$$

[74] Zob. [Heath 1956].

Dedekind podaje następującą definicję liczby niewymiernej".[75]

Na czym polega „zgodność definicji równych stosunków z teorią liczb niewymiernych"?

7.1. Rozumowanie Heatha jest następujące. Rozważmy dwa przypadki: (1) „niewymierny" i (2) „wymierny".

Ad (1). „Niech $x/y$ i $x'/y'$ będą równymi stosunkami w sensie Euklidesa. Wówczas $\frac{x}{y}$ podzieli wszystkie liczby wymierne na dwa zbiory $A$ i $B$; $\frac{x'}{y'}$ podzieli wszystkie liczby wymierne na dwa zbiory $A'$ i $B'$";[76]

$$\frac{x}{y} \mapsto (A, B), \quad \text{gdzie} \quad A = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{a}{b} < \frac{x}{y} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{a}{b} > \frac{x}{y} \right\},$$

i analogicznie w przypadku $\frac{x'}{y'} \mapsto (A', B')$.

Pary $(A, B)$ i $(A', B')$ są równe, mianowicie:

„Niech $\frac{a}{b}$ będzie taką liczbą wymierną z $A$, że $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$. To znaczy, że $ay < bx$. Lecz wówczas, na podstawie definicji Euklidesa zachodzi także $ay' < bx'$. Stąd zaś dostajemy $\frac{a}{b} < \frac{x'}{y'}$; dlatego każdy element $A$ jest także elementem $A'$. [...] Tak więc, innymi słowy, $A$ i $B$ są odpowiednio równe $A'$ i $B'$; dlatego $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$, zarówno według Dedekinda, jak i według Euklidesa".[77]

Równość $A = A'$ zachodzi na mocy implikacji:

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} \to ay < bx \leftrightarrow ay' < bx' \to \frac{a}{b} < \frac{x'}{y'}, \tag{1}$$

$$\frac{a}{b} < \frac{x'}{y'} \to ay' < bx' \leftrightarrow ay < bx \to \frac{a}{b} < \frac{x}{y}. \tag{2}$$

Podobnie jest z równością $B = B'$, *ergo* $(A, B) = (A', B')$.

Ad (2). „Gdy $x/y$, $x'/y'$ są wymierne, to jeden ze zbiorów, powiedzmy $A$, zawiera $x/y$, oraz jeden ze zbiorów, powiedzmy $A'$, zawiera $x'/y'$. Wówczas $\frac{a}{b}$ może być równe $\frac{x}{y}$, tj. $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, co znaczy, że $ay = bx$. Dlatego, na podstawie definicji Euklidesa, $ay' = bx'$; czyli $\frac{a}{b} = \frac{x'}{y'}$. Tym sposobem zbiory znów są równe";[78]

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \leftrightarrow ay = bx \leftrightarrow ay' = bx' \leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x'}{y'}. \tag{3}$$

[75] [Heath 1956], t. II, s. 124–125.
[76] [Heath 1956], t. II, s. 125.
[77] [Heath 1956], t. II, s. 125.
[78] [Heath 1956], t. II, s. 125–126.

Ostatecznie, w przypadku „niewymiernym" i „wymiernym" zachodzi, że

„definicja Euklidesa wyznacza w zbiorze wszystkich liczb wymiernych równe przekroje i dlatego definiuje równe stosunki, w sposób, który dokładnie odpowiada teorii Dedekinda";[79]

$$(A, B) = (A', B') \leftrightarrow x : y = x' : y'.$$

7.2. Komentarz Heatha odnosi się, z jednej strony, oczywiście do *Elementów*, z drugiej – do rozprawy *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*

W przejściach (1)–(3) równoważności

$$ay < bx \leftrightarrow ay' < bx', \quad ay = bx \leftrightarrow ay' = bx'$$

oparte są na definicji V.5, natomiast implikacje i równoważności

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} \rightarrow ay < bx, \qquad ay < bx \rightarrow \frac{x}{y} < \frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b} < \frac{x'}{y'} \rightarrow ay' < bx', \quad ay' < bx' \rightarrow \frac{x'}{y'} < \frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \leftrightarrow ay = bx, \quad ay' = bx' \leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x'}{y'},$$

to założenia pochodzące od Heatha.

W związku z *Elementami* rozumowanie Heatha oparte jest więc na dwóch założeniach:

$$m : n = x : y \leftrightarrow my = nx, \tag{4}$$

$$m : n < x : y \leftrightarrow my < nx, \tag{5}$$

gdzie w (4) $x, y$ są wielkościami współmiernymi (stosunek $x : y$ jest „wymierny"), w (5) – niewspółmiernymi (stosunek $x : y$ jest „niewymierny"). Dodajmy, że stosunek wielkości $x : y$ Heath oznacza za pomocą kreski ułamkowej $\frac{x}{y}$, natomiast ułamek $\frac{m}{n}$ przedstawiliśmy we wzorach (4), (5) jako stosunek liczb $m : n$. Będzie to wyjaśnione niżej w punkcie 9.

W odniesieniu do *Stetigkeit* rozumowanie Heatha polega na przypisaniu Dedekindowi definicji

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \leftrightarrow_{df} mq < np, \quad \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \leftrightarrow_{df} mq = np, \quad \frac{m}{n} > \frac{p}{q} \leftrightarrow_{df} mq > np, \tag{6}$$

oraz na pomyśle, aby z przekrojem osi liczb wymiernych $(\mathbb{Q}_+, <)$ wiązać, czy też utożsamiać liczbę rzeczywistą.

[79] [Heath 1956], t. II, s. 126.

*Teza* Heatha. I

**8.** Niech zachodzą równoważności (4) i (5) oraz $x, y, x', y' \in \mathfrak{M} = (M, +, <)$; gdy znak proporcji zastąpimy znakiem równości, wtedy definicja V.5 przyjmie postać:

$$x : y = x' : y' \leftrightarrow_{df} \forall m, n$$

$$\left(\frac{x}{y} > \frac{m}{n} \leftrightarrow \frac{x'}{y'} > \frac{m}{n}\right) \wedge \left(\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \leftrightarrow \frac{x'}{y'} = \frac{m}{n}\right) \wedge \left(\frac{x}{y} < \frac{m}{n} \leftrightarrow \frac{x'}{y'} < \frac{m}{n}\right).$$

Równość stosunków można teraz interpretować jako równości zbiorów:

$$\left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{m}{n} < \frac{x}{y}\right\} = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{p}{q} < \frac{x'}{y'}\right\},$$

$$\left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{m}{n} = \frac{x}{y}\right\} = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{p}{q} = \frac{x'}{y'}\right\},$$

$$\left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{m}{n} > \frac{x}{y}\right\} = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{p}{q} > \frac{x'}{y'}\right\}.$$

Na tej podstawie stosunkowi $x : y$ odpowiada para zbiorów $(A_{x,y}, B_{x,y})$,

$$x : y \mapsto (A_{x,y}, B_{x,y}), \tag{$H_1$}$$

gdzie $\quad A_{x,y} = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{m}{n} < \frac{x}{y}\right\}, \quad B_{x,y} = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{p}{q} \geqslant \frac{x}{y}\right\},$

lub, przyjmując w miejsce $\frac{m}{n}$ parę $(m, n)$, a w miejsce $\frac{m}{n} < \frac{x}{y}$ i $\frac{p}{q} \geqslant \frac{x}{y}$, *via* równoważności (4) i (5), nierówności $my < nx$ oraz $py \geqslant qx$:

$$A_{x,y} = \{(m, n) : my < nx\}, \quad B_{x,y} = \{(p, q) : py \geqslant qx\}. \tag{7}$$

Zakładając, że każda para $(A_{x,y}, B_{x,y})$ jest przekrojem osi liczb wymiernych $(\mathbb{Q}_+, <)$, tj.:

$$\forall x, y \in M \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}[((m, n) \in A_{x,y},\ (p, q) \in B_{x,y}) \rightarrow mq < np], \tag{C}$$

dostajemy, że odwzorowanie $(H_1)$ stosunkowi $x : y$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą.

Tezę, że każdej parze wielkości geometrycznych $(x, y)$ można przyporządkować liczbę rzeczywistą $(A_{x,y}, B_{x,y})$ nazywam *tezą* Heatha. Jest ona

powtarzana, acz w różnych wariantach, przez cały wiek XX.[80] Heath bynajmniej nie ogłosił jej jako pierwszy,[81] ale ze względu na zasięg jego edycji *Elementów* znacząco przyczynił się do jej rozpowszechnienia.

W związku z *tezą* Heatha dowodzi się też, że stosunkom „równym w sensie Euklidesa" odpowiadają równe liczby rzeczywiste, a „różnym" stosunkom – różne liczby rzeczywiste. Te aspekty pomijamy i nie będziemy się nimi zajmować.

8.1. *Teza* Heatha związana jest z definicją zbiorów $A_{x,y}$, $B_{x,y}$, to zaś prowadzi do jej dwojakiego rozumienia. Definicja zbiorów $A_{x,y}$, $B_{x,y}$ może być uzasadniona albo na gruncie *Elementów*, i tak jest w komentarzu Heatha, albo w oderwaniu od kontekstu historycznego, na gruncie czysto matematycznym, i tak jest w cytowanym wyżej fragmencie z *Przeglądu algebry współczesnej*:

„W terminologii nowoczesnej ta definicja Eudoxosa ...".[82]

Otóż formuły $my = nx$ i $my < nx$ mogą być traktowane albo jako formuły teorii proporcji, albo jako formuły teorii opisującej strukturę $\mathfrak{M}$. W pierwszym przypadku mówimy o *tezie* Heatha w wersji historycznej, w drugim – o *tezie* Heatha w wersji matematycznej. Tę pierwszą zapisujemy jak następuje:

każdemu stosunkowi wielkości geometrycznych $x : y$, *via* odwzorowanie $(H_1)$, odpowiada liczba rzeczywista $(A_{x,y}, B_{x,y})$.

Ocena założeń *tezy* Heatha w wersji historycznej

**9.** Rozumowanie Heatha jest błędne zarówno w tej części, w której odnosi się do *Elementów*, jak i w tej, w której odnosi się do *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

[80] Zob. [Baron 1969], s. 27, [Baszmakowa 1975(a)], s. 107, [Baszmakowa 1975(b)], s. 121, [Birkhoff, Mac Lane 1957], s. 99–100, [Boyer 1949], s. 55, [Claphan, Nicholson 2005], s. 157, [Conway 2001], s. 3, [Dummett 1991], s. 283, [Edwards 1979], s. 14, [Hartshorne 2000], s. 166–167, [Kordos 1994], s. 69, [Kostin 1954], s. 28, [Kulczycki 1973], s. 196, [Mainzer 1995(b)], s. 34, [Mioduszewski 1996], s. 69, [Maurin 1991], t. II, s. 316, [Nikolić 1974], s. 230, [Russo 1998], s. 208, [Struik 1960], s. 31, [Weyl 1949], s. 39, [Więsław 1997], s. 38, [Wygodski 1956], s. 78–79.

[81] O związku między definicją V.5, a teorią liczb rzeczywistych Dedekinda pisał już Otto Hölder w artykule *Die Axiome der Quantität und die Lehre von Mass* (1901). Podajemy za [Dummett 1991], s. 281–283; zob. także rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 11.

[82] Zob. [Birkhoff, Mac Lane 1957], s. 99.

W związku ze *Stetigkeit* rozumowanie Heatha jest błędne w oczywisty sposób: w rozprawie Dedekinda nie ma definicji (6). Dalej pokażemy, że definicje te zostały podane dopiero w roku 1895 przez Heinricha Webera.[83]

W związku z *Elementami* jest ono oparte na równoważnościach (4) i (5). Nie są to ani twierdzenia, ani definicje Euklidesa, z kolei Heath ich też nie dowodzi. Pokażemy, że równoważności tych nie da się uzasadnić na gruncie *Elementów*. Przedstawione niżej argumenty można tak streścić: W komentarzu Heatha wyrażenie $\frac{m}{n}$ występuje raz jako liczba wymierna, raz jako stosunek liczb $m : n$. Ta dwuznaczność rzutuje na całe rozumowanie. W równoważności (4) równość $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$ ma być równością stosunków $m : n :: x : y$. Ale, po pierwsze, stosunki liczb nie mogą być uznane za liczby wymierne, po drugie, stosunki liczb są porównywane na podstawie definicji VII.20 w ramach odrębnej teorii proporcji i nie wiadomo na gruncie jakiej teorii mają być porównywane stosunki liczb ze stosunkami wielkości geometrycznych. Wyrażenie $\frac{m}{n} < \frac{x}{y}$ występujące w równoważności (5) jest rozumiane jako nierówność stosunków $m : n < x : y$. Ale, po pierwsze, w *Elementach* stosunki liczb w ogóle nie są porównywane ze stosunkami wielkości geometrycznych w sensie relacji mniejszy–większy, po drugie, nawet jeśli stosunki liczb potraktować jako stosunki wielkości geometrycznych, to winny być one porównywane z $x : y$ na podstawie definicji V.7, a nie równoważności (5).

9.1 W *Elementach* rozwinięte są dwie teorie proporcji: teoria proporcji wielkości geometrycznych (Księga V) i teoria proporcji liczb (Księga VII). Teorie te *spotykają* się w Księdze X, w twierdzeniach X.5 i X.6:

„Commensurable magnitudes have to one another the ratio which a number has to a number";[84]

„If two magnitudes have to one another the ratio which a number has to a number, the magnitudes will be commensurable".[85]

Twierdzenia te można razem zapisać jako równoważność:

$$x : y = m : n \leftrightarrow \text{wielkości } x, y \text{ są współmierne.} \tag{8}$$

Osobnym pytaniem – tylko go tu sygnalizujemy – jest to, na gruncie której definicji jest ustanawiana ta proporcja. Wystarczy prześledzić dowody,

[83] Zob. niżej pkt. 14.

[84] [Euklides], X, tw. 5, „Wielkości współmierne są do siebie w takim stosunku, jak liczba do liczby".

[85] [Euklides], X, tw. 6, „Gdy dwie wielkości są do siebie w takim stosunku, jak liczba do liczby, to wielkości te są współmierne".

aby zauważyć, że Euklides powołuje się zarówno na twierdzenia Księgi V, jak i Księgi VII.

W twierdzeniu X.5. stosunki liczb są porównywane ze stosunkami wielkości geometrycznych. Nie są to jednak dowolne wielkości, ale wielkości współmierne (commensurable). Pojęcie współmierności jest wprowadzone definicją X.1:

„Those magnitudes are said to be commensurable which are measured by the same measure";

$$\exists C \in \mathfrak{M} \exists p, q[x = pC,\ y = qC], \qquad \text{gdzie} \quad x, y \in \mathfrak{M}.$$

Druga część definicji X.1. to definicja wielkości niewspółmiernych (incommensurable magnitudes):

„and those incommensurable which cannot have any common measure".[86]

9.2. Równoważność (4) ma odpowiadać przypadkowi, gdzie „$x/y$, $x'/y'$ happen to be *rational*", ale nie chodzi tu o wymierność w rozumieniu Euklidesa. Pojęcie „odcinek wymierny" (rational straight line) wprowadza Euklides definicją X.3:

„With these hypotheses, it is proved that there exist straight lines infinite in multitude which are commensurable and incommensurable respectively, some in length only, and others in square also, with an assigned straight line. Let then the assigned straight line be called rational, and those straight lines which are commensurable with it, whether in length or in square only, rational, but those which are incommensurable with it irrational".[87]

Pojęcie odcinka wymiernego wiąże się z wyróżnieniem pewnego odcinka $a$ (the assigned straight line), w stosunku do którego dany odcinek $b$ może być rational in length, tj. $a$ i $b$ są współmierne w myśl definicji X.1, lub rational in square, tj. kwadraty zbudowane na odcinkach $a$ i $b$ są współmierne w myśl definicji X.1.

[86] [Euklides], X, def. 1, „Współmiernymi nazywamy te wielkości, które są mierzone wspólną miarą, a niewspółmiernymi te, które nie mogą mieć żadnej wspólnej miary".

[87] [Euklides], X, def. 3, „Przy tym założeniu pokazuje się, że istnieje nieskończenie wiele linii prostych, które są współmierne, i odpowiednio niewspółmierne, z pewną ustaloną linią, jedne tylko co do długości, inne także co do kwadratu. Tę ustaloną linię nazwijmy wymierną, a linie proste, które są z nią współmierne, czy to, co do długości, czy tylko co do kwadratu wymiernymi, te zaś, które są z nią niewspółmierne – niewymiernymi". Zob. także: „Straight lines are commensurable in square when the squares on them are measured by the same area, and incommensurable in square when the squares on them cannot possibly have any area as a common measure" [Euklides], X, def. 2.

Tak więc przypadek, w którym stosunki $x : y$ i $x' : y'$ są „wymierne" należy rozumieć tak, że $x, y$ i $x', y'$ są parami wielkości współmiernych.

9.3. Aby na podstawie (8) udowodnić (4) należałoby pokazać, że zachodzi:

$$\text{wielkości } x, y \text{ są współmierne} \leftrightarrow nx = my.$$

Gdy $x, y$ są współmierne, to dla pewnego $C$ oraz pewnych $p, q$ zachodzi $x = pC$, $y = qC$, a wtedy $qx = py$. Ale jak na gruncie *Elementów* wykazać implikację odwrotną

$$qx = py \rightarrow \exists C \exists m, n[x = mC,\ y = nC]\ ? \tag{9}$$

Implikację (9) można uzasadnić w przypadku, gdy $x$ i $y$ są odcinkami: *via* twierdzenia VI.2[88] i VI.9,[89] przyjmując $C = \frac{x}{p}$ dostajemy $x = pC$, $y = qC$. Ale nawet w tym szczególnym przypadku równoważność (4) byłaby twierdzeniem, które można udowodnić na gruncie teorii proporcji i aksjomatów geometrii. Jest bowiem tak, że w dowodzie twierdzeń VI.2, VI.9 wykorzystywany jest postulat o prostych równoległych.

Reasumując: równoważność (4) można uzasadnić na gruncie *Elementów*, ale po pierwsze, tylko w przypadku odcinków, a nie dowolnych wielkości geometrycznych, po drugie, na podstawie dodatkowych innych założeń niż tylko aksjomat Archimedesa.

**10.** O równoważności (5). Zacznijmy od zidentyfikowania nierówności występujących w wyrażeniu

$$\frac{m}{n} < \frac{x}{y} \leftrightarrow my < nx.$$

Z jednej stony mamy tu nierówność wielkości: $my <_1 nx$, gdzie $x, y \in \mathfrak{M}_1 = (M_1, +, <_1)$. Drugą nierówność można natomiast rozumieć tylko jako nierówność stosunków w myśl definicji V.7:

$$\frac{m}{n} \prec \frac{x}{y}. \tag{10}$$

Nierówność (10) jest bezpodstawna, po pierwsze dlatego, że w *Elementach* stosunki wielkości geometrycznych nie są porównywane ze stosunkami

[88] Zob. „If a straight line be drawn parallel to one of the sides of a triangle, it will cut the sides of the triangle proportionally; and, if the sides of the triangle be cut proportionally, the line joining the points of section will be parallel to the remaining side of the triangle" [Euklides], VI, tw. 2.

[89] Zob. „From a given straight line to cut off a prescribed part" [Euklides], VI, tw. 9.

liczb w sensie relacji $\prec$. Po drugie, nawet gdy przyjąć, że stosunek $x : y$ jest porównywany ze stosunkiem $m : n$ na podstawie definicji V.7, to zamiast

$$\frac{m}{n} \prec \frac{x}{y} \leftrightarrow my <_1 nx,$$

powinno być:

$$\frac{m}{n} \prec \frac{x}{y} \leftrightarrow \exists p, q[qx >_1 py,\ np \geqslant mq],$$

gdzie $x, y \in \mathfrak{M}_1$, $m, n \in \mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, <)$.[90]

Po trzecie, w Księdze V przyjęte są, co prawda *implicite*, dwa założenia o strukturze wielkości, które nie odnoszą się do struktury $\mathfrak{N}$, mianowicie aksjomaty (E4) i (E5). Euklides wyraźnie stawia pytanie o istnienie czwartej proporcjonalnej w odniesieniu do struktury $\mathfrak{N}$ i odpowiedź jest negatywna: nie dla każdej trójki $n, m, p$ istnieje takie $q$, że $n : m :: p : q$ w sensie definicji VII.20.[91]

Reasumując: nie znajdujemy w *Elementach* podstaw do uzasadnienia równoważności (5).

## *Teza* Heatha. II

**11.** Pokażemy teraz, że zbiory $A_{x,y}$, $B_{x,y}$ mogą być zdefiniowane inaczej niż to zrobił Heath. Niech $x, y, x', y' \in \mathfrak{M} = (M, +, <)$. Przyjmijmy na mocy definicji:

$$A_{x,y} = \{(m, n) : my < nx\}, \quad B_{x,y} = \{(p, q) : py \geqslant qx\}. \tag{11}$$

W rozumowaniu Heatha formuły $my < nx$, $my = nx$, na mocy równoważności (4) i (5), mają należeć do teorii proporcji i właśnie to zostało przez nas zakwestionowane. W definicji (11), w odróżnieniu od (7), formuły te należą do teorii opisującej strukturę $\mathfrak{M}$. W miejsce tajemniczego $x : y$ przyjmuje się teraz parę uporządkowaną $(x, y)$, w miejsce $m : n$ – parę $(m, n)$. Aksjomat Archimedsa jest przyjmowany nie dlatego, że tak jest w *Elementach*, ale po to, aby wykluczyć ewentualność, że któryś ze zbiorów $A_{x,y}$, $B_{x,y}$ jest pusty; aksjomat o prostych równoległych w ogóle nie ma tu zastosowania. Pozostaje tylko pytanie: jaki jest związek definicji (11) z teorią proporcji Eudoxosa?

Otóż zapiszmy definicję V.5 podobnie, jak w punkcie 8:

[90] Przyjmując $p = m$, $q = n$, dostajemy $\frac{m}{n} \prec \frac{x}{y} \leftrightarrow (my <_1 nx \wedge nm \geqslant mn)$, co znaczy, że równoważność (5) jest szczególną interpretacją definicji V.7.

[91] Zob. [Euklides], IX, tw. 19.

$$(x,y)=(x',y') \leftrightarrow_{df} \forall m,n$$

$$(nx>my \leftrightarrow nx'>my') \wedge (nx=my \leftrightarrow nx'=my') \wedge (nx<my \leftrightarrow nx'<my').$$

Równość $(x,y)=(x',y')$ można teraz interpretować jako równości zbiorów:

$$\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 : my<nx\}=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 : my'<nx'\},$$

$$\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 : my=nx\}=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 : my'=nx'\},$$

$$\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 : my>nx\}=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 : my'>nx'\}.$$

Parze $(x,y)$ przyporządkujmy parę $(A_{x,y},B_{x,y})$,

$$(x,y)\mapsto(A_{x,y},B_{x,y}). \tag{$H_2$}$$

Zakładając, że każda para $(A_{x,y},B_{x,y})$ jest przekrojem osi liczb wymiernych $(\mathbb{Q}_+,<)$, tj.:

$$\forall x,y\in M\forall m,n,p,q\in\mathbb{N}[((m,n)\in A_{x,y},\ (p,q)\in B_{x,y})\rightarrow mq<np], \tag{C}$$

dostajemy *tezą* Heatha w wersji matematycznej:

każdej parze wielkości geometrycznych $(x,y)$, *via* odwzorowanie $(H_2)$, odpowiada liczba rzeczywista $(A_{x,y},B_{x,y})$.

*Kontrprzykład*

**12.** *Teza* Heatha jest zazwyczaj jedynie formułowana, ale czasami jest też dowodzona; dowody zwykle są tylko szkicowane, ale zdarzają się też i szczegółowe uzasadnienia.[92] Milczącym założeniem *tezy* Heatha w obydwu wersjach – historycznej i matematycznej – założeniem, którego żaden z podanych w przypisie 76. autorów nie sprawdził jest domniemanie, iż para zbiorów $(A_{x,y},B_{x,y})$ zdefiniowana równaniami (7), lub (11) jest istotnie przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}_+,<)$,[93] tj. że zachodzi warunek:

$$\forall x,y\in M\forall m,n,p,q[((m,n)\in A_{x,y},\ (p,q)\in B_{x,y})\rightarrow mq<np], \tag{C}$$

lub inaczej

$$\forall x,y\in M\forall m,n,p,q[(my<nx,\ qx<py)\rightarrow mq<np].$$

[92] Zob. [Nikolić 1974], [Mioduszewski 1996], s. 63–69.

[93] W [Mioduszewski 1996] warunek ten jest owszem sprawdzany, ale (1) przy milczącym założeniu, że w strukturze $\mathfrak{M}$ dodawanie jest zgodne z porządkiem, (2) przyjęte są, najwyraźniej nieświadomie, definicje z teorii proporcji Webera, a nie Eudoxosa.

Wskażemy teraz taką strukturę $\mathfrak{M} = (M, +, <)$, gdzie dodawanie jest działaniem wewnętrznym, łącznym i przemiennym, porządek jest liniowy, w której spełniony jest aksjomat Archimedesa i nie zachodzi warunek (C), tj.:

$$\exists x, y \in M \exists m, n, p, q \in N[my < nx \wedge qx < py \wedge mq \geqslant np]. \qquad (\neg C)$$

12.1. Niech $\xi$ będzie liczbą niewymierną z przedziału $[0, 1]$, to jest $\xi \in IQ \cap [0, 1]$. Definiujemy ciąg $\{\xi_n\}$ jak następuje: $\xi_n = n\xi - E(n\xi)$, gdzie $E(x)$ oznacza część całkowitą liczby $x$. Niech $I$ będzie przedziałem zawartym w $[0, 1]$, niech $|I|$ oznacza długość przedziału $I$, zaś $n(I)$ – moc zbioru $\{i \leqslant n : \xi_i \in I\}$. Pokazuje się, że zachodzi:

Twierdzenie (o ekwipartycji). Dla dowolnego przedziału $I \subset [0, 1]$ jest

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(I)}{n} = |I| \ .^{94}$$

Dla naszych celów wystarczy skromny wniosek z tego twierdzenia: dla dowolnego przedziału $I \subset [0, 1]$, istnieje takie $n$, że $\xi_n \in I$.

Jest oczywiście tak, że $\xi_n \in IQ \cap [0, 1]$. Przyjmując w twierdzeniu o ekwipartycji za $\xi$ liczbę $\xi_n$ dostajemy, że dla dowolnego przedziału $I \subset [0, 1]$, istnieje takie $m$, że $m\xi_n - E(m\xi_n) = (\xi_n)_m = \xi_{nm} \in I$.

12.2. Przyjmijmy $\mathfrak{M}_\xi = (M_\xi, +, <)$, gdzie $M_\xi = \{\xi_n\}$. Elementy zbioru $M_\xi$ dodajemy *mod* 1, a porządek w $M_\xi$ pokrywa się z porządkiem osi liczb rzeczywistych. Fakt, że w $\mathfrak{M}_\xi$ spełniony jest aksjomat Archimedesa otrzymujemy jak następuje: gdy dla pewnych $n, m$ jest $\xi_n < \xi_m$, to dla pewnego $k$, na podstawie twierdzenia o ekwipartycji, jest $k\xi_n = \xi_{kn} \in (\xi_m, 1)$, co oznacza, że $k\xi_n > \xi_m$.

Przyjmijmy $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Niech $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$. Oczywiście $x, y \in M_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Można sprawdzić, że zachodzi

$$3y < 5x \wedge 3x < y \wedge 3 \cdot 3 > 5 \cdot 1,$$

co daje zaprzeczenie warunku (C).

Można pokazać, że w strukturze $\mathfrak{M}_\xi$ porządek nie jest zgodny z dodawaniem i na tym w zasadzie polega istota przedstawionego kontrprzykładu.

[94] [Niven 1956], s. 71–75. Twierdzenie o ekwipartycji w ogólniejszej postaci jest dowodzone w [Narkiewicz 1977], rozdz. VIII.

Dedekind o założeniach Księgi V *Elementów*

**13.** W jednym z listów Dedekinda do Rudolfa Lipschitza czytamy o założeniach, jakie należy przyjąć o strukturze $\mathfrak{M}$ w związku z definicją V.5:

„Aby ta definicja miała w ogóle jakikolwiek sens, to o rzeczach zwanych tu wielkościami trzeba założyć tylko, że: (1) z dwóch różnych wielkości tego samego rodzaju jedna zawsze może być uznana za większą, a druga za mniejszą, (2) jeżeli $A$ jest wielkością, to istnieje zawsze obiekt $nA$ tego samego rodzaju co $A$, który jest wielokrotnością $A$ odpowiadającą liczbie $n$. W dziele Euklidesa poza milcząco przyjętymi założeniami oraz poza założeniami zawartymi w Pańskich łacińskich słowach [chodzi o definicję V.4 – P.B.] nie znajdujemy nic na temat rozciągłości ”.[95]

Warunek (1) oznacza liniowość porządku, warunek (2) oznacza, że

$$\alpha \in M \mapsto n\alpha \in M.$$

Warunek (2) to oczywiście mniej niż wewnętrzność dodawania, dlatego przy założeniach przyjmowanych przez Dedekinda nie można udowodnić *tezy* Heatha.

[95] [Dedekind 1932], s. 150–151.

# Heinrich Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 1895

We *Wprowadzeniu* do *Lehrbuch der Algebra* (1895) Heinrich Weber podaje zupełnie oryginalną konstrukcję ciała liczb rzeczywistych. Generalny zamysł polega na tym, aby definicja liczby rzeczywistej była oparta na definicji stosunku. Przedłożona konstrukcja nawiązuje z jednej strony do *Elementów*, z drugiej do *Stetigkeit und irrationale Zahlen. Novum* w stosunku do teorii Eudoxosa polega na tym, że w jednej definicji powiązane zostały stosunki liczb ze stosunkami wielkości geometrycznych. Ponadto Weber wprost sformułował aksjomaty charakteryzujące związek dodawania z porządkiem „wielkości". Zakładając, że porządek „wielkości" jest ciągły w sensie Dedekinda, udowodnił twierdzenie o istnieniu czwartej proporcjonalnej i na tej podstawie zdefiniował mnożenie oraz dodawanie stosunków.

W rozprawie Webera znajdujemy definicję porządku ułamków, którą Heath przypisał Dedekindowi, natomiast równoważności (4) i (5), stanowiące założenia *tezy* Heatha w wersji historycznej, w teorii Webera zachodzą *ex definitione*.

Nie będziemy dociekać, czy Heath znał Webera teorię proporcji i nie zauważył różnic między nią a teorią Eudoxosa. Przy pobieżnej lekturze istotnie nie trudno tu o pomyłkę. Konstruując na gruncie teorii proporcji ciało liczb rzeczywistych Weber podaje (zwykle bez dowodów) twierdzenia, które w zapisie algebraicznym są takie, jak odpowiednie twierdzenia Księgi V *Elementów*, a i sama definicja proporcji, jeśli tylko zapisać ją algebraicznie, jest taka, jak u Euklidesa.

W teorii proporcji rozwiniętej przez Webera można udowodnić *tezę* Heatha, w istocie wynika ona z przechodniości porządku stosunków. Ale Weber w żadnym miejscu nie sugeruje, że ustanawia jakiś związek między *Stetigkeit und irrationale Zahlen* a Księgą V *Elementów* i wyraźnie wskazuje na zależność przedkładanej konstrukcji od *Elementów* i *Stetigkeit*.

**14.** Ułamki i ich porządek.[96]

„W rozważaniach naszych przyjmujemy jako wiadome: liczby naturalne $1, 2, 3, \ldots$ oraz prawidła działań na liczbach. Temi podstawowemi [...] są dodawanie, mnożenie wraz z potęgowaniem".[97]

„Mnogość nazywa się uporządkowaną, gdy z dwóch różnych jej elementów zawsze jeden w zupełności oznaczony poczytujemy za większy w tem znaczeniu, że ze związków $a > b$ i $b > c$ wynika zawsze $a > c$".[98]

„Mnogość uporządkowaną, mającą tę własność, że pomiędzy każdemi dwoma jej elementami można znaleźć inne, nazywa się gęstą. Mnogość gęstą można utworzyć, zbierając liczby naturalne w pary i uważając te pary jako elementy mnogości. Te pary nazywać będziemy ułamkami i oznaczać przez $m : n$ lub $\frac{m}{n}$. Dwa takie ułamki $m : n$ i $m' : n'$ będziemy uważali za równe, jeżeli $m \cdot n' = n \cdot m'$. Jeżeli wszystkie równe sobie ułamki ujmiemy jako element, otrzymamy mnogość, która będzie uporządkowana, jeżeli jeszcze ustalimy, że $m : n$ ma być większe niż $m' : n'$, gdy $m \cdot n' > n \cdot m'$. Że ta mnogość jest gęsta przekonać się łatwo";[99]

$$m : n \equiv p : q \leftrightarrow_{df} mq = np, \tag{12}$$

$$m : n \succ p : q \leftrightarrow_{df} mq > np. \tag{13}$$

14.1. Po pierwsze, definicję (12) odnajdujemy w *Elementach* jako twierdzenie VII.18.[100] Weber *znosi* pytanie, czym jest stosunek $m : n$ i zauważa, że wystarczy rozważać pary liczb $(m, n)$, $(p, q)$; istotna okazuje się nie definicja stosunku, ale definicja relacji między parami.

Po drugie, porównajmy pary $(m, n)$ i $(p, q)$ na podstawie definicji V.7:[101]

$$m : n \succ p : q \leftrightarrow \exists k, l[lm > kn,\ kq \geqslant lp],$$

gdzie $m, n, k, l, p, q \in \mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, <)$. Gdy w miejsce pewnych $k,\ l$ przyjmiemy $p,\ q$, to otrzymamy:

$$m : n \succ p : q \leftrightarrow (qm > pn,\ pq \geqslant qp),$$

[96] Konstrukcja ułamków przedłożona przez Webera funkcjonuje we współczesnej matematyce jako konstrukcja ciała ułamków pierścienia całkowitego; zob. np. [Białynicki-Birula 1971], rozdz. VIII.

[97] [Weber 1925], s. 1.

[98] [Weber 1925], s. 4.

[99] [Weber 1925], s. 4–5.

[100] Zob. wyżej pkt. 3.

[101] Zob. wyżej pkt. 5.1.

lub krótko

$$m : n \succ p : q \leftrightarrow_{df} qm > pn.$$

14.2. Tak więc „mnogość uporządkowana ułamków" to zbiór $(\mathbb{Q}_+, <)$; uwzględniając jednak symbole stosowane przez Webera będziemy ją oznaczać jako $(\mathbf{R}, <_r)$.

„Że ta mnogość jest gęsta, przekonać się łatwo".[102]

Fakt ten – co ciekawe – jest dowodzony. Gdy $\mu = m : n$, $\mu' = m' : n'$ oraz $\mu' <_r \mu$, to

„Można zawsze obrać liczbę $h$ tak, że pomiędzy liczbami $hmn'$ i $hm'n$ będą jeszcze liczby; jeżeli $p$ jest taką liczbą, to $p : hnn'$ znajduje się pomiędzy liczbami $\mu$ i $\mu'$".[103]

**15.** Ciągłość. Czytamy:

„Jeżeli każdy przekrój w mnogości gęstej zostaje wytworzony przez oznaczony element $\mu$, mnogość nazywa się ciągłą. Przykład mnogości gęstej przedstawiają ułamki wymierne. Mnogość ta, którą oznaczać będziemy przez **R**, nie jest ciągła. Lecz mnogość **R** może nam posłużyć do zbudowania mnogości ciągłej. Zbiór wszystkich przekrojów w mnogości **R** jest oczywiście też mnogością; oznaczmy ją przez **S**".[104]

Ułamek $\mu$ wyznacza dwa przekroje, mianowicie $((0, \mu], (\mu, +\infty))$ oraz $((0, \mu), [\mu, +\infty))$. Na mocy definicji są one utożsamiane;

„Powstają wtedy, właściwie mówiąc, dwa przekroje, które wszakże uważać będziemy zawsze jako równe".[105]

Weber, podobnie jak Dedekind, nie chce odróżniać przekroju wymiernego $((0, \mu], (\mu, +\infty))$ od liczby wymiernej $\mu$ i zgadza się na ich utożsamienie:[106]

„Jeżeli przekroje, utworzone przez ułamki wymierne, uważać będziemy za równowarte tym ułamkom i nazwiemy je krótko wymiernymi, to mnogość

[102] [Weber 1925], s. 5.
[103] [Weber 1925], s. 5.
[104] [Weber 1925], s. 6–7. (1) „Przekrój mnogości" to oczywiście przekrój Dedekinda zbioru liniowo uporządkowanego. (2) Tam, gdzie w polskim tłumaczeniu występują znaki **M**, **R**, **S**, w oryginale stoi odpowiednio: $\mathfrak{M}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$.
[105] [Weber 1925], s. 5.
[106] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 11.4.

**S** zawiera w sobie mnogość **R**, a mnogość **S** jest w każdym razie mnogością gęstą. Ale jest ona także ciągła".[107]

15.1. Dodawanie oraz porządek w **S** – oznaczmy je odpowiednio jako $+_s$ oraz $<_s$ – definiowane są tak, jak dodawanie i porządek przekrojów zbioru $(\mathbb{Q}, <)$ w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.[108]

Pamiętając, że ułamki są utożsamiane z przekrojami, które „wyznaczają", gęstość zbioru **R** w $(\mathbf{S}, <_s)$ należy tak zapisać: gdy $\alpha, \alpha' \in \mathbf{S}$, i $\alpha <_s \alpha'$, wtedy istnieje taki ułamek $\mu \in \mathbf{R}$, że

$$\alpha <_s \mu <_s \alpha'.$$

Weber pokazuje, że porządek $<_s$ jest „ciągły", a dowód prowadzony jest podobnie jak w *Stetigkeit*: Niech $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ będzie przekrojem zbioru $(\mathbf{S}, <_s)$. Wówczas para $(A, B)$, gdzie

$$A = \{\mu \in \mathbf{R} : \mu \in \mathbf{A}\}, \quad B = \{\mu \in \mathbf{R} : \mu \in \mathbf{B}\},$$

jest przekrojem zbioru $(\mathbf{R}, <_r)$ oraz jest albo największym elementem w klasie **A**, albo najmniejszym elementem w klasie **B**.[109] W dowodzie drugiej własności Weber korzysta z faktu, że zbiór **R** jest gęsty w $(\mathbf{S}, <_s)$,[110] to zaś, że porządek $<_s$ jest gęsty przyjmuje jako oczywiste.

**16.** „Mnogość mierzalna".

„Mnogość uporządkowana **M** nazywa się mierzalną, przy następujących założeniach",[111]

krótko możemy je tak zapisać: „mnogość mierzalna uporządkowana" to struktura relacyjna $\mathfrak{M} = (M, +, <)$, gdzie dodawanie jest (1) działaniem wewnętrznym, (2) łącznym i przemiennym, (3) porządek jest liniowy, a związek między dodawaniem i porządkiem dany jest aksjomatami:

(W1) $\exists n[na > b]$,
(W2) $a > c \to \exists b \in M[b + c = a]$,
(W3) $a + b > a$,

gdzie $na$ oznacza $\underbrace{a + \cdots + a}_{n-razy}$.

[107] [Weber 1925], s. 7.
[108] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 16.1 oraz 11.5.
[109] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 13.1.
[110] Stąd też oczywiście wynika gęstość porządku $<_s$.
[111] [Weber 1925], s. 8.

Z (W3) dostajemy, że $2a > a$ i w rezultacie

$$n > m \leftrightarrow na > ma, \tag{14}$$

gdzie $n > m$ oznacza porządek liczb naturalnych, zaś $na > ma$ to porządek w strukturze $\mathfrak{M}$. Z zależności tej skorzystamy dalej dowodząc *tezy* Heatha.

16.1. Przyjmijmy, że w strukturze $\mathfrak{M}$ spełnione są warunki (1)–(3). Pokażemy, że zachodzi:

$$(W1) \wedge (W2) \wedge (W3) \leftrightarrow (E1) \wedge (E2) \wedge (E3), \tag{15}$$

gdzie (E1)–(E3) to aksjomaty charakteryzujące strukturę wielkości z Księgi V *Elementów*.[112]

Łatwo zobaczyć, że $(W2) \wedge (W3) \rightarrow (E3)$. Pokażemy, że zachodzi

$$(E1) \wedge (E2) \wedge (E3) \rightarrow (W3).$$

Istotnie. Przypuśćmy, że dla pewnych $a, b \in \mathfrak{M}$ jest $a + b \leqslant a$. Wtedy $a + 2b \leqslant a + b \leqslant a$ i na mocy indukcji, dla dowolnego $n$ jest $a + nb \leqslant a + b$. Z drugiej strony dla pewnego $m$ jest $mb > b$, a stąd $a + mb > a + b$. Sprzeczność.[113]

Mając na uwadze równoważność (15) aksjomat (W3) nazywamy zgodnością porządku z dodawaniem.

16.2. Weber bez sprawdzenia przyjmuje, że w strukturze $\mathfrak{R} = (\mathbf{R}, +, <_r)$ spełnione są aksjomaty (W1)–(W3). Pokażemy teraz, jak dowodzi, że struktura $\mathfrak{S} = (\mathbf{S}, +_s, <_s)$ jest „mnogością mierzalną ciągłą".

Ad (W2). Gdy $\beta <_s \alpha$, to element $\gamma$ spełniający równość $\alpha = \beta +_s \gamma$ jest wyznaczony przez przekrój $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ zbioru $(\mathbf{S}, <_s)$, gdzie

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{S} : \beta +_s x \leqslant_s \alpha\}, \quad \mathbf{B} = \{x \in \mathbf{S} : \alpha <_s \beta +_s x\}.$$

Ad (W3). Dowód tej własności poprzedzony jest lematem: Dla dowolnego $(A, B) \in \mathbf{S}$ zachodzi

$$\forall \mu \in \mathbf{R} \exists a' \in A[a' + \mu \in B]. \tag{16}$$

Dowód lematu. Niech $\mu \in \mathbf{R}$ i weźmy dowolne $a \in A$ oraz $b \in B$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna $m$, że $b - a <_r m\mu$.[114] Zatem zbiór

[112] Zob. wyżej pkt. 4.3.

[113] W strukturze $(\mathbb{R}, +, <)$ zachodzi $(E2) \wedge (E3) \wedge \neg(W3)$, co pokazuje, że aksjomat (E1) jest istotny w tym dowodzie.

[114] Weber *implicite* przyjmuje – o czym już wspominaliśmy – że w zbiorze ułamków spełniony jest aksjomat Archimedesa.

$\{m \in \mathbb{N} : m\mu + a \in B\}$ jest niepusty. Niech $n$ będzie najmniejszą liczbą w tym zbiorze.[115] Przyjmując $a' =_{df} (n-1)\mu + a$, dostajemy $a' \in A$ i ostatecznie $\mu + a' \in B$.

Korzystając z własności (16) Weber pokazuje, że:

$$\alpha <_s \alpha +_s \beta.$$

Dowód jest tak prowadzony: Niech $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$, niech $(E, F) = (A, B) +_s (C, D)$. Własność (W2) zachodzi w $(\mathbf{R}, +, <_r)$, stąd wynika, że $\forall a \in A \forall c \in C[a + c \in E]$, a na podstawie (16) jest

$$\forall c \in C \exists a \in A[c + a \in B],$$

stąd ostatecznie dostajemy, że

$$\exists a, a' \in A \exists c, c' \in C[a + c \neq a' + c',\ a + c \in B,\ a' + c' \in B].$$

Istnieją zatem dwa różne elementy zbioru $E \backslash A$, czyli $(A, B) <_s (E, F)$.

Ad (W1). Weber nie sprawdza tego warunku, ale korzystając z dowodu własności (16) można to łatwo uzupełnić. Niech zatem $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$, niech $\beta <_s \alpha$ i niech $\mu \in C$ będzie takie, że $\mu <_s \beta$. Gdy w dowodzie lematu za „dowolne $a \in A$" przyjmiemy ułamek $\mu$, to dostaniemy, że $(n-1)\mu + \mu \in A$ oraz $n\mu + \mu \in B$, czyli $\alpha <_s (n+1)\mu$. Ostatecznie, na podstawie przechodniości porządku $<_s$, jest:

$$\alpha <_s (n+1)\mu <_s (n+1)\beta.$$

**17.** „Przechodzimy teraz do definicji stosunku, który od czasów starożytnych uważany był za naukę o liczbach. Przedstawimy najprzód rzecz tę, idąc za Euklidesem".[116]

(a) Stosunki wymierne.

„Jeżeli elementy ciągłej mierzalnej mnogości połączymy w pary i pary te uważać będziemy jako nowe elementy, to powstanie nowa rozmaitość. Oznaczmy parę taką przez $a : b$, lub też przez $\frac{a}{b}$. [...] Pary te nazwijmy stosunkami i postarajmy się tę nową mnogość uporządkować. Jeżeli przyjmiemy najprzód, że istnieją dwie liczby całkowite $m, n$ takie, że $na = mb$ [...]; gdy $p, q$ są dwie liczby całkowite, to wtedy i tylko wtedy $qa = pb$, jeżeli $mq = np$. [...] W tym przypadku stosunek $a : b$ nazywamy wymiernym i uważamy za

[115] W tym kroku Weber korzysta z zasady indukcji, chociaż w *Lehrebuch der Algebra* nie została ona *explixite* sformułowana

[116] [Weber 1925], s. 10.

równy ułamkowi wymiernemu $m : n$ lub $p : q$. Ułamki wymierne mogą być przeto uważane za stosunki liczb całkowitych";[117]

$$a : b = m : n \leftrightarrow_{df} na = mb. \tag{17}$$

„Wszystkie równe stosunki wymierne tworzą jedną liczbę wymierną, a liczby wymierne, podobnie jak ułamki wymierne, stanowią gęstą i mierzalną rozmaitość. Do mnogości liczb wymiernych włączają się liczby naturalne, jeżeli przez liczbę naturalną $m$ będziemy rozumieć stosunek $m : 1$".[118]

(b) Porównanie stosunku z ułamkiem.

„Powróćmy teraz do jakiejkolwiek mierzalnej rozmaitości **M** i wyjmijmy z niej dwa elementy $a$ i $b$. Jeżeli – co zawsze jest możliwe – wybierzemy dwie liczby naturalne $m$ i $n$ takie, że $na > mb$, to stosunek $a : b$ nazywa się większym od stosunku $m : n$, tj. $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$ i jeżeli $m : n > p : q$, będzie też $a : b > p : q$ [...]. Podobnie, jeżeli $n'a < m'b$, będzie też $\frac{a}{b} < \frac{m'}{n'}$";[119]

$$a : b \succ m : n \leftrightarrow_{df} na > mb, \qquad a : b \prec m : n \leftrightarrow_{df} na < mb. \tag{18}$$

(c) Porządek stosunków.

„Gdy więc $a : b$ i $\alpha : \beta$ są jakiekolwiek dwa stosunki, które dla krotności oznaczymy przez $e$ i $\varepsilon$, a których elementy należą do jednej lub też do różnych rozmaitości, to możliwe są dwa przypadki: 1) nie ma żadnego stosunku wymiernego $\mu$ pomiędzy $e$ i $\varepsilon$, lub 2) istnieje stosunek wymierny pomiędzy $e$ i $\varepsilon$. W przypadku 1) oba stosunki nazywają się równemi [...] W przypadku 2) stosunki $e$ i $\varepsilon$ nazywają się nierównemi. Może więc być albo $e < \mu < \varepsilon$, albo $e > \mu' > \varepsilon$";[120]

$$a : b \succ c : d \leftrightarrow_{df} \exists m, n[na >_1 mb,\ md >_2 nc], \tag{19}$$

gdzie $a, b \in \mathfrak{M}_1 = (M_1, +, <_1)$, $c, d \in \mathfrak{M}_2 = (M_2, +, <_2)$. Stosunki $a : b$, $c : d$ są równe, gdy nie są różne:

$$a : b = c : d \leftrightarrow_{df} \neg(a : b \succ c : d) \wedge \neg(a : b \prec c : d). \tag{20}$$

Stąd, uwzględniając przypadek (17), otrzymujemy definicję proporcji:

[117] [Weber 1925], s. 10–11.
[118] [Weber 1925], s. 11.
[119] [Weber 1925], s. 11.
[120] [Weber 1925], s. 12.

$$a : b = c : d \leftrightarrow_{df} \forall m, n \tag{21}$$

$$[(na <_1 mb,\ nc <_2 md) \vee (na = mb,\ nc = md) \vee (na >_1 mb,\ nc >_2 md)].$$

To zaś jest Euklidesa definicja proporcji V.5. w wersji (1).[121]

17.1. W teorii Webera zachodzi prawo trychotomii. Na mocy definicji jest:

$$(a : b \prec \alpha : \beta) \vee (a : b = \alpha : \beta) \vee (a : b \succ \alpha : \beta),$$

zaś na podstawie (14) można pokazać, że zachodzi dokładnie jeden z tych warunków.

Przechodniość relacji $\prec$ wynika z zależności

$$(m : n \prec a : b \prec p : q) \rightarrow mq < np.$$

Zauważmy, że dzięki temu w teorii Webera można udowodnić *tezę* Heatha. Niech bowiem $a, b \in \mathfrak{M}_1 = (M, +, <_1)$. Przyjmijmy:

$$A_{a,b} =_{df} \{(m, n) :\ m : n \prec a : b\}, \qquad B_{a,b} =_{df} \{(p, q) :\ p : q \succeq a : b\}.$$

Pokażemy, że zachodzi:

$$\forall a, b \forall m, n, p, q[((m, n) \in A_{a,b},\ (p, q) \in B_{a,b}) \rightarrow mq < np]. \tag{C}$$

Istotnie. Niech $(m, n) \in A_{a,b}$ oraz $(p, q) \in B_{a,b}$. Na mocy (17) i (18) oznacza to, że $mb <_1 na$ oraz $qa \leqslant_1 pb$. Stąd, na mocy zgodności dodawania z porządkiem, dostajemy, że $mqb <_1 nqa$, $nqa \leqslant_1 npb$. Z przechodniości relacji $<_1$ wynika, że $mqb <_1 npb$. Ostatecznie, na podstawie (14), jest $mq < np$.

**18.** Działania na stosunkach. Definicję działań poprzedzają cztery twierdzenia:

(W4) $a > b \rightarrow a : c \succ b : c$,

(W5) $b > c \rightarrow a : c \succ a : b$,

(W6) $a : b = c : d \rightarrow a : c = b : d$.

Biorąc pod uwagę algebraiczną postać formuł, twierdzenia (W4) i (W5) odpowiadają twierdzeniu Euklidesa V.8:

$$AB > C \rightarrow AB : D \succ C : D, \quad AB > C \rightarrow D : C \succ AB : D,$$

zaś (W6) – twierdzeniu V.16:

$$A : B :: C : D \rightarrow A : C :: B : D.$$

[121] Zob. wyżej pkt. 5.

(W7) „Twierdzenie główne. Jeżeli z pomiędzy czterech wielkości $a, b, c, d$ ciągłej mierzalnej mnogości trzy są dane dowolnie, wtedy można czwartą wyznaczyć w tejże mnogości tak, aby było $a : b = c : d$".[122]

Spójrzmy na dowód.

„Jeżeli bowiem element $x$ mnogości $\mathbf{M}$ umieścimy w klasie $A$ lub w klasie $B$, stosownie do tego, czy $x : b$ jest mniejsze czy też większe niż $c : d$, otrzymamy przekrój, wytworzony przez element $a$, czyniący zadość warunkowi $a : b = c : d$".[123]

Tak więc, gdy dane są trzy elementy $b, c, d \in \mathfrak{M} = (M, +, <)$, to istnieje dokładnie jedno takie $a$, że zachodzi $a : b = c : d$. Element $a$ jest wyznaczony przez przekrój $(A, B)$ zbioru $(M, <)$, gdzie $A = \{x \in M : \ c : d \succ x : b\}$, $B = \{x \in M : \ x : b \succeq c : d\}$.

Para $(A, B)$ istotnie jest przekrojem. Z definicji proporcji wynika, że $A \cap B = \emptyset$. Z prawa trychotomii

$$(x : b \succ c : d) \vee (x : b = c : d) \vee (x : b \prec c : d),$$

otrzymujemy, że $x \in A \vee x \in B$. Zależność $(x \in A, y \in B) \rightarrow x < y$ wynika z przechodniości relacji $\prec$ i twierdzenia (W4).

18.1. Twierdzenie (W7) traktuje o „mnogości ciągłej mierzalnej", zaś w *Lehrbuch der Algebra* jedynym przykładem takiej „mnogości" jest struktura $\mathfrak{S} = (\mathbf{S}, +_s, <_s)$ i kolejne ustalenia Webera należy odnosić właśnie do tej struktury. W tym ujęciu – jak zobaczymy – liczba rzeczywista jest stosunkiem przekrojów Dedekinda zbioru $(\mathbf{R}, <_r)$, tj. $a : b$, gdzie $a, b \in \mathfrak{S}$. Być może opisywana tu konstrukcja została przeprowadzona po to, aby liczba rzeczywista została zdefiniowana jako stosunek, bo – jak pisze Weber – „stosunek, od czasów starożytnych uważany był za naukę o liczbach".[124]

18.2. Dodawanie stosunków. Przy ustalonym $c$, na podstawie twierdzenia (W7), dla dowolnego stosunku $e : f$ można znaleźć równy mu stosunek $b : c$. Na tej podstawie definiowane jest dodawanie:

$$\frac{a}{c} \oplus \frac{e}{f} =_{df} \frac{a+b}{c}, \quad \text{gdzie} \quad \frac{e}{f} = \frac{b}{c}. \tag{22}$$

[122] [Weber 1925], s. 14.
[123] [Weber 1925], s. 14.
[124] [Weber 1925], s. 10.

„To prawidło obejmuje jako przypadek szczególny dodawanie ułamków. Aby je uprawnić ogólnie należy tylko wykazać":[125]

(W8) $\quad (a : c = a' : c',\ b : c = b' : c') \to (a + b) : c = (a' + b') : c',$

co z kolei odpowiada twierdzeniu V.24 z *Elementów*:

$$(A : B :: C : D,\ E : B :: F : D) \to (A + E) : B :: (C + F) : D.$$

18.3. Pokażemy teraz, że zbiór stosunków $\Lambda = \{a : b\ :\ a, b \in \mathfrak{M}\}$, wzięty z porządkiem $\prec$ oraz dodawaniem $\oplus$, jest „ciągłą mierzalną mnogością", tj. że w strukturze $(\Lambda, \oplus, \prec)$ spełnione są aksjomaty $(W1) - (W3)$, a porządek $\prec$ jest ciągły w sensie Dedekinda.

Korzystając z twierdzenia (W8) można wykazać łączność i przemienność działania $\oplus$. Porządek stosunków $\prec$ – jak już pokazaliśmy – jest liniowy, natomiast warunki (W1)–(W3) sprawdzamy, jak następuje.

Ad (W1). Niech dane będą stosunki $a : c$, $e : f$. Dla $c, e, f$ – na podstawie (W7) – znajdujemy takie $b$, że $b : c = e : f$. Z założenia, w strukturze $\mathfrak{M}$ spełniony jest aksjomat Archimedesa, zatem dla pewnego $n$ jest $na > b$. Stąd, na podstawie twierdzenia $(W5)$ zachodzi $(na) : c \succ b : c$. Z definicji dodawania stosunków dostajemy:

$$\underbrace{a : c + \cdots + a : c}_{n-razy} = (na) : c,$$

co oznacza, że $(na) : c = n(a : c)$. Ostatecznie $n(a : c) \succ b : c = e : f$, co oznacza, że zachodzi (W1).

Ad (W2). Niech teraz $a : c \succ e : f$. Tak, jak wyżej przyjmujemy $b : c = e : f$, zatem $a : c \succ b : c$. Z (W5) wynika, że $a > b$, a stąd, na podstawie (W2), dostajemy, że dla pewnego $d \in M$ zachodzi $a = b + d$. Ostatecznie $a : c = (b + d) : c = (b : c) \oplus (d : c)$, co oznacza, że w strukturze $\Lambda$ spełniony jest aksjomat (W2).

Ad (W3). Dla dowolnych $a, b \in \mathfrak{M}$ z założenia jest $a+b > a$. Na podstawie (W5) jest $(a : c) \oplus (b : c) \succ a : c$, gdzie, jak poprzednio, $b : c = e : f$, co oznacza, że w strukturze $\Lambda$ spełniony jest aksjomat (W3).

Ciągłość porządku $\prec$. Niech para $(A_\lambda, B_\lambda)$ będzie przekrojem zbioru $(\Lambda, \prec)$. Ustalając pewne $c \in \mathfrak{M}$, na podstawie (W7), można przyjąć, że elementy zbioru $A_\lambda$ są postaci $a : c$, zaś elementy $B_\lambda$ – postaci $b : c$. Wówczas para $(A, B)$, gdzie

$$A = \{a \in M :\ a : c \in A_\lambda\}, \quad B = \{b \in M :\ b : c \in B_\lambda\},$$

[125] [Weber 1925], s. 14.

jest przekrojem zbioru $(M, <)$. Niech $d \in M$ będzie albo najmniejszym elementem w zbiorze $A$, albo największym w zbiorze $B$. Wówczas $d : c$ jest albo najmniejszym elementem w zbiorze $A_\lambda$, albo największym w zbiorze $B_\lambda$.

**19.** Struktura $(\Lambda, \oplus, \prec)$ jest – jak pokazaliśmy – „mnogością ciągłą mierzalną", można zatem zdefiniować w niej, dokładnie tak samo, jak w strukturze $\mathfrak{M}$, równość $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ oraz porządek $\alpha : \beta \prec_\Lambda \gamma : \delta$, gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Lambda$. Do elementów struktury $\Lambda$ stosują się też twierdzenia (W4)–(W8).

Gdy $a \in \mathfrak{M}$, wtedy $na, ma \in \mathfrak{M}$, dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$. Do struktury $(\Lambda, \oplus, \prec)$, należą stosunki $na : ma$, te zaś są równe ułamkom $m : n$. Mając to na uwadze mówimy, że do struktury $(\Lambda, \oplus, \prec)$ należą ułamki, w szczególności liczby naturalne, utożsamiane ze stosunkami $n : 1$.

19.1. Pokażemy, jak w strukturze $(\Lambda, \oplus, \prec)$ Weber definiuje mnożenie oraz dzielenie.

W dalszym ciągu referujemy pracę Webera, z tym jednym odstępstwem, że tam, gdzie Weber pisze „liczba" będziemy pisać „stosunek". Webera pojęcie liczby przedstawimy w kolejnym punkcie.

(a) Mnożenie.

„Jeżeli $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są stosunkami [liczbami], to z proporcji $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ można dowolną z czterech liczb wyznaczyć przez trzy pozostałe. Jeżeli, kładąc $\delta = 1$ szukamy liczby $\alpha$, dochodzimy do mnożenia $\alpha = \beta \otimes \gamma$";[126]

$$\alpha = \beta \otimes \gamma \leftrightarrow_{df} \alpha : \beta = \gamma : 1. \tag{23}$$

Gdy dane są wielkości $\beta, \gamma, 1$, na podstawie twierdzenia (W7), wnosimy o istnieniu iloczynu.

Przemienność mnożenia $\otimes$ wynika z twierdzenia (W6), zachodzi bowiem

$$\alpha : \beta = \gamma : 1 \leftrightarrow \alpha : \gamma = \beta : 1,$$

stąd, na mocy definicji,

$$\alpha : \gamma = \beta : 1 \leftrightarrow \alpha = \gamma \otimes \beta.$$

Zachodzi też rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma).$$

[126] [Weber 1925], s. 15.

Istotnie, na mocy definicji (23) jest

$$(\alpha \otimes \beta) : \alpha = \beta : 1, \quad (\alpha \otimes \gamma) : \alpha = \gamma : 1,$$

a stąd, na podstawie twierdzenia (W8),

$$((\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)) : \alpha = (\beta \oplus \gamma) : 1,$$

co, znów na mocy definicji (23), daje

$$(\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma) = \alpha \otimes (\beta \oplus \gamma).$$

Można też pokazać, że iloczyn $\otimes$ jest zgodny z porządkiem $\prec$, tj.:

$$\alpha \prec \beta \to (\alpha \otimes \gamma) \prec (\beta \otimes \gamma).^{127}$$

(b) Dzielenie. Wychodząc od proporcji $\alpha : \beta = \gamma : 1$,

„Jeżeli szukamy liczby $\gamma$, dochodzimy do dzielenia";[128]

$$\alpha \div \beta = \gamma \leftrightarrow_{df} \alpha : \beta = \gamma : 1. \tag{24}$$

Mamy zatem $\alpha : \beta = (\alpha \div \beta) : 1$, czyli $\alpha = \beta \otimes (\alpha \div \beta)$, w szczególności $1 = \beta \otimes (1 \div \beta)$.

(c) Elementy ujemne.

„Niechaj $x$ oznacza element wyżej zdefiniowanego układu stosunków [liczb], które nazwijmy teraz układem stosunków [liczb] dodatnich. Weźmy ten układ stosunków [liczb] po raz drugi, i dla odróżnienia, w tym drugim układzie, który nazwiemy układem stosunków [liczb] ujemnych, oznaczmy każdy element przez $-x$. Ten drugi układ uporządkujemy wprost przeciwnie niż pierwszy, to jest, że wszędzie gdzie w układzie pierwszym $x$ jest 'większe', w drugim $-x$ ma być 'mniejsze' i odwrotnie. [...] Oba układy zestawiamy razem, przyjmując, że każde $-x$ ma być mniejsze od każdego $x$".[129]

Pozwalając sobie na uproszczenia, bo w tej części wykład Webera jest zupełnie jasny, przyjmijmy $\mathfrak{L} = -\Lambda \cup \Lambda$, gdzie $-\Lambda = \{-\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, i zobaczmy jak Weber definiuje 0. Otóż jeden jedyny przekrój zbioru $(\mathfrak{L}, \prec)$ tworzy lukę, mianowicie $(-\Lambda, \Lambda)$.[130]

[127] Tego prawa Weber w ogóle nie wymienia.

[128] [Weber 1925], s. 15.

[129] [Weber 1925], s. 15–16.

[130] Przyjmując np. przyporządkowanie $\alpha \mapsto (\Lambda, \alpha) =_{df} -\alpha$, można uznać, że $-\Lambda$ jest zbiorem, który *powstaje* ze zbioru $\Lambda$ na mocy aksjomatu zastępowania. Porządek ze zbioru $(\Lambda, \prec)$ w „naturalny" sposób przedłużany jest na $\mathfrak{L}$.

„Aby tę przerwę usunąć, musimy przekrojowi $(-x, x)$ przyporządkować liczbę o znaku 0, która właśnie jest przez ten przekrój zdefiniowana. Wtedy otrzymamy mnogość uporządkowaną ciągłą, z obu stron nieograniczoną, tj. układ zupełny liczb rzeczywistych".[131]

W zbiorze $\mathfrak{L}$, za pomocą reguł na znakach, jak np. $x(-y) = (-x)y = -(xy)$, definiuje Weber dodawanie i mnożenie. Dalej czytamy:

„Układ liczb rzeczywistych uzmysławiamy sobie za pomocą punktów, odkładając od punktu stałego, oznaczonego przez 0, na linji prostej liczby dodatnie jako odcinki po jednej stronie, np. po prawej, liczby ujemne po drugiej lewej. Obraz sumy dwóch liczb $z_1 + z_2$ otrzymamy, gdy od punktu $z_1$ odłożymy odcinek $\pm z_1$, po prawej lub lewej stronie, zależnie od tego czy $z_2$ jest dodatnie czy ujemne".[132]

**20.** Liczba. Weber podaje kilka przykładów „mnogości mierzalnych":

„typowa dla mnogości mierzalnych jest rozmaitość odcinków prostolinjowych lub długość linji, które dodajemy wprost przez przykładanie. I mnogości materji, porównywane za pomocą wagi, oraz przedziały czasu, mierzone przy pomocy zegara, dają przykłady mnogości mierzalnych".[133]

O „mierzeniu".

„Rodzaj mierzenia leży nie w samej naturze rozmaitości, lecz zostaje ustanowiony w nich przez myślącego spostrzegacza. Tak np. byłoby rzeczą zupełnie dopuszczalną przez sumę $a + b$ dwóch odcinków rozumieć przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątnymi są $a$ i $b$ zamiast, jak to się zwykle przyjmuje rozumieć przez sumę tę odcinek, utworzony przez przyłożenie do siebie odcinków $a$ i $b$".[134]

Definicja równości i nierówności stosunków pozwala porównywać stosunki, „których elementy należą do jednej lub też różnych rozmaitości". To stanowi podstawę definicji liczby.

„Jeżeli zbierzemy wszystkie równe wzajemnie stosunki, otrzymamy pojęcie 'gatunkowe', które nazywamy liczbą w ogólnym znaczeniu tego wyrazu. Liczba jest więc nazwą lub znakiem pewnej rozmaitości, której elementami są stosunki równe jednemu z nich. To pojęcie liczby obejmuje stosunki wy-

[131] [Weber 1925], s. 16.
[132] [Weber 1925], s. 16.
[133] [Weber 1925], s. 9.
[134] [Weber 1925], s. 9.

mierne, a więc i liczby naturalne, jako stosunki $m : 1$ tworzące razem z nimi liczby wymierne. Liczby, które nie wypływają ze stosunków wymiernych nazywają się liczbami niewymiernymi. [...] Z powyższych wywodów wynika, że liczby stanowią mnogość uporządkowaną, której porządek można ustalić, jeżeli za każdą liczbę obierzemy jedne z pomiędzy stosunków równych, które on wyraża".[135]

20.1. Pojęcie wymierności i niewymierności związane jest u Webera z działaniami w strukturze $\mathfrak{M}$ ustanowionymi przez „myślącego spostrzegacza". Zilustrujemy to przykładem zasugerowanym przez samego Webera.

Niech $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem liczb rzeczywistych. Struktura $(\mathbb{R}_+, +, <)$ jest oczywiście „ciągłą mnogością mierzalną". Struktura $(\mathbb{R}_+, \oplus, <)$, gdzie $a \oplus b =_{df} \sqrt{a^2 + b^2}$, także jest „ciągłą mnogością mierzalną". Aby pokazać, że spełnione są w niej aksjomaty (W1)-(W3) wystarczy zauważyć, że

$$na = \underbrace{a \oplus \cdots \oplus a}_{n-razy} = a \cdot \sqrt{n}.$$

Przyjmijmy $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, wówczas para $(\sqrt{2}, 2)$ wzięta jako para elementów struktury $(\mathbb{R}_+, +, <)$ nie jest stosunkiem wymiernym, natomiast jako para elementów struktury $(\mathbb{R}_+, \oplus, <)$ jest stosunkiem wymiernym: zachodzi bowiem $\sqrt{2} \oplus \sqrt{2} = 2$, czyli $2a = 1b$, lub inaczej $a : b = 2 : 1$.

20.2. Istnieje pokusa, aby Webera definicję liczby *usprawnić*, stosując doń relację równoważności, na przykład w taki sposób: Przyjmijmy, że dana jest rodzina „ciągłych mnogości mierzalnych" $\{\mathfrak{M}_t : t \in T\}$, gdzie $\mathfrak{M}_t = (M_t, +_t, <_t)$. W zbiorze par $\bigcup\limits_{t \in T} M_t \times \bigcup\limits_{t \in T} M_t$ definiujmy relację

$$(a, b) \equiv (c, d) \leftrightarrow_{df} a : b = c : d$$

i za liczbę uznajemy klasę równoważności $[(a, b)]$.

Otóż wyżej podany przykład pokazuje, że relacja $\equiv$ nie jest zwrotna. Przykład ten odnosi się również do relacji proporcji, tj.

$$(A, B) \equiv (C, D) \leftrightarrow_{df} A : B :: C : D.$$

W komentarzach opisujących teorię Eudoxosa językiem teorii relacji przyjmuje się natomiast jako zupełnie oczywiste to, że relacja proporcji zadana definicją V.5 jest zwrotna.[136]

[135] [Weber 1925], s. 12–13.

[136] Zob. [Baszmakowa 1975], s. 106–107, [Dummett 1991], s. 290, [Hale 2000], s. 107, [Joyce 1997], [Mioduszewski 1996], s. 64, [Nikolić 1974], s. 232, [Stein 1990], s. 169. Zwracamy tu uwagę na trudność natury matematycznej, bo literalnie rzecz biorąc, na podstawie definicji V.9 „A proportion in three terms is the least possible", Euklides *explicite* wyklucza możliwość $A : B :: A : B$.

# Wielkość mierzalna

**21.** Powszechnie zauważa się, że w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* przedstawiona jest arytmetyczna teoria liczb rzeczywistych. Istotnie, Dedekind wielokrotnie to powtarza, a oznacza to dlań teorię wolną od „mniej czy bardziej geometrycznych, czy przez geometrię podsuwanych wyobrażeń".[137] Obecnie, gdy przez geometrię elementarną rozumiemy teorię skodyfikowaną w *Grundlagen der Geometrie* Hilberta, a *Elementy* Euklidesa podawane są za wzór metody dedukcyjnej, pejoratywne znaczenie, jakie pojęcie geometrii miało u Dedekinda jest już trudno uchwytne. Krótko można powiedzieć tak: teoria arytmetyczna to według Dedekinda teoria niegeometryczna, co znaczy, po pierwsze, ścisła i rygorystycznie wyłożona, po drugie, wolna od pojęcia „wielkości mierzalnej".

Jeszcze w roku 1921 Ernest Hobson tak pisał o „arytmetyzacji analizy":

„Jest obecnie powszechnie przyjęte, że arytmetyzacja to badanie prowadzące do zbudowania analizy na podstawach wolnych od wszelkich pojęć wywodzących się z idei wielkości mierzalnej tak, że ułamki, liczby ujemne, niewymierne są całkowicie zależne od pojęcia liczby całkowitej".[138]

Cóż to zatem jest „wielkość mierzalna"? W odpowiedzi można wydzielić dwa aspekty: wielkość i mierzalność; jeden i drugi prowadzi do *Elementów* i teorii proporcji.

21.1. Pojęcie „wielkości mierzalnej" pojawia się, jakby mimochodem, w trzecim paragrafie *Stetigkeit*. Czytamy:

„Znane dotąd wprowadzanie liczb niewymiernych nawiązuje mianowicie do pojęcia wielkości rozciągłych – które jednak same nie są nigdzie ściśle zdefiniowane – i wyjaśnia liczbę jako wynik mierzenia pewnej takiej wielkości

[137] [Dedekind 1872], s. 136.
[138] [Hobson 1921], s. 22.

za pomocą innej z nią jednorodnej. Zamiast tego żądam, by arytmetyka rozwijała się sama z siebie".[139]

I dalej, w przypisie do pierwszego zdania:

„Pozorna zaleta ogólności tej definicji liczby znika od razu, kiedy pomyśli się o liczbach zespolonych. Według mnie dopiero wtedy można jasno określić pojęcie stosunku pomiędzy dwoma wielkościami tego samego rodzaju, kiedy wprowadzone zostały już liczby niewymierne".[140]

„Wielkość rozciągła" to „wielkość geometryczna", z przypisu natomiast można wnosić, że samo pojęcie wielkości wiązane jest z porządkiem, argument Dedekinda jest przecież taki: pojęcia liczby nie należy łączyć z pojęciem wielkości, bo przecież liczby zespolone, chociaż nie są uporządkowane, to jednak są liczbami.[141]

21.2. Takie XIX-wieczne kojarzenie wielkości z porządkiem odnajdujemy jeszcze u Hermana Weyla. W *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1949) czytamy:[142]

„Zamiast genetycznie konstruować dziedzinę liczb, arytmetykę można oprzeć na aksjomatach. [...] Aksjomaty arytmetyki dzielą się na dwie grupy: aksjomaty algebraiczne i aksjomaty wielkości. Grupa pierwsza traktuje o operacji dodawania i mnożenia. [...] Aksjomaty wielkości (które nie przenoszą się na dziedzinę liczb zespolonych) odnoszą się do relacji $a > b$ ($a$ jest większe od $b$)".[143]

W roku 1949 dychotomia aksjomaty algebraiczne–aksjomaty wielkości jest już anachronizmem. W istocie aksjomaty struktury wielkości (E1)–(E3), jakie znajdujemy w Księdze V *Elementów*, ale przede wszystkim wprost podane przez Webera aksjomaty „mnogości mierzalnej" (W1)–(W3) charakteryzują nie sam porządek, ale związek porządku z dodawaniem.

Patrząc z tej perspektywy, praca Webera jest ciekawa jeszcze i z tego

[139] [Dedekind 1872], s. 140.

[140] [Dedekind 1872], s. 140.

[141] To, co dla Dedekinda jest stwierdzeniem faktu, dzisiaj jest twierdzeniem: nie istnieje w zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ porządek zgodny z działaniami w ciele liczb zespolonych $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$. Wynika to z faktu, że w dowolnym ciele uporządkowanym zachodzi: $-1 < 0$ oraz $a \neq 0 \to a^2 > 0$.

[142] Książka [Weyl 1949] jest angielską, znacznie rozszerzoną wersją niemieckiej rozprawy Weyla *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Berlin 1926; zob. [Batóg 1997], s. 448–449.

[143] [Weyl 1949], s. 32–33. Dychotomia genetyczne–aksjomatyczne ujęcie liczby pochodzi z pracy [Hilbert 1900]; zob. rozdz. *Aksjomaty*, pkt. 1.

względu, że nie występuje już w niej pojęcie wielkości. Z pojęcia „wielkość mierzalna" u Webera zostało tylko słowo mierzalność, które oznacza ni mniej, ni więcej jak strukturę porządkowo-algebraiczną.

U Dedekinda aksjomaty wiążące porządek z działaniami nie zostały podane *explicite*, ale pojęcie wielkości nie odgrywa już żadnej roli, zapowiedziane jest natomiast odwrócenie zależności między pojęciem liczby i wielkości (geometrycznej), powtórzmy:

„Według mnie dopiero wtedy można jasno określić pojęcie stosunku pomiędzy dwoma wielkościami tego samego rodzaju, kiedy wprowadzone zostały już liczby niewymierne".[144]

Program ten został zrealizowany w *Podstawach geometrii* Karola Borsuka i Wandy Szmielew, gdzie odcinkom i kątom, zdefiniowanym jako obiekty geometryczne, przypisana jest miara, a więc liczba rzeczywista.[145]

**22.** XIX-wieczne powiązanie liczby z mierzeniem – ujęcie od którego Dedekind wyraźnie się dystansuje – odnajdujemy znów w *Philosophy of Mathematics and Natural Science* Weyla. Czytamy:

„Genetyczne podejście do konstrukcji dziedziny liczb w punkcie wyjścia przyjmuje ciąg liczb naturalnych $1, 2, 3, \ldots$ . Pierwszy krok, jaki należy podjąć, to przejście od liczb naturalnych do ułamków. Historycznie rzecz biorąc *ułamki* powstały przy przejściu od liczenia do mierzenia. Wszelkie mierzenie oparte jest na dziedzinie wielkości takich, jak odcinki prostej. Zachodzi tu (1) relacja przystawania $a = b$ [...] (2) operacja, która odcinkom $a, b$ przypisuje odcinek $a + b$ [...]. W dziedzinie odcinków operacja wielokrotności odcinka wiąże się operacją odwrotną – podziałem: gdy dany jest odcinek $a$ i pewna liczba naturalna $n$, to istnieje jeden i tylko jeden (w sensie przystawania) taki odcinek $x$, że $nx = a$, oznaczamy go przez $a/n$. [...] Nie ma potrzeby wprowadzać specjalnych ułamków dla każdej dziedziny wielkości, gdyż ich prawa są niezależne od natury tych wielkości i wygodniej jest zdefiniować je czysto arytmetycznie".[146]

I w przypisie:

„współczesny punkt widzenia, gdzie wszystkie wielkości podpadają pod ogól-

[144] [Dedekind 1872], s. 140.

[145] Zob. rozdz. *O ciągłości linii prostej*.

[146] [Weyl 1949], s. 30–31. (1) W sprawie historycznej wartości tej uwagi zob. wyżej pkt. 3.2. (2) Weyl pisze, że „prawa ułamków są niezależne od natury wielkości" – nie jest to oczywiste, bo nie wiadomo, jak wyznaczać $x$, gdy zamiast odcinków, w punkcie wyjścia przyjęte zostaną kąty.

ne pojęcie liczby zyskał uzasadnienie po tym, jak Dedekind nadał konstruktywny charakter analizie niewymierności przeprowadzonej przez Eudoxosa".

Dla porównania, w wyżej cytowanej książce Hobsona czytamy:

„Historycznie zastosowanie ułamków wynikło z potrzeby mierzenia wielkości rozciągłych, a związane z tym pojęcie ułamka, znane z życia codziennego, stanowi podstawę nauki o ułamkach, nawet w najnowszych podręcznikach akademickich. Zgodnie z tym podejściem, jednostka wielkości pewnego rodzaju jest dzielona na $b$ równych części, a następnie spośród nich branych jest $a$ części; powstająca w ten sposób wielkość jest oznaczana ułamkiem $a/b$. Takie rozumienie istoty ułamka, jako zależne od pojęcia *jednostki* i podziału tej jednostki na *równe części* jest niezgodne ze współczesnym poglądem, że Analiza Matematyczna powinna być rozwijana na bazie Czystej Arytmetyki, całkiem niezależnie od pojęć związanych z mierzeniem wielkości rozciągłych. [...] Zgodnie z tym poglądem, teoria mierzenia jest zaliczana nie do podstaw, ale do zastosowań Analizy Matematycznej".[147]

I dalej,

„Ci, którzy pod wpływem współczesnej tendencji arytmetyzacji, zarzucają tradycyjną niearytmetyczną definicję ułamka, przyjmują w to miejsce formalną definicję, w której ułamek uważany jest za parę liczb naturalnych. Przyjmuje się, że taka para jest indywidualnym przedmiotem, a następnie podawane są prawa działań na tych przedmiotach".[148]

Po tym następuje klasyczny już, znany z kursu *Wstęp do matematyki*, wykład o liczbach wymiernych, a różny od wykładu Webera tylko w tym, że za ułamek uznaje się parę $(m, n)$, podczas, gdy u Webera obok $(m, n)$ występuje jeszcze znak *proporcji* $m : n$.[149] Przyjmując, że praca Webera jest punktem zwrotnym w dziele arytmetyzacji analizy, opozycję geometryczne *versus* arytmetyczne można przedstawić tak: oparte na Księdze V *Elementów* traktującej o wielkościach geometrycznych *versus* oparte na Księdze VII *Elementów* traktującej o liczbach.

22.1 Aby zobaczyć na czym polega *niearytmetyczność* tego ujęcia liczb wymiernych, które znajdujemy w *Philosophy of Mathematics and Natural*

[147] [Hobson 1921], s. 14.

[148] [Hobson 1921], s. 14.

[149] Jakkolwiek z punktu widzenia matematyki ujęcie ułamka jako pary $(m, n)$, czy klasy $[(m, n)]$, polega na *zerwaniu* z antyczną teorią proporcji, to we współczesnym języku pobrzmiewa jeszcze echo teorii proporcji, gdy liczbę wymierną nazywa się „zbiorem proporcjonalnych par liczb całkowitych", czy po prostu w samej nazwie „rational numbers", wszak greckie $\lambda o \gamma o \varsigma$ oddawano w przekładach łacińskich jako ratio.

*Science* wystarczy spytać, na jakiej podstawie konstruowany jest odcinek $a/n$? Twierdzenie Talesa, oczywiście.

To, co nazywamy twierdzeniem Talesa w *Elementach* figuruje jako twierdzenie VI.2:

„If a straight line be drawn parallel to one of the sides of a triangle, it will cut the sides of the triangle proportionally; and, if the sides of the triangle be cut proportionally, the line joining the points of section will be parallel to the remaining side of the triangle".[150]

Na podstawie tego twierdzenia dowodzone jest twierdzenie VI.9:

„From a given straight line to cut off a prescribed part".[151]

I właśnie powtarzając konstrukcję przedstawioną w dowodzie twierdzenia VI.9, można wyznaczyć odcinek $a/n$.

Księga VI *Elementów* oparta jest na teorii proporcji z Księgi V i pośrednio zakłada „dość niejasne – jak pisze Dedekind – i skomplikowane pojęcie wielkości",[152] co więcej, twierdzenia VI.2 i VI.9 dowodzone są na podstawie twierdzeń geometrii z Księgi I (27, 29, 31, 38, 39), i pośrednio, przy założeniu aksjomatu o prostych równoległych. Właśnie dlatego przedstawione ujęcie liczb wymiernych uważane było za geometryczne, tj. *niearytmetyczne*.

**23.** I jeszcze o *niearytmetycznym* ujęciu liczby, tym razem na podstawie korespondencji Dedekinda. Rozdział LXV jego *Gessammelte Werke* zawiera listy kierowane do Rudolfa Lipschitza. Są wśród nich i takie, w których komentowana jest rozprawa *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, a obok uwag samego Dedekinda znajdujemy też wyjątki z listów Lipschitza, dzięki którym możemy zobaczyć, jak rozprawa była odbierana zaraz po jej opublikowaniu.

---

[150] [Euklides], Księga VI, tw. 2, „Gdy linia prosta poprowadzona jest równolegle do jednego z boków trójkąta, to przetnie boki tego trójkąta proporcjonalnie. Gdy boki trójkąta są przecięte proporcjonalnie, to linia łącząca punkty przecięcia jest równoległa do pozostałego boku trójkąta"; „Jeżeli w troykącie poprowadzona będzie linia prosta równoległa do iednego z boków iego, ta przetnie pozostałe boki troykąta, lub boki przedłużone, proporcjonalnie. I jeżeli boki troykąta, lub boki przedłużone przecięte są proporcjonalnie, linia prosta łącząca punkta przecięć, będzie do pozostałego boku troykąta równoległa" [Czech 1817], s. 181.

[151] „Z danego odcinka odciąć wyznaczoną część"; „Z danej linii prostey odciąć część żądaną" [Czech 1817], s. 193.

[152] [Dedekind 1932], s. 152. Podobne przekonanie możemy spotkać jeszcze i dzisiaj: „Zdania nazwane przez niego [Euklidesa – P.B.] pewnikami – jak np. *całość jest większa od części* – mają charakter wypowiedzi o przedmiotach należących do bliżej nieokreślonej kategorii wielkości" [Borsuk, Szmielew 1972], s. 10.

Dyskusja między Dedekindem a Lipschitzem o *Stetigkeit* krąży wokół pytania, czy zasada ciągłości jest jakąś nową, wcześniej nieznaną zasadą, czy też jest to tylko inaczej sformułowana zasada, którą można znaleźć już w *Elementach*. Miarą niezrozumienia dzielącego tych matematyków niech będą cytowane przez Dedekinda słowa Lipschitza:

„Muszę przyznać, że nie przeczę, iż Pańska definicja [aksjomat ciągłości – P.B.] jest uprawniona, ale uważam, że różni się ona tylko co do formy zewnętrznej, nie zaś co do istoty, od tego, co stwierdzili już starożytni. Mogę powiedzieć tylko, że uważam definicję umieszczoną w ks. V Euklidesa jako definicja 5, a brzmiąca w wersji łacińskiej: rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multilicatae sese mutuo superare za równie zadowalającą, jak Pańska".[153]

Dedekind – jak wynika z kolejnego listu – wie, jest przekonany, że aksjomat Archimedesa i zasada ciągłości to różne zasady, acz – trzeba przyznać – nie umie tego jasno wyłożyć. Jest bowiem tak, że ani on, ani Lipschitz nie dysponują pojęciem ciała uporządkowanego i dlatego w referowanej dyskusji nie padnie argument, że ciało uporządkowane i archimedesowe nie musi być ciałem uporządkowanym w sposób ciągły.

23.1. Dzisiaj różnice między Dedekindem i Lipschitzem można sprowadzić do dwóch kwestii: (1) rola aksjomatu ciągłości w definiowaniu działań arytmetycznych, (2) niezależność aksjomatu ciągłości od pozostałych aksjomatów geometrii euklidesowej.

Ad (1). W końcowych partiach przytoczonego wyżej listu Dedekind pisze:

„Jeżeli ta własność [ciągłość – P.B.] nie mieści się wyraźnie w pojęciu dziedziny wielkości, to także cała przynależna doń dziedzina liczbowa pozostaje niezupełna i już z tego powodu niemożliwe są ogólnie obowiązujące definicje operacji arytmetycznych, ponieważ w takich pełnych luk dziedzinach liczbowych może nie istnieć suma, różnica itd. dwu rzeczywiście istniejących w niej liczb".[154]

Tego wątku Lipschitz nie podejmuje; najwyraźniej jest on dlań w ogóle niezrozumiały.

Ad (2). Tu różnice są wyraźne. Lipschitz pisze:

„To, co Pan wymienia jako zupełność dziedziny, która to zupełność może

[153] [Dedekind 1932], s. 149–150; „rationem habere ..." to aksjomat Archimedesa, w edycji Heatha jest to więc definicja V.4. W dokładnie takim brzmieniu i jako definicja V.5 występuje ona w edycji Ch. Claviusa, *Euclidis Elementorum*, Frankfurt 1607.

[154] [Dedekind 1932], s. 152.

być wyprowadzona z Pańskich zasad, to zbiega się to w istocie z podstawową własnością linii, bez której nikt nie potrafi jej sobie wyobrazić".[155]

Dedekind zaś odpowiada:

„Gdyby Euklides nie uważał za zbędne w objaśnieniach ks. V, które Pan przytoczył w swym przedostatnim liście w tłumaczeniu łacińskim, nazwać tak prostą własność wielkości, to z całą pewnością zdefiniowałby również na swój sposób o wiele bardzie skomplikowaną własność ciągłości, gdyby tylko potrzebne mu to było w jego systemie. Twierdzi Pan, że ta zupełność czy ciągłość są zrozumiałe same przez się i dlatego nie trzeba o nich *explicite* mówić [...] Dla mnie pojęcie przestrzeni jest całkowicie niezależne, dające się całkowicie oddzielić od wyobrażenia ciągłości [...] A jak sprawa ta przedstawia się u Euklidesa? Jeżeli zanalizuje się wszystkie założenia, te wyraźnie wypowiedziane, jak i te milcząco uczynione, na których opiera się cały gmach geometrii Euklidesa, to przypisać trzeba prawdziwość wszystkim jego twierdzeniom i wykonalność wszystkim jego konstrukcjom [...] nigdy, o ile mi wiadomo, nikt nie doszedł w ten sposób do ciągłości przestrzeni jako pewnego nierozłącznie z geometrią Euklidesa związanego warunku; cały jego system pozostanie nienaruszony także bez ciągłości".[156]

Rację w tym sporze łatwo dzisiaj przyznajemy Dedekindowi, dowodzi się bowiem, że aksjomat ciągłości jest niezależny od pozostałych aksjomatów geometrii euklidesowej.[157] Fakt ten – nie wiedzieć czemu – jest jednak ignorowany nawet przez matematyków, którzy wygłaszają opinie takie, jak na przykład ta oto:

„Dedekinda definicja [ciągłości – P.B.] daje wyraz naszej geometrycznej intuicji kontinuum, głęboko sięgającej swymi korzeniami klasycznej Grecji".[158]

Jeżeli twierdzenie o niezależności aksjomatu ciągłości nie jest tu wystarczającym argumentem, to dodajmy do tego jeszcze pytanie: co, jakie źródło, jaki zapis, jaki fakt, czy to historyczny, czy matematyczny, miałyby świadczyć o tym, że zasada ciągłości Dedekinda w jakikolwiek sposób, w jakiejkolwiek postaci była obecna w matematyce „klasycznej Grecji"? Gdy zaś idzie o „naszą – w domyśle: rodzaju ludzkiego – geometryczną intuicję

[155] [Dedekind 1932], s. 152.
[156] [Dedekind 1932], s. 154.
[157] Zob. [Borsuk, Szmielew 1972], §93. Tezę tę należy opatrzyć jednak oczywistym zastrzeżeniem, że to, co obecnie nazywamy geometrią euklidesową jest pewną interpretacją geometrii zawartej w *Elementach* – czy, jak pisze Dedekind – „geometrii Euklidesa".
[158] [Mainzer 1995(b)], s. 34.

kontinuum", to na pewno w przypadku Dedekinda i Lipschitza była ona odmienna.

**24.** W kolejnych punktach skupimy się na programie Dedekinda „arytmetycznej definicji liczby niewymiernej". Nie został on zrozumiany przez Lipschitza, gdyż, co pokażemy, w *Stetigkeit* nie jest on bynajmniej jednoznacznie przedstawiony. Przy okazji pokażemy też, że Dedekind i Lipschitz różnie interpretowali pojęcie wielkości w *Elementach*, co jeszcze bardziej powiększało ich wzajemne niezrozumienie.

24.1. Gdy w liście do Lipschitza Dedekind pisze:

„Całym zamierzeniem mojej pracy jest jedynie to, by pokazać, używając powszechnie znanego pojęcia przekroju (czego, o ile mi wiadomo nigdy wcześniej nie uczyniono), że bazując jedynie na arytmetyce liczb wymiernych, a zatem bez dołączania tego dość niejasnego i skomplikowanego pojęcia wielkości, można zdefiniować liczby niewymierne".[159]

Lipschitz odczytuje to jako nieznajomość *Elementów* polegającą na tym, że rozważane są tylko wielkości współmierne i odpowiada:

„Definicja równości dwóch stosunków [definicja V.5. – P.B.] rozstrzyga wszystko za jednym zamachem. Jeżeli nie uzna Pan tego, to mogę to sobie wytłumaczyć tylko tym, że nie rozważył Pan tego, iż Euklides przy wspomnianej definicji zakłada istnienie stosunków, które nie są równe stosunkowi dwóch liczb całkowitych. Zdecydował Pan na początku, by zakładać tylko liczby wymierne i wielkości, które za ich pomocą mogą być mierzone. Euklides postępuje w rozważanym fragmencie inaczej – i do tego w istocie sprowadza się różnica między Euklidesem a Panem. Euklides myśli o wielkości jako czymś określonym za pomocą miary pewnej ściśle zdefiniowanej linii i przy takim podejściu może wskazać linie, które pozostają do pewnej znanej linii w stosunku, który nie może być wyrażony za pomocą liczb całkowitych".[160]

Na co Dedekind, zakłopotany, odpowiada:

„Znam Euklidesa od trzynastego czy czternastego roku życia i podziwiam go [...]. Euklides może stosować swą definicje równych stosunków do wszystkich wielkości, które pojawiają się w jego systemie, tzn. których istnienie daje się uzasadnić, i to mu całkowicie wystarcza. Nie wystarcza to jednak

[159] [Dedekind 1932], s. 152.
[160] [Dedekind 1932], s. 153.

całkiem do zbudowania arytmetyki w oparciu o pojęcie stosunku wielkości (co zresztą nie było celem Euklidesa)".[161]

24.2. Dzisiaj powtarza się jak banał, że punktem wyjścia konstrukcji przedłożonej przez Dedekinda są liczby wymierne, Lipschitz natomiast pisze nie o samych liczbach wymiernych, ale o „liczbach wymiernych i wielkościach, które za ich pomocą mogą być mierzone".

Istotnie, jakkolwiek żadne „wielkości, które za pomocą liczb wymiernych mogą być mierzone" nie są użyte w konstrukcji liczb rzeczywistych, to jednak jest w rozprawie Dedekinda miejsce, w którym powtarzane jest rozumowanie Euklidesa związane z pojęciem wielkości i już chociażby dlatego deklarowane „czysto arytmetyczne" ujęcie liczby mogło być niezrozumiałe dla czytelników. Otóż w *Stetigkeit*, §2 *Porównanie liczb wymiernych z punktami prostej* Dedekind odwołuje się do, skądinąd w ogóle nie zdefiniowanego, pojęcia linii prostej. Czytamy:

„Ta analogia pomiędzy liczbami wymiernymi i punktami prostej staje się, jak wiadomo, rzeczywistym związkiem, gdy wybierzemy na prostej pewien określony punkt początkowy lub zerowy $o$ i pewną określoną jednostkę długości do mierzenia odcinków. Za pomocą tej ostatniej można dla każdej liczby wymiernej $a$ skonstruować odpowiadającą jej długość; jeżeli długość tę umieścimy z prawej lub lewej strony punktu $o$ [...] to otrzymamy określony punkt końcowy $p$, który może być określony jako odpowiadający liczbie $a$".[162]

Rozumowanie to, powtarzane po dzień dzisiejszy, nawiązuje do Euklidesa definicji wielkości wymiernej. Czytamy

„With these hypotheses, it is proved that there exist straight lines infinite in multitude which are commensurable and incommensurable respectively, some in length only, and some others in square also, with an assigned straight line. Let then the assigned straight line be called rational, and those straight lines which are commensurable with it, whether in length and in square or in square only, rational, but those which are incommensurable with it irrational".[163]

---

[161] [Dedekind 1932], s. 153.

[162] [Dedekind 1872], s. 139–140.

[163] [Euklides], X, def. 3. „Przy tym założeniu pokazuje się, że istnieje nieskończenie wiele linii prostych, które są współmierne i odpowiednio niewspółmierne, jedne tylko co długości, inne także co do kwadratu, z pewną ustaloną linią. Tę ustaloną linię nazwijmy wymierną, a linie proste, które są z nią współmierne, co do długości i kwadratu, czy tylko co do kwadratu, wymiernymi, te zaś, które są z nią niewspółmierne – niewymiernymi". Różnica między antycznym a dzisiejszym rozumieniem wymierności polega tylko na tym,

I najwyraźniej to rozumowanie ma na uwadze Lipschitz, gdy pisze:

„Euklides myśli o wielkości jako czymś określonym za pomocą miary pewnej ściśle zdefiniowanej linii i przy takim podejściu może wskazać linie, które pozostają do pewnej znanej linii w stosunku, który nie może być wyrażony za pomocą liczb całkowitych".[164]

Nieuzasadnione jest jednak stwierdzenie, że tak właśnie Euklides rozumie wielkość „w rozważanym fragmencie", tj. w definicji V.5.[165]

Dla Lipschitza – jak widzimy – pojęcie wielkości leżące u podstaw definicji proporcji związane jest ze szczególną konstrukcją, na podstawie której w *Elementach* definiowane jest pojęcie odcinka wymiernego i niewymiernego. Gdy natomiast Dedekind mówi o założeniach jakie leżą u podstaw definicji V.5, to wymienia część tych aksjomatów, które uznaliśmy za charakterystykę struktury wielkości, przypomnijmy:

„Aby ta definicja [definicja V.5 – P.B] miała w ogóle jakikolwiek sens, to o rzeczach zwanych tu wielkościami trzeba założyć tylko, że (1) z dwóch różnych wielkości tego samego rodzaju jedna zawsze może być uznana za większą, a druga za mniejszą, (2) jeżeli $A$ jest wielkością, to istnieje zawsze obiekt $nA$ tego samego rodzaju co $A$, który jest wielokrotnością $A$ odpowiadającą liczbie $n$. W dziele Euklidesa poza milcząco przyjętymi założeniami oraz poza założeniami zawartymi w Pańskich łacińskich słowach [chodzi o definicję V.4 – P.B.] nie znajdujemy nic na temat rozciągłości".[166]

24.3. Korespondencja Dedekinda z Lipschitzem jest wymownym dowodem kształtowania się nowego rozumienia wielkości, co przejawia się już w dwojakim rozumieniu liczby wymiernej. Z jednej strony, *via* definicja X.3, twierdzenie Talesa i fakty geometryczne, liczba wymierna jest pojmowana na podstawie rozumowań opartych na definicji V.5. i tak jest u Lipschitza. Z drugiej strony, Dedekind próbuje przedstawić liczby wymierne „czysto arytmetycznie", ale bynajmniej nie jest tu wszystko jasne: wiemy jedynie, że dodawanie i mnożenie liczb wymiernych są działaniami wewnętrznymi, że porządek liczb wymiernych jest liniowy i gęsty.[167] Ta *niedookreśloność* została wypełniona na dwa sposoby: tak, jak to uczynił Weber, przez podanie

że obecnie wymierny znaczy „rational in length", podczas gdy u Euklidesa wymierny to „rational in length or rational in square", tj. nie tylko $\frac{m}{n}$, ale także $\sqrt{\frac{m}{n}}$.

[164] [Dedekind 1932], s. 153.

[165] Euklidesa rozumienie wielkości przedstawiamy wyżej w pkt. 4.

[166] [Dedekind 1932], s. 150–151.

[167] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 7.

modelu oraz tak, jak to uczynił Hilbert w *Über den Zahlbegriff*, przez wyodrębnienie zasad zakładanych w dowodach, tj. przez podanie aksjomatów.[168] Jednocześnie pojęcie wielkości zyskało charakter porządkowo-algebraiczny, czy to jako „mnogość mierzalna" u Webera, czy jako ciało uporządkowane u Hilberta.

Opisując Księgę V *Elementów*, gdy podajemy charakterystykę struktury wielkości i odsłaniamy założenia przeprowadzanych dowodów, przyjmujemy taki sposób odczytywania tekstu matematycznego, który w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* dopiero kiełkuje. Jednocześnie jesteśmy świadomi, że jest to tylko jeden z możliwych sposób interpretowania tekstu matematycznego.

Z czasem, gdy uznano, że liczby rzeczywiste są ciałem uporządkowanym w sposób ciągły *odkryto*, że Dedekind w swojej konstrukcji wprost nawiązuje do teorii proporcji Eudoxosa. Gdy pojęcie liczby wyparło już antyczne pojęcie wielkości, a rozprawa *Stetigkeit und irrationale Zahlen* odczytywana jest przez pryzmat współczesnej konstrukcji, gdzie liczby wymierne są definiowane tak, jak to uczynił Weber, za interesujące uważa się powiązanie teorii liczb rzeczywistych z teorią Eudoxosa. To natomiast, że w *Stetigkeit* dopiero kształtuje się nowy, „arytmetyczny" sposób definiowana liczb zrywający z antyczną teorią proporcji i związaną z nią teorią wielkości jest już zapoznanym faktem.

[168] Zob. rozdz. *Aksjomaty*, pkt. 1–2.

# Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* 1888

**25.** Pokazaliśmy, że bez uwzględniania założeń (E2) i (E3) *teza* Heatha jest błędna. Przez dekady była ona jednak nie tylko powtarzana i dowodzona, ale czasami nawet uwiarygodniana słowami samego Dedekinda. Oto na przykład Michael Dummett w książce *Frege. Philosophy of Mathematics*, w związku z definicją V.5 pisze:

„Wkład Höldera polega na tym, że zauważył on ścisły związek między ideami Euklidesa i Dedekinda. Istotnie, przyjmując aksjomat Archimedesa, stosunek wielkości wyznacza pewien przekrój Dedekinda osi liczb wymiernych i w ten sposób związany jest z liczbą rzeczywistą odpowiadającą temu przekrojowi".[169]

I dalej, w przypisie:

„Hölder trafnie zauważa, że sam Dedekind w *Przedmowie* do *Was sind und was sollen die Zahlen?* przyznaje, iż taki związek [affinity] zachodzi".

25.1. Powyższe zdania pochodzą z rozdziału *Fregego Teoria Liczb Rzeczywistych*, z paragrafu, w którym Dummett omawia pracę Otto Höldera *Die Axiome der Quantität und die Lehre von Mass* (1901). W pracy tej – jak podaje Dummett – Hölder rozwija „ogólną teorię wielkości mierzalnych".

„Wielkość mierzalna" według Höldera to struktura relacyjna $\mathfrak{W} = (W, +, <)$, gdzie dodawanie jest łączne, a porządek – liniowy, gęsty i ciągły w sensie Dedekinda oraz zgodny (prawo- i lewostronnie) z dodawaniem, tj.

$$a > b \to a + c > b + c, \quad a > b \to c + a > c + b,$$

[169] [Dummett 1991], s. 283. Zob. także „To, że istnieje bliski związek między liczbami rzeczywistymi i stosunkami wielkości wiadomo już od dawana. W Księdze V *Elementów* Euklidesa jest próba ustanowienia teorii stosunków dowolnych wielkości, w której nie zakłada się liczb. Zarówno Dedekind jak i Weierstrass zdają się być dłużnikami Euklidesa" [Simons 1987], s. 32.

ponadto w $\mathfrak{W}$ nie ma elementu neutralnego.[170]

Dalej Dummett pisze:

„Hölder nie stosuje *explicite* języka teorii grup; wygląda na to, że jako pierwszy poprawnie udowodnił, że z ciągłości porządku wynika aksjomat Archimedesa; pokazał też, że z aksjomatu Archimedesa wynika przemienność dodawania".[171]

25.2. W odróżnieniu od Fregego, Hölder nie buduje teorii liczb rzeczywistych na pojęciu stosunku. Dummett znajduje jednak między nimi pewne podobieństwo, otóż obydwaj rozwijają aksjomatyczne ujęcie pojęcia wielkości:

„Postępuje on [Hölder – P.B.] w ten sposób, że charakteryzuje pojęcie stosunku dwóch wielkości i z każdym takim stosunkiem wiąże liczbę rzeczywistą. Jednak, inaczej niż Frege, nie korzysta z tego w konstrukcji liczb rzeczywistych, a raczej najpierw definiuje liczby wymierne dodatnie [...], a liczby rzeczywiste definiuje metodą Dedekinda [...] identyfikując liczbę rzeczywistą z odpowiednim przekrojem osi liczb wymiernych".[172]

Dalej padają przytoczone wyżej zdania o tym, że Hölder „zauważył ścisły związek między ideami Euklidesa i Dedeinda", po czym Dummett pisze:

„To wielka szkoda, że Frege i Hölder nie znali swoich prac. Gdyby [Frege – P.B.] musiał odnieść się do teorii Höldera [...], to nie mógłby tak łatwo, jak to w istocie zrobił, odrzucić teorii Dedekinda: jasno ona pokazuje, jak może być zastosowana do stosunków wielkości. [...] Hölder, jak każdy z wyjątkiem Fregego, najpierw definiuje liczby wymierne, w istocie jako stosunki dodatnich liczb całkowitych, a następnie poprzez liczby wymierne definiuje liczby rzeczywiste".[173]

I następnie,

„Jest istotna różnica metodologiczna [w podejściu Dedekinda i Fregego – P.B.]: według Fregego teoria wielkości jest niezbywalną częścią podstaw analizy, a nie dodatkiem do matematyki stosowanej. Ale matematyczna różnica jest znacznie mniejsza. W szczególności, gdyby Frege doszedł do zdefiniowania stosunków [...], musiałby użyć definicji Euklidesa, czy jakiejś innej

[170] Zob. [Dummett 1991], s. 282.
[171] [Dummett 1991], s. 282; zob. też niżej rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 3, 11.
[172] [Dummett 1991], s. 282.
[173] [Dummett 1991], s. 283.

bardzo podobnej, i w ten sposób bardzo by się zbliżył do Dedekinda koncepcji liczb rzeczywistych".[174]

25.3. W cytowanych zdaniach interesuje nas nie filozofia Gottloba Fregego, ale interpretacja, dokładniej: dezinterpretacja rozprawy *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, jakiej dopuszcza się Dummett.

Po pierwsze, oryginalność swojej konstrukcji Dedekind upatruje przede wszystkim w zasadzie ciągłości oraz w zerwaniu z tradycją definiowania liczby na podstawie pojęcia stosunku. Tak więc w tym punkcie podejście Dedekinda i Fregego są diametralnie różne. Dummett nie zauważył tego, bo jakkolwiek Frege wychodzi od archaicznej kategorii wielkości mierzalnej, to jednak traktuje ją w zupełnie nowy, abstrakcyjny sposób i na tej podstawie może być wpisany w nurt rodzącej się algebry. Istotnie, w pracach pionierów współczesnej algebry Webera, Höldera, Hahna[175], „wielkość mierzalna" została *przekształcona* w pojęcie grupy uporządkowanej.

Po drugie, pisząc, że „Hölder, tak jak wszyscy z wyjątkiem Fregego, najpierw definiuje liczby wymierne, w istocie jako stosunki dodatnich liczb całkowitych, a następnie poprzez liczby wymierne definiuje liczby rzeczywiste", Dummett nie docenia trudności związanych z definicją liczby wymiernej. Pod koniec XIX wieku albo ktoś, tak jak Weber, wiedział jak zdefiniować liczby wymierne i ich porządek, albo jak ćma krążył wokół gasnącego już blasku antycznej teorii proporcji.[176]

Jest mało prawdopodobne, aby Hölder nie znał *Lehrbuch der Algbera* Webera i chyba dlatego przedstawiona przezeń konstrukcja liczb rzeczywistych tak bardzo jest podobna do konstrukcji Webera. Dummett natomiast zdaje się sugerować, że Hölder przedstawia konstrukcję Dedekinda, a jego oryginalność i „wkład polega na tym, że zauważył on ścisły związek między ideami Euklidesa i Dedekinda". Dummett najwyraźniej jest przekonany, że tak właśnie, tj. wychodząc od liczb wymiernych, Dedekind konstruuje liczby rzeczywiste, a w XX wieku dodano do tego konstrukcję liczb naturalnych i całkowitych. Istotnie, jest to wręcz powszechne przekonanie. Dla przykładu zobaczmy:

„Precyzyjna konstrukcja liczb rzeczywistych z liczb wymiernych została po-

[174] [Dummett 1991], s. 283.

[175] Zob. Hans Hahn, *Über die Nichtarchimedischen Grössensysteme* (1907), zob. [Ehrlich 1995] oraz [Ehrlich 1994], s. xviii.

[176] W związku z frazą „liczba wymierna jest w istocie stosunkiem liczb całkowitych" zauważmy, że w matematyce liczba wymierna jest klasą abstrakcji, a nie stosunkiem. Można owszem pokazać związek między stosunkiem liczb, w rozumieniu Euklidesa, a współczesną definicją liczby wymiernej; zob. wyżej pkt. 14. Ale Dummett najwyraźniej nie zna tych zależności.

dana w drugiej połowie XIX wieku niezależnie przez Cantora, Meray'a, Dedekinda i Weierstrassa. Przyjmujemy, że czytelnik zna standardową konstrukcję liczb rzeczywistych, w której wychodząc od zbioru wszystkich liczb naturalnych, przechodzi się do liczb całkowitych i następnie do liczb wymiernych, a ostatni krok polega na uzupełnieniu jakąś metodą zbioru wszystkich liczb wymiernych".[177]

„Dedekind (a przed nim autor piątej Księgi [*Elementów* – P.B.] Euklidesa – uważa się, że był to Eudoxos) skonstruował liczby rzeczywiste z liczb wymiernych".[178]

Wiemy już, że klasyczna konstrukcja liczb wymiernych pochodzi nie od Dedekinda, ale od Webera.

Po trzecie, zauważmy istotną modyfikację *tezy* Heatha w wersji przyjętej przez Dummetta: stosunkowi wielkości $x : y$ odpowiada tu nie przekrój $(A_{x,y}, B_{x,y})$, ale „związana z nim liczba rzeczywista" $r$, symbolicznie:

$$x : y \mapsto (A_{x,y}, B_{x,y}) \mapsto r.$$

W tym ujęcie, przekrój $(A_{x,y}, B_{x,y})$ jest tylko sposobem identyfikowania liczby rzeczywistej $r$, która jest czymś różnym od przekroju $(A_{x,y}, B_{x,y})$;

„Dedekind skonstruował zbiór, którego elementami są zbiory liczb wymiernych, które w sposób jedno-jednoznaczny mogą być przyporządkowane liczbom rzeczywistym".[179]

---

[177] [Cichoń et al. 1995], s. 141.

[178] [Conway 2001], s. 3.

[179] [Dummett 1991], s. 250. Tę samą myśl znajdujemy w paragrafie poświęconym uwagom Fregego na temat pracy [Cantor 1872]. Frege rozważa dwie interpretacje zdania „ciągowi (1) przypisujemy znak $b$" (zob. rozdz. *Konstrukcja Cantora*, pkt. 5), co w książce Dummetta jest tak opisane: „symbol $b'$ oznacza dany ciąg fundamentalny [...] przy tej interpretacji symbole takie, jak $b'$ są zbędne, bo mamy tylko ciągi fundamentalne, a nie mamy żadnych liczb rzeczywistych. Ciąg fundamentalny mógłby wyznaczać pewną liczbę rzeczywistą, gdybyśmy wiedzieli czym są liczby rzeczywiste, ale właśnie tego nam nie powiedziano. [...] [według drugiej interpretacji – P.B.] nie jest tak, że Cantor wybiera etykiety dla każdego ciągu fundamentalnego, ale wiąże z nim pewną liczbę, generalnie, nie będzie to liczba wymierna. 'Liczby te', komentuje Frege, 'są po części nowe, jak dotąd nie rozważane, i wyznaczone są przez związane z nimi ciągi'. Ta druga interpretacja jest tak oczywista i poprawna, że czytelnik może być lekko zirytowany marnowaniem czasu na szczegółowe badania teorii Cantora z punktu widzenia starej teorii, jednakże z perspektywy Fregego ta druga interpretacja niewiele zmienia na lepsze" [Dummett 1991], s. 265. Rzecz jednak w tym, że to, co dla Dummetta jest „oczywiste i poprawne", dla nas jest fałszywą interpretacją: w Cantora teorii liczb rzeczywistych nie ma żadnych innych obiektów niż ciągi fundamentalne.

W *Stetigkeit und irrationale Zahlen* niczego podobnego jednak nie ma: w koncepcji Dedekinda nie ma liczb rzeczywistych, które by odpowiadały przekrojom, bo liczba rzeczywista to przekrój osi liczb wymiernych. Zapisując to symbolicznie otrzymamy:

$$x : y \mapsto (A_{x,y}, B_{x,y}) \mapsto (A_{x,y}, B_{x,y}),$$

co wyraźnie pokazuje, jak Dummett strywializował, albo po prostu przeinaczył Dedekinda konstrukcję liczb rzeczywistych.[180]

**26.** Przejdźmy teraz do uwagi, że „sam Dedekind w *Przedmowie* do *Was sind und was sollen die Zahlen?* przyznaje, iż zachodzi związek między ideami Euklidesa i Dedekinda".[181]

Przy założonym w pracy ontologicznym rozumieniu tekstu, opinia samego Dedekinda o *Stetigkeit und irrationale Zahlen* nie ma żadnej wyróżnionej wartości, tym niemniej nie ma powodu, aby nie sprawdzić, jak Dedekind oceniał swoją rozprawę i czy istotnie dostrzegał jakieś podobieństwo między przedłożoną konstrukcją a definicją V.5 z *Elementów* Euklidesa.

Przytoczymy niżej obszerne fragmenty *Przedmowy* do pierwszego wydania *Was sind und was sollen die Zahlen?* Pozwoli to nam dokładniej uchwycić sens zdania, w którym Dedekind rzekomo przyznaje, że istnieje jakieś podobieństwo, jakiś związek między definicją V.5 a jego konstrukcją liczb niewymiernych. Czytamy:

„W mojej wcześniejszej rozprawie o ciągłości (1872) pokazałem już, przynajmniej w odniesieniu do liczb niewymiernych, jak postępując, krok po kroku – stwarzając zero, liczby ujemne, wymierne, niewymierne, zespolone – redukując zawsze do pojęć wcześniejszych i, co ważne, bez wprowadzania pojęć obcych (takich na przykład, jak wielkość mierzalna), można rozszerzać pojęcie liczby".[182]

„Korzystając z okazji przedstawię kilka uwag o mojej wcześniejszej, wspomnianej wyżej pracy *Ciągłość i liczby rzeczywiste*. Przedstawiona tam teoria liczb niewymiernych, opracowana jesienią roku 1858, jest oparta na zjawisku występującym w dziedzinie liczb wymiernych (§4), które nazwałem przekrojem i które jako pierwszy dokładnie zbadałem; jej zwieńczeniem jest dowód ciągłości nowej dziedziny liczb rzeczywistych (§5, IV). Moim zdaniem, jest

[180] W interpretacji, jaką przedstawiliśmy w rozdziale *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 11, liczba rzeczywista jest aspektem przekroju i w tym sensie jest czymś różnym od przekroju, ale w komentarzu Dummetta bynajmniej nie o to chodzi, co wyraźnie pokazuje jego uwaga o konstrukcji Cantora.

[181] [Dummett 1991], s. 283.

[182] [Dedekind 1888], s. v–vi.

ona trochę prostsza i łatwiejsza, niż dwie inne teorie, różne od mojej i od siebie nawzajem, ściśle i rygorystycznie przedstawione przez Weierstrassa i G. Cantora. Od tego czasu teoria ta została bez żadnych istotnych modyfikacji przyjęta przez U. Dini w jego *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (Piza 1878). W tym wykładzie moje nazwisko pada, ale nie w związku z czysto arytmetycznym zjawiskiem przekroju, lecz przy omawianiu istnienia wielkości mierzalnej odpowiadającej przekrojowi. Stąd łatwo może powstać przypuszczenie, że moja teoria oparta jest na rozważaniu takich wielkości. Nic bardziej błędnego. W §3 artykułu wyjaśniam, podając racje, dlaczego całkowicie odrzucam pojęcie wielkości mierzalnej. [...] Aby to jeszcze jaśniej przedstawić podam następujący przykład".[183]

Dalej Dedekind pokazuje, że przestrzeń złożona z liczb (rzeczywistych) algebraicznych „jest wszędzie nieciągła";

„Mimo tej nieciągłości, mimo luk występujących w tej przestrzeni, wszystkie, o ile mi wiadomo, konstrukcje przeprowadzane w *Elementach* Euklidesa mogą być przeprowadzone zarówno w tej, jak i w doskonale ciągłej przestrzeni".[184]

Co znaczy, że biorąc pod uwagę zasadę ciągłości, liczby rzeczywiste są czymś różnym od „wielkości mierzalnych" występujących w *Elementach*.

I wreszcie fragment, w którym wymieniona jest definicja V.5.

„Taka sama teoria liczb niewymiernych oparta na zjawisku przekroju znajduje się w *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* autorstwa J. Tannery (Paryż 1886). Jeśli dobrze zrozumiałem przedmowę, autor doszedł do swojej teorii niezależnie, to jest zanim poznał nie tylko mój artykuł, ale i wspomniane wcześniej *Fondamenti* Diniego. Zgodność ta zdaje się potwierdzać to, że moja koncepcja odpowiada naturze rzeczy, fakt uznany już wcześniej przez innych matematyków, np. przez Pascha w jego *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung* (Lipsk 1883). Nie mogę się jednak całkiem zgodzić z Tannery, gdy pisze, że teoria ta jest rozwinięciem myśli pochodzącej od J. Bertranda i zawartej w jego *Traité d'arithmétique* – tej mianowicie, że liczba niewymierna jest zdefiniowana na podstawie opisu wszystkich liczb wymiernych mniejszych i wszystkich od liczby, która ma być zdefiniowana. Jeżeli chodzi o to zdanie (skądinąd powtarzane przez Stolza – najwyraźniej bez dokładnego sprawdzenia – w przedmowie do drugiej części

[183] [Dedekind 1888], s. vi–vii.

[184] [Dedekind 1888], s. vii. Przykład ten poda później Poincarè w recenzji pierwszego wydania *Grundlagen der Geometrie* Hilberta; zob. [Poincaré 1902].

jego *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* (Lipsk 1886)) ośmielam się zauważyć co następuje: Przekonanie, że liczba niewymierna ma być w pełni zdefiniowana, przez wyżej przedstawiony opis, było powszechne u wszystkich matematyków zajmujących się pojęciem niewymierności na długo przed Bertrandem. Przecież w ten właśnie sposób aproksymowany jest niewymierny pierwiastek równania. A jeżeli ktoś, jak Bertrand, zwłaszcza w swej książce (jej ósme wydanie z roku 1885 leży przede mną), liczbę niewymierną traktuje jako stosunek dwu mierzalnych wielkości, to taki sposób wyznaczania jej jest już w najjaśniejszy możliwy sposób przedstawiony we wspaniałej definicji, którą Euklides podaje jako równość dwóch stosunków (*Elementy*, V. 5). To samo przekonanie starożytnych było źródłem i mojej, i Bertranda, i wielu innych mniej lub bardziej udanych prób ustanowienia podstaw arytmetyki liczb niewymiernych. I chociaż dotąd można było w pełni zgodzić się z Tannery, to po dokładnym zbadaniu, nie można nie zauważyć, że koncepcja Bertranda, w której zjawisko przekroju, w jego logicznej czystości nie jest nawet wymienione, w żaden sposób nie jest podobna do mojej, gdyż od razu przyjmuje istnienie wielkości mierzalnych, pojęcie, które z powodów wyżej przedstawionych, całkowicie odrzucam."[185]

26.1. Jedna warstwa, nazwijmy ją prawną, jest tu oczywista: chodzi o to, kto pierwszy zdefiniował liczbę niewymierną jako przekrój osi liczb wymiernych.

Gdyby pomysły matematyczne były objęte prawem autorskim, to przemowa Richarda Dedekinda w sprawie o plagiat przed Sądem Cywilnym w Paryżu zapewne tak by wyglądała:

*Pan Jules Tannery podaje, że ideę zdefiniowania liczby niewymiernej za pomocą pewnego zbioru liczb wymiernych przejął z książki Josepha Bertranda* Traité d'arithmétique *(1849), a nie z pracy Ulisse Diniego* Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali *(Piza 1878), czy wprost z mojej rozprawy* Stetigkeit und irrationale Zahlen *(1872). Jednakowoż w pracy Pana Bertranda definicja liczby oparta jest na pojęciu wielkości, ale jeżeli liczba ma być tak rozumiana, to owa idea bynajmniej nie pochodzi od Pana Bertranda; to, że liczba niewymierna jest jakoś związana z liczbami wymiernymi jest rzeczą znaną od dawien dawna, ta myśl jest już zapisana w sławnej definicji 5 z Księgi V* Elementów *Euklidesa. Gdy jednak tę dość ogólną myśl, że danej liczbie niewymiernej odpowiada jakiś zbiór liczb wymiernych spróbujemy wyrazić w sposób ścisły, gdy spróbujemy powiedzieć jakiemu to zbiorowi liczb wymiernych ma być przypisana liczba niewymierna, i gdy wreszcie odpowiemy, że ma to być przekrój osi liczb wymiernych, to ta idea, wedle mojej naj-*

[185] [Dedekind 1888], s. viii–ix.

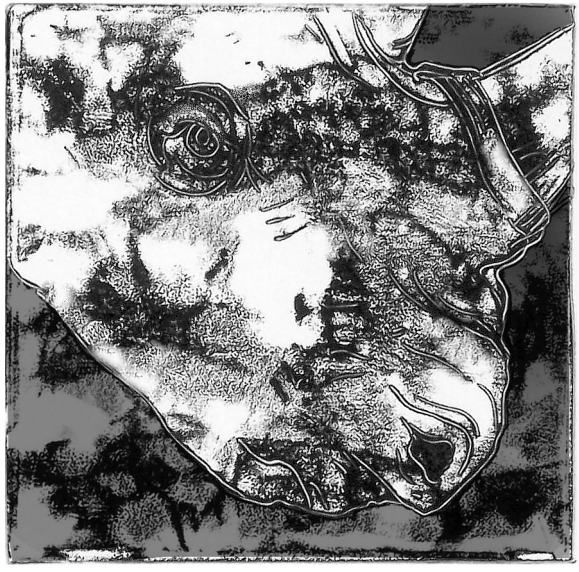
*lepszej wiedzy, po raz pierwszy została przedstawiona szerokiej publiczności w roku 1872 wraz z opublikowaniem mej rozprawy* Stetigkeit und irrationale Zahlen.

To, czy Tannery popełnił plagiat, każdy może dzisiaj łatwo ocenić, bo jego *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* jest dostępny w *Globalnej Sieci*. Dla nas istotne jest, że w *Przedmowie* do *Was sind und was sollen die Zahlen?* Dedekind nawiązuje do definicji V.5, by podważyć rzetelność słów Tannery'ego: ogólna myśl wiązania liczby niewymiernej z liczbami wymiernymi pochodzi bynajmniej nie od Bertranda, ale już od Euklidesa, natomiast istota koncepcji przedstawionej w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* polega na tym, aby liczbę niewymierną związać z przekrojem osi liczb wymiernych, a tego nie ma ani u Euklidesa, ani u Bertranda.[186]

26.2. Oceniając wypowiedź Dedekinda w płaszczyźnie historycznej, widzimy, co jest akcentowane: definicja liczby podana w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* nie jest zależna od pojęcia wielkości. Jeżeli więc przypisuje się Dedekindowi świadome nawiązanie do definicji V.5, to ignoruje się fakt, który on sam uznawał za szczególne osiągnięcie, mianowicie zerwanie z tradycją antyczną i oddzielenie pojęcia liczby od pojęcia wielkości mierzalnej.

[186] W *Przedmowie* do *Stetigkeit* Dedekind skrupulatnie wylicza fakty świadczące o tym, że istotę ciągłości „odkrył" na wiele lat przed publikacjami Heine'go i Cantora. To pokazuje, jak bardzo był wrażliwy na punkcie pierwszeństwa odkrycia; zob. „Chodzi jeszcze tylko o to, aby [...] uzyskać jakąś rzeczywistą definicję istoty ciągłości. Udało mi się to 24 listopada 1858 r. i w kilka dni potem zakomunikowałem o wyniku moich rozważań mego drogiego przyjaciela Durège'a. Później tłumaczyłem też ten wynik temu czy innemu z moich uczniów, a także tutaj w Brunszwiku na zebraniu towarzystwa naukowego profesorów wygłosiłem poświęcony temu wykład" [Dedekind 1872], s. 136–137.

# ARCHIMEDES, ARCHIMEDES



# Ciało uporządkowane

Przypomnijmy, ciało $\mathcal{F}$ jest charakterystyki zero, gdy najmniejsze ciało zawarte w $\mathcal{F}$ jest izomorficzne z ciałem liczb wymiernych $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$; $\mathcal{F}$ jest charakterystyki $p$, gdzie $p$ jest liczbą pierwszą, gdy najmniejsze ciało zawarte w $\mathcal{F}$ jest izomorficzne z ciałem $\mathcal{Z}_p$.[1]

**1.** Od Hilberta pochodzi definicja: ciało przemienne $\mathcal{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ jest ciałem uporządkowanym $\mathfrak{F} = (F, +, \cdot, 0, 1, <)$, gdy porządek $<$ jest liniowy oraz zgodny z działaniami, tzn.

$$a < b \to a + c < b + c,$$

$$(a < b,\ 0 < c) \to ac < bc.\ ^{2}$$

W ciele uporządkowanym zachodzi:
(1) $a > 0 \to -a < 0$,
(2) $a \neq 0 \to a^2 > 0$,
(3) $0 < a < b \to 0 < b^{-1} < a^{-1}$.

Z zależności tych wynika, że $1 > 0$, a następnie, że $n > 0$ oraz $n^{-1} > 0$, gdzie $n$ oznacza term

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-razy}.$$

Stąd zaś dostajemy, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ jest $\frac{m}{n} > 0$.

W rezultacie z tych prostych faktów otrzymujemy, po pierwsze, że istnieje tylko jeden porządek zgodny z działaniami w ciele uporządkowanym liczb wymiernych $\mathfrak{Q}$. Po drugie, że ciało uporządkowane nie jest ciałem skończonym. Nie istnieje zatem taki porządek na zbiorze $\{0, \ldots, p-1\}$, aby ciało $\mathcal{Z}_p$ było ciałem uporządkowanym. Po trzecie, że jeżeli w ciele $\mathcal{F}$ istnieje taki element $a$, że $a^2 = -1$, to nie istnieje porządek na $F$, który byłby zgodny

[1] Aby uniknąć powtórzeń, przyjmujemy, że w rozdziale tym litera $p$ oznacza liczbę pierwszą. Przypomnijmy jednocześnie, że ciało $\mathcal{Z}_p$ to zbiór $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ z dodawaniem i mnożeniem *mod p*.

[2] Zob. [Hilbert 1900]; zob. też rozdz. *Aksjomaty*, pkt. 1.

z działaniami w $\mathcal{F}$. Nie istnieje zatem porządek na zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$, który byłby zgodny z działaniami w ciele liczb zespolonych $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$.

W ciele uporządkowanym nie ma ani elementu najmniejszego, ani największego, a porządek $<$ jest gęsty:
(4) $a < b \to a < \frac{a+b}{2} < b$.

1.1. W dowolnym ciele uporządkowanym definiowana jest wartość bezwzględna:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dla } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{dla } a < 0. \end{cases}$$

Posiada ona te same podstawowe własności, co wartość bezwzględna liczby rzeczywistej:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|, \qquad |ab| = |a||b|, \qquad ||a| - |b|| \leqslant |a-b|.$$

Na tej podstawie w ciele uporządkowanym można zdefiniować ciąg Cauchy'ego, granicę ciągu oraz powtórzyć wszystkie te twierdzenia teorii ciągów (np. ciąg posiada co najwyżej jedną granicę, iloczyn ciągów Cauchy'ego jest ciągiem Cauchy'ego, ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego), które nie są związane ze specyficznymi własnościami porządku w danym ciele (ciągłość w sensie Dedekinda, zupełność w sensie Cauchy'ego, ośrodkowość).

Ciało uporządkowane $\mathfrak{F}$ będziemy nazywać ciałem uporządkowanym zupełnym, gdy dla każdego ciągu Cauchy'ego $(a_n) \subset F$ istnieje takie $a \in F$, że zachodzi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \forall n [k < n \to |a_n - a| < \varepsilon].$$

1.2. W ciele uporządkowanym aksjomat Archimedesa jest formułowany jak następuje

$$\forall a, b \exists n \left[(0 < a < b) \to na > b\right],$$

lub w wersji równoważnej

$$\forall a \exists n [n > a].$$

Ciało uporządkowane, w którym spełniony jest aksjomat Archimedesa nazywane jest archimedesowym.

Z definicji zbieżności ciągu w ciele uporządkowanym otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n [\frac{1}{n} < \varepsilon].$$

Jednocześnie mamy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n [\frac{1}{n} < \varepsilon] \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n [n > \varepsilon].$$

Tak więc w ciele uporządkowanym $\mathfrak{F}$ zbieżność ciągu $(\frac{1}{n})$ do 0 jest równoważna temu, że ciało $\mathfrak{F}$ jest archimedesowe.

1.3. Niech $\mathfrak{F}$ będzie ciałem uporządkowanym, a $\mathfrak{F}_Q$ jego ciałem ułamków; elementy ciała $\mathfrak{F}_Q$ nazywamy ułamkami i oznaczamy jako $\mathbb{Q}_F$. W ciele $\mathfrak{F}$ aksjomat Archimedesa jest też równoważny warunkowi: zbiór ułamków $\mathbb{Q}_F$ jest gęsty w zbiorze $(F, <)$:

$$\forall a, b \in F \exists q \in \mathbb{Q}_F [a < b \to a < q < b].^3$$

Jeden z kroków dowodu, w którym z aksjomatu Archimedesa wyprowadzana jest gęstość $\mathbb{Q}_F$ w $(F, <)$ tak przebiega: Niech będzie, że $0 < a < b$ oraz $a, b \notin \mathbb{Q}_F$. Istnieją takie $n,\ m$, że $\frac{1}{n} < (b - a)$ oraz $\frac{m}{n} < b < \frac{m+1}{n}$. Wówczas zachodzi $a < \frac{m}{n} < b$.

Jest to standardowe rozumowanie, rzadko jednak zauważa się,[4] że wyznaczając liczbę $m$ korzysta się nie tylko z aksjomatu Archimedesa, ale i z faktu, że zbiór liczb naturalnych jest dobrze uporządkowany: $m + 1$ jest najmniejszą liczbą w zbiorze $\{k \in N : k > nb\}$, aksjomat Archimedesa gwarantuje zaś, że zbiór ten jest niepusty.[5]

Wskazany trik jest wręcz archaiczny – rozumowanie to odnajdujemy już w Księdze V *Elementów* Euklidesa.[6] W wykładach analizy matematycznej, nawet wtedy, gdy zasada indukcji jest przedstawiona *explicite*, nie wykazuje się, że jest ona równoważna temu, że zbiór liczb naturalnych $(\mathbb{N}, <)$, gdzie $<$ jest porządkiem liczb rzeczywistych zacieśnionym do $\mathbb{N}$, jest zbiorem dobrze uporządkowanym. Zabieg, o którym mówimy jest stosowany również w twierdzeniu o przedstawieniu liczby rzeczywistej za pomocą ułamka dziesiętnego. Wówczas to przyjmuje się, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $r$ istnieje taka liczba całkowita $m$, że zachodzi $m \leqslant r < m + 1$.[7]

**2.** Ciało uporządkowane w sposób ciągły jest ciałem archimedesowym. Dowód prowadzony jest nie wprost:

Niech $(F, +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem uporządkowanym w sposób ciągły, niech $a$, $b$ będą takie, że $0 < a < b$ oraz $\forall n[na \leqslant b]$. Wtedy zbiór $\{na \in F : n \in \mathbb{N}\}$

[3] Zob. [Cohen, Ehrlich 1963], s. 87–88.

[4] W istocie nie trafiliśmy na taką książkę.

[5] Zob. [Cohen, Ehrlich 1963], s. 87, [Rudin 1982], s. 13, gdzie istnienie liczby $m$ jest przyjmowane bez komentarza. W innym zaś miejscu, gdy za pomocą tego samego triku Rudin wyznacza liczbę $m$ z emfazą pisze: „Zauważmy, że wykorzystujemy tu własność archimedesowości ciała $Q$!" [Rudin 1982], s. 21.

[6] Zob. dowód twierdzenia V.8; zob. też wyżej rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 6.

[7] Zob. [Fichtenholtz 1985], s. 14, [Rudin 1982], s. 14; aczkolwiek u Fichtenholtza dopiero na s. 25 jest pokazane, że w $\mathfrak{R}$ jest spełniony aksjomat Archimedesa.

jest ograniczony z góry i ma w zbiorze $(F, <)$ kres góry; przyjmijmy $\gamma = sup\{na \in F : n \in \mathbb{N}\}$. Z jednej strony jest $\forall n[na \leqslant \gamma]$, z drugiej – dla pewnego $n$ zachodzi $\gamma - a < na$, a stąd $\gamma < (n+1)a$. Sprzeczność.[8]

**3.** Zależność między zasadą ciągłości Dedekinda a pewnikiem Archimedesa zauważono najpierw na terenie geometrii.[9] To, że z aksjomatu ciągłości wynika aksjomat Archimedesa chyba jako pierwszy próbował wykazać Otto Stolz. Philip Ehrlich podaje, że w książce *Vorlesungen über allgemaine Arithmetik* (1885) Stolz ogłosił „swoje dwa znaczące odkrycia z lat 1881–1883":

„(i) Istnieją systemy wielkości [...] niearchimedesowych;
(ii) Systemy wielkości ciągłych w sensie Dedekinda są archimedesowe".[10]

Dalej Ehrlich pisze, że pierwszy poprawny dowód twierdzenia (ii) podany jest w pracy R. Bettazzi *Teoria Della Grandezze* (1890).

Dowód Stolza najprawdopodobniej tak wyglądał:[11]

Dowód prowadzony jest nie wprost. Niech punkt $B$ leży między punktami $A$ i $C$ i niech dla każdego $n$ będzie $nAB < AC$. Wówczas para $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, gdzie

$$\mathcal{A} = \{H \in AC : \forall n[nAH \leqslant AC]\},\ \mathcal{B} = \{K \in AC : \exists n[nAK > AC]\},$$

tworzy przekrój odcinka $AC$. Niech $M$ jest punktem wyznaczonym przez ten przekrój. Niech $Y$ leży między $M$ i $C$ i niech $MY < AM$. Wówczas punkt $X$, który jest środkiem odcinka $AY$ należy do klasy $\mathcal{A}$. Z tego, że dla pewnej liczby naturalnej $n$ jest $nAY > AC$ wynika, że $2nAX > AC$, a to jest sprzeczne z tym, że $X \in \mathcal{A}$.

Dowód, jak widzimy, oparty jest na założeniu, że istnieje punkt Y o zadanych własnościach, w szczególności, że punkt $M$ jest różny od $C$. Tym niemniej, można by przyjąć, że nie na odcinku $MC$, ale na półprostej $AC^{\rightarrow}$, leży taki punkt $Z$, że $AM \equiv MZ$, a punkt $Y$ leży między $M$ i $Z$.

[8] Zob. [Birkhoff, Mac Lane 1957], s. 102, [Bridges 1998], s. 14, [Cichoń et al. 1995], s. 146, [Rudin 1982], s. 14. Dla porządku odnotujmy, że w pracy F. Loonstra, *Ordered groups* (1949) udowodniono twierdzenie: gdy $\mathfrak{G} = (G, +, <)$ jest grupą uporządkowaną, a porządek jest ciągły w sensie Dedekinda, to $\mathfrak{G}$ jest grupą archimedesową; zob. [Fuchs 1963], s. 47. Ponadto w *Lehrbuch der Algebra* (1895) H. Webera można znaleźć dowód faktu, że grupa addytywna liczb rzeczywistych jest archimedesowa; zob. wyżej rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 16.2.

[9] Pojęcie ciała uporządkowanego pochodzi z pracy [Hilbert 1900]; zob. rozdz. *Aksjomaty*.

[10] [Ehrlich 1994(b)], s. xvi.

[11] Referujemy za [Heath 1956], t. III, s. 16, gdzie dowód ten jest z kolei powtarzany za pracą: G. Vitali, *Questioni rigulandi le matematiche elementari*. Nie udało się nam ustalić, gdzie i kiedy opublikowano ten artykuł.

Wówczas należałoby jeszcze przedstawić aksjomaty o odkładaniu odcinków oraz takie, z których wynika istnienie środka odcinka, a wreszcie pokazać, że $X \in \mathcal{A}$.[12]

3.1. Przejdźmy do wersji współczesnej. W wykładzie Karola Borsuka i Wandy Szmielew *Podstawy geometrii* zależność między aksjomatem ciągłości a aksjomatem Archimedesa tak jest przedstawiana:

„Weźmy półprostą $A$ o początku $a_0$, odcinek $cd$ i punkt $b \in A$ taki, że $a_0b > cd$. Istnieje wówczas liczba naturalna $n$ taka, że wśród punktów $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, $a_{n+1} \in A$ określonych przez warunki

$$a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n \prec a_{n+1}, \quad a_{k-1}a_k \equiv cd \ \ dla\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1,$$

punkty $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ leżą w odcinku $(a_0b\rangle$, a punkt $a_{n+1}$ następuje po punkcie $b$".[13]

Dowód prowadzony jest nie wprost. Przypuśćmy, że istnieje taki ciąg punktów $(a_k)$ półprostej $A$, że

$$a_k \prec a_{k+1}, \quad a_{k-1}a_k \equiv cd \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots$$

i dla każdego $k$ jest $a_k \in (a_0, b\rangle$. Wówczas jest tak, że dla każdego $k$ jest $a_k \in (a_0, b)$. Przyjmijmy

$$X_1 = \{x \in (a_0b) : \exists k[x \preceq a_k]\}, \qquad X_2 = \{x \in (a_0b) : \forall k[a_k \prec x]\}.$$

Para $(X_1, X_2)$ jest przekrojem Dedekinda odcinka $(a_0b)$. Po pierwsze, każdy element zbioru $X_1$ poprzedza dowolny element zbioru $X_2$. Po drugie, zbiór $X_1$ jest niepusty, bo $(a_k) \subset X_1$. Zbiór $X_2$ też jest niepusty: Na podstawie aksjomatu o odkładaniu odcinków, przy założeniu $a_0b > cd$, odkładając w punkcie $b$ odcinek $cd$, znajdujemy taki punkt $b_1$, że $a_0 \prec b_1 \prec b$ i $bb_1 \equiv cd$. Punkt $b_1$ należy do $X_2$, bo w przeciwnym razie byłoby

$$b_1 \prec a_k \prec a_{k+1} \prec b,$$

a wtedy mielibyśmy $a_ka_{k+1} < bb_1$. Ale $bb_1 \equiv cd$, skąd byłoby $a_ka_{k+1} < cd$, co jest sprzeczne z założeniem.

[12] Rozumowanie takie można przeprowadzić na gruncie aksjomatów przyjętych w [Borsuk, Szmielew 1972], ale w czasie, gdy Stoltz ogłaszał swoje rewelacje nie było jeszcze odpowiedniej aksjomatyki.

[13] Zob. [Borsuk, Szmielew 1972], s. 142–143. Definicje występujących tu pojęć są podane w rozdziale *O ciągłości linii prostej*.

Niech $\gamma$ będzie punktem wyznaczonym przez przekrój $(X_1, X_2)$. Można pokazać, że w klasie $X_1$ nie ma elementu największego, tak więc $\gamma \in X_2$, a stąd dostajemy $X_1 = (a_0\gamma)$. Wszystkie wyrazy ciągu $(a_k)$ należą zatem do odcinka $(a_0\gamma)$. Powtarzając powyższe rozumowanie w stosunku do odcinka $(a_0\gamma)$ otrzymamy, że istnieje takie punkt $\delta$, że $\delta \prec \gamma$ i $(a_k) \subset (a_0\delta)$. Z gęstości porządku $\prec$ wynika, że istnieje taki punkt $\eta$, że $\delta \prec \eta \prec \gamma$. Z warunku $\delta \prec \eta$ wynika, że $\forall k[a_k \prec \eta]$, z warunku $\eta \prec \gamma$ wynika, że $\exists k[\eta \preceq a_k]$. Sprzeczność.[14]

Zwrócimy uwagę na dwa aspekty przytoczonego dowodu.

3.2. Zasada Archimedesa w ogóle może być sformułowana wtedy, gdy przyjęta jest zasada indukcji. Widzimy to biorąc pod uwagę nie tezę, ale dowód twierdzenia. Właśnie z uwagi na dowód, zasada Archimedesa powinna być tak sformułowana: dla każdego ciągu $(a_n)$ punktów półprostej $A$ o początku $a_0$ takich, że ... .

Definicja ciągu $(a_n)$ jest indukcyjna i jako taka zakłada zasadę indukcji.[15]

Zestawmy to teraz z uwagą Stewarta Shapiro pochodzącą z książki *Thinking about mathematics*. Czytamy:

„Geometrycznym odpowiednikiem indukcji matematycznej jest zasada Archimedesa: dla dowolnych odcinków $a$, $b$ istnieje taka liczba naturalna $n$, że odcinek $a$ wzięty $n$ razy jest dłuższy od odcinka $b$. [...] Kontrprzykładem dla zasady Archimedesa byłaby para takich odcinków, z których jeden jest nieskończenie mniejszy od drugiego. Oczywiście, nieskończenie małych nie doświadczamy bezpośrednio, nawet jeżeli potrafimy je sobie wyobrazić".[16]

Od strony merytorycznej uwaga ta jest całkowicie chybiona.

3.3. Dowód geometryczny w istocie niewiele różni się od dowodu przedstawionego w punkcie 2. Przyjmując, że wielokrotnościom liczby $a$ odpowiadają punkty $a_n$, liczba $\gamma$ i punkt $\gamma$ definiowane są analogicznie. Jedyna różnica polega na tym, że w ciele uporządkowanym wprost można przyjąć element $\gamma - a$, w dowodzie geometrycznym natomiast nie występuje odcinek $a_0\gamma - cd$ i w tym miejscu stosowany jest aksjomat o odkładaniu odcinków:

„Dla dowolnej półprostej $A$ o początku $a$ i dla dowolnego odcinka $pq$ istnieje dokładnie jeden punkt $b \in A$ taki, że $ab \equiv pq$".[17]

[14] Zupełnie podobny dowód znajdujemy w [Kostin 1952], s. 129–130.

[15] Zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], rozdz. III, § 2, twierdzenie o istnieniu ciągu definiowanego indukcyjnie.

[16] [Shapiro 2000(a)], s. 101.

[17] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 81.

Punkt $\gamma$ wyznacza dwie półproste: do jednej z nich należy punkt $a_0$, do drugiej – nie należy punkt $a_0$.[18] Odkładając na jednej lub na drugiej z nich odcinek $cd$ otrzymujemy odpowiednik algebraicznej operacji dodawania lub odejmowania.

Po drugie, łatwej do wykazania w ciele uporządkowanym implikacji

$$b < a < c < d \to a - c < d - b,$$

w dowodzie geometrycznym odpowiada implikacja

$$b_1 \prec a_k \prec a_{k+1} \prec b \to a_k a_{k+1} < b b_1,$$

która wynika wprost z samej definicji relacji mniejszości dla odcinków:

„Będziemy mówili, że odcinek $a_1 b_1$ jest mniejszy od odcinka $a_2 b_2$ – symbolicznie $a_1 b_1 < a_2 b_2$ – jeżeli istnieje punkt $p$ taki, że $B(a_2 p b_2)$ i $a_1 b_1 \equiv a_2 p$".[19]

W tym sensie dowód geometryczny polega na przetransponowaniu na język geometrii elementarnej operacji przeprowadzanych w ciele uporządkowanym.

[18] Zob. [Borsuk, Szmielew 1972], s. 40.
[19] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 90.

# Ciało formalnie rzeczywiste[20]

Nathan Jacobson we wprowadzeniu do rozdziału VI *Lectures in Abstract Algebra* pisze:

„W rozdziale tym przedstawimy teorię ciał formalnie rzeczywistych pochodzącą od Artina i Schreiera. Podstawowa własność algebraiczna ciała liczb rzeczywistych polega na tym, że jedyne zależności postaci $\sum \alpha_i^2 = 0$, jakie mogą zachodzić w tym ciele są trywialne: $0^2 + 0^2 + \ldots + 0^2 = 0$. Obserwacja ta doprowadziła Artina i Schreiera do tego, aby każde ciało o tej własności nazwać ciałem formalnie rzeczywistym. Każde takie ciało może być uporządkowane, a z drugiej strony ciało uporządkowane jest ciałem formalnie rzeczywistym. W centrum zainteresowania teorii są ciała rzeczywiście domknięte, to jest ciała formalnie rzeczywiste maksymalne ze względu na rozszerzenie algebraiczne. Ciało rzeczywiście domknięte ma dokładnie jedno uporządkowanie, które w danym ciele można scharakteryzować warunkiem: $\alpha > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \beta^2 \neq 0$. Dalej, jeżeli ciało $\mathcal{F}$ jest rzeczywiście domknięte, wtedy $\mathcal{F}(\sqrt{-1})$ jest algebraicznie domknięte. Każde ciało formalnie rzeczywiste można zanurzyć w ciele rzeczywiście domkniętym, które jest algebraiczne nad danym ciałem. Ponadto, jeżeli wyjściowe ciało jest uporządkowane, wówczas zanurzenie może być tak dobrane, że (jedyny) porządek w tym ciele rzeczywiście domkniętym jest rozszerzeniem porządku ciała wyjściowego. Istnieje dokładnie jedno takie rzeczywiste rozszerzenie ciała uporządkowanego i jest ono nazywane rzeczywistym domknięciem ciała uporządkowanego."[21]

[20] Referujemy na podstawie: Nathan Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, rozdz. VI *Artin-Schreier Theory*. Pierwotnie teoria Artina-Schreiera została przedstawiona w dwóch artykułach: Emil Artin, Otto Schreier, *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Abhandlung Mathematisches Seminar Hamburg 5, 1926, Emil Artin, Otto Schreier, *Eine Kennzeichnnung der abgeschlossenen Körper*, Abhandlung Mathematisches Seminar Hamburg 5, 1927.

[21] [Jacobson 1969], s. 269. W oryginale ciało algebraiczne jest oznaczone literą $P$.

**4.** Punktem wyjścia teorii Artina-Schreiera jest następującą definicja:

Definicja 1. Ciało uporządkowane to ciało przemienne $\mathcal{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ wraz z takim zbiorem $P$, że $P \subset F$ oraz (1) $0 \notin P$, (2) $\forall a \in F[a \in P \vee a = 0 \vee -a \in P]$, (3) zbiór $P$ jest zamknięty na dodawanie i mnożenie.

Niech $(\mathcal{F}, P)$ będzie ciałem uporządkowanym. Przyjmując definicję

$$a >_P b \leftrightarrow_{df} a - b \in P,$$

można pokazać, że porządek $>_P$ jest zgodny z działaniami w $(F, +, \cdot, 0, 1)$; mając na uwadze tę definicję mówimy, że zbiór $P$ wyznacza porządek w ciele $\mathcal{F}$. Z drugiej strony, jeżeli $\mathfrak{F} = (F, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem uporządkowanym w myśl definicji z punktu 1, to zbiór $P = \{a \in F : a > 0\}$ spełnia warunki (1)–(3). Tak więc Hilberta definicja ciała uporządkowanego jest równoważna wyżej podanej definicji.

4.1. Istnieje dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami w ciele liczb wymiernych $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$. Jeżeli bowiem $P \subset \mathbb{Q}$ jest podzbiorem spełniającym warunki (1)–(3) definicji ciała uporządkowanego, to $P \supset \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}\}$ oraz $P \cap \{-\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Tak więc musi być $P = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

Generalnie nie jest jednak tak, że istnieje dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami w ciele.

Przykład. Niech $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem uporządkowanym liczb wymiernych, niech $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot, 0, 1)$ będzie rozszerzeniem algebraicznym ciała $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$, gdzie $\sqrt{2}$ oznacza pierwiastek równania $x^2 - 2 = 0$. W zależności od tego, czy $\sqrt{2}$ uznamy za element dodatni, czy ujemny otrzymamy dwa różne porządki zgodne z działaniami w ciele $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot, 0, 1)$. Przyjmijmy mianowicie, że $P_1$ jest sumą zbiorów:

$$\mathbb{Q}_+,\ \{q\sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}_+\},\ \{p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}_+\},$$

$$\{p - q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}_+,\ p^2 > 2q^2\},\ \{-p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}_+,\ p^2 < 2q^2\}.$$

Zbiór $P_1$ spełnia warunki (1)–(3) podane w definicji ciała uporządkowanego i wyznacza w ciele $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot, 0, 1)$ „naturalny" porządek.

Przyjmijmy następnie, że $P_2$ jest sumą zbiorów:

$$\mathbb{Q}_+,\ \{-q\sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}_+\},\ \{p - q\sqrt{2} :\ p, q \in \mathbb{Q}_+\},$$

$$\{p + q\sqrt{2} :\ p, q \in \mathbb{Q}_+,\ p^2 > 2q^2\},\ \{-p - q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}_+,\ p^2 < 2q^2\}.$$

Można pokazać, że zbiór $P_2$ spełnia warunki (1)–(3) podane w definicji ciała uporządkowanego. Porządki wyznaczone przez $P_1$ i $P_2$ są oczywiście różne.

**5.** Niech $\sum(\mathcal{F})$ oznacza zbiór tych elementów ciała $\mathcal{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$, które są sumą kwadratów, tzn.

$$\sum(\mathcal{F}) = \{a \in F : \ a = \sum_{1}^{n} a_j^2, \ a_j \in F, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiór $\sum(\mathcal{F})$ jest zamknięty na dodawanie i mnożenie, zawiera 0, oraz $\beta \in \sum(\mathcal{F}) \to \beta^{-1} \in \sum(\mathcal{F})$, dla $\beta \neq 0$.

Definicja 2. Ciało przemienne $\mathcal{F}$ nazywamy formalnie rzeczywistym, gdy dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_j^2 = 0 \to a_1 = \ldots = a_n = 0, \quad \text{gdzie} \ \ a_j \in F.$$

Z definicji tej wynika, że ciało $\mathcal{F}$ jest formalnie rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $-1 \notin \sum(\mathcal{F})$. Ponadto, jeżeli $\mathcal{F}$ jest charakterystyki $p$, to

$$0 = \underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{p-razy},$$

zatem ciało formalnie rzeczywiste jest charakterystyki zero.

Każde ciało uporządkowane jest ciałem formalnie rzeczywistym.

5.1. Definicja 3. Ciało $\mathcal{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ nazywamy rzeczywiście domkniętym, gdy $\mathcal{F}$ jest formalnie rzeczywiste i żadne rozszerzenie algebraiczne ciała $\mathcal{F}$ nie jest formalnie rzeczywiste.

Element $b$ spełniający równanie $a = b^2$ nazywany jest pierwiastkiem z $a$. W ciele liczb rzeczywistych, przypomnijmy, istnienie pierwiastka z liczby dodatniej wyprowadzane jest z aksjomatu ciągłości. W teorii Artina-Schreiera pokazuje się, że zachodzi twierdzenie:

Jeżeli ciało $\mathcal{F}$ jest rzeczywiście domknięte, to

$$\forall a \in F \exists b \in F[a = b^2 \vee -a = b^2].$$

W dowodzie pokazuje się, że jeżeli element $a$ jest sumą kwadratów, to jest on pierwiastkiem, tzn.

$$\forall a \in F \exists b \in F[a \in \sum(\mathcal{F}) \to a = \sqrt{b}].$$

Przyjmując następnie $P = \{a^2 : \ a \in F, \ a \neq 0\}$, pokazuje się, że zbiór $P$ spełnia warunki (1)–(3) Definicji 1, a zatem wyznacza porządek zgodny

z działaniami w ciele $\mathcal{F}$. Ponadto, jeżeli $P'$ jest zbiorem wyznaczającym porządek w $\mathcal{F}$, to $P = P'$. Wyniki te zabrane są w twierdzeniu:

W ciele rzeczywiście domkniętym $\mathcal{F}$ istnieje dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami w $\mathcal{F}$.

5.2. Kwestia, czy w ogóle istnieje ciało rzeczywiście domknięte jest rozwiązana jak następuje. Po pierwsze, pokazuje się, że dla każdego ciała $\mathcal{F}$ istnieje jego algebraiczne domknięcie $a(\mathcal{F})$.[22] Po drugie, pokazuje się, że jeżeli $\mathcal{F}$ jest ciałem formalnie rzeczywistym, to w jego algebraicznym domknięciu $a(\mathcal{F})$ zawarte jest ciało rzeczywiście domknięte $\Delta$ zawierające $\mathcal{F}$.[23]

Ciało $\Delta$ istnieje na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna: jest to element maksymalny ze względu na relację inkluzji określoną w zbiorze

$$\{\mathcal{K} : \mathcal{K} \text{ jest formalnie rzeczywistym podciałem ciała } a(\mathcal{F})\}.$$

**6.** Dla każdej rzeczywistej funkcji wielomianowej $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $n$ jest liczbą nieparzystą, zachodzi: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ oraz $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Stąd i z definicji ciągłości funkcji dostajemy, że istnieje $r \in \mathbb{R}$ takie, że $f(r) = 0$. W teorii Artina-Schreiera odpowiednikiem tego faktu jest twierdzenie:

Jeżeli $\mathcal{F}$ jest ciałem rzeczywiście domkniętym, to dla każdego wielomianu nieparzystego stopnia $f(x) \in \mathcal{F}[x]$ istnieje w $\mathcal{F}$ pierwiastek wielomianu $f(x)$.

**7.** „[U]ogólnieniem na ciała rzeczywiście domknięte tak zwanego zasadniczego twierdzenia algebry”[24] jest następujące twierdzenie:

Jeżeli $\mathfrak{F}$ jest ciałem uporządkowanym takim, że:
(1) $\forall a \exists b \in F[a \in F_+ \to a = b^2]$ oraz
(2) $\forall f(x) \in \mathcal{F}[x] \exists n \in \mathbb{N} \exists a \in F[(stf(x) = 2n+1) \to f(a) = 0]$,
to $\sqrt{-1} \notin F$ oraz $\mathcal{F}(\sqrt{-1})$ jest ciałem algebraicznie domkniętym.

Dowód – jak pisze Jacobson – jest „ściśle wzorowany na Gaussa dowodzie tego klasycznego wyniku”.[25]

[22] Zob. [Browkin 1978], s. 108–109; w dowodzie wykorzystywany jest lemat Kuratowskiego-Zorna.

[23] Zob. [Jacobson 1969], s. 274.

[24] [Jacobson 1969], s. 275.

[25] [Jacobson 1969], s. 275. W istocie Gauss podał kilka dowodów zasadniczego twierdzenia algebry. Jacobson ma najpewniej na uwadze drugi dowód; zob. [Remmert 1995], s. 107–108.

Ciało rzeczywiście domknięte $\mathcal{F}$ spełnia warunki (1)–(2) występujące w założeniu twierdzenia, ponadto zbiór $P = \{a^2 : a \in F,\ a \neq 0\}$ wyznacza dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami w $\mathcal{F}$. Tak więc, jeżeli $\mathcal{F}$ jest ciałem rzeczywiście domkniętym, to $\sqrt{-1} \notin F$ i $\mathcal{F}(\sqrt{-1})$ jest ciałem algebraicznie domkniętym.

Dowodzone jest też twierdzenie odwrotne, mianowicie:

Jeżeli $\mathcal{F}$ jest takim ciałem, że $\sqrt{-1} \notin F$ i $\mathcal{F}(\sqrt{-1})$ jest ciałem algebraicznie domkniętym, to $\mathcal{F}$ jest ciałem rzeczywiście domkniętym.[26]

Tak więc, $\mathcal{F}$ jest ciałem rzeczywiście domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt{-1} \notin F$ i $\mathcal{F}(\sqrt{-1})$ jest ciałem algberaicznie domkniętym. Stąd wynika, że ciało liczb rzeczywistych $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ jest ciałem rzeczywiście domkniętym, a zbiór $\{r^2 : r \in \mathbb{R},\ r \neq 0\}$ wyznacza jedyny porządek zgodny z działaniami w ciele $\mathcal{R}$. Powyższe twierdzenia uzasadniają nazywanie tego porządku „naturalnym", tak więc „naturalny" porządek liczb rzeczywistych to jedyny porządek zgodny z działaniami w ciele $\mathcal{R}$.

Inne przykłady ciał rzeczywiście domkniętych to podciało ciała $\mathfrak{R}$, mianowicie ciało rzeczywistych liczb algebraicznych, czy rozszerzenie ciała $\mathfrak{R}$, mianowicie, ciało niestandardowych liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}^*$ (czy też ciało liczb Conway'a). Tak więc pojęcie ciało rzeczywiście domknięte nie charakteryzuje liczb rzeczywistych z dokładnością do izomorfizmu, tym niemniej daje istotną informację o porządku liczb rzeczywistych.

7.1. Fakt, że ciało liczb rzeczywistych jest ciałem rzeczywiście domkniętym to konsekwencja zasadniczego twierdzenia algebry: ciało liczb zespolonych $\mathcal{R}(\sqrt{-1}) = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ jest algebraicznie domknięte. Wszystkie znane dowody zasadniczego twierdzenia algebry wykorzystują założenie o ciągłości porządku liczb rzeczywistych. Z teorii Artina-Schreiera możemy zatem wnosić, że jeżeli istnieje ciało uporządkowane w sposób ciągły $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$, to porządek $<$ jest jedynym porządkiem zgodnym z działaniami w ciele algebraicznym $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

[26] Zob. [Jacobson 1969], s. 277.

# Ciało szeregów formalnych Laurenta

**8.** Niech $\mathfrak{F}$ będzie ciałem uporządkowanym. Przyjmijmy, że $\mathbb{L}$ jest zbiorem wszystkich takich szeregów formalnych $\sum_{-\infty}^{\infty} a_j x^j$, gdzie $a_j \in F$, $j \in \mathbb{Z}$, i tylko skończenie wiele wyrazów $a_j$ o indeksach ujemnych jest różnych od zera, tj. $\exists t \forall j [j < t \to (a_j = 0 \wedge a_t \neq 0)]$, krótko:

$$\mathbb{L} = \left\{ \sum a_j x^j : a_j \in F, j \in \mathbb{Z},\ \exists t \forall j [j < t \to (a_j = 0 \wedge a_t \neq 0)] \right\}.$$

Przyjmujemy:

$$\sum a_j x^j = \sum b_j x^j \leftrightarrow_{df} \forall j \in \mathbb{Z}[a_j = b_j],$$

dla $a \in F \backslash \{0\}$

$$a = \sum a_j x^j, \quad \text{gdzie} \ \ a_0 = a, \ \ a_j = 0 \ \ \text{dla } j \neq 0,$$

oraz

$$0 = \sum a_j x^j, \quad \text{gdzie} \quad \forall j \in \mathbb{Z}[a_j = 0].$$

W zbiorze $\mathbb{L}$ definiujemy dodawanie, mnożenie oraz porządek:

$$\sum a_j x^j + \sum b_j x^j =_{df} \sum c_j x^j, \ \ \text{gdzie} \ \ c_j = a_j + b_j,$$

$$\left( \sum a_j x^j \right) \left( \sum b_j x^j \right) =_{df} \sum c_j x^j, \ \ \text{gdzie} \ \ c_j = \sum_{k+l=j} a_k b_l,$$

$$\sum a_j x^j < \sum b_j x^j \leftrightarrow_{df} \exists t \forall j [j < t \to (a_j = b_j \wedge a_t < b_t)].^{27}$$

Można pokazać, że ciało $\mathfrak{L} = (\mathbb{L}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem uporządkowanym, dalej będziemy nazywać je ciałem uporządkowanym szeregów formalnych Laurenta.[28]

[27] Porządek w $\mathbb{L}$ oznaczamy tym samym symbolem, co porządek w $F$.

[28] Zob. [Cohen, Ehrlich 1963], s. 70.

Gdy w punkcie wyjścia, w miejsce ciała uporządkowanego $\mathfrak{F}$ przyjmiemy ciało algebraiczne $\mathcal{F}$, to otrzymamy ciało szeregów formalnych bez porządku; dalej takie ciało będziemy nazywać ciałem szeregów formalnych Laurenta i oznaczać jako $\mathcal{L}$.

8.1. Ciało $\mathfrak{L}$ nie jest archimedesowe: dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$n < x^{-1},$$

lub w postaci równoważnej

$$x < \frac{1}{n}.$$

8.2. Pokażemy, że $\mathfrak{L}$ jest ciałem zupełnym w sensie Cauchy'ego.[29]

(1) Przede wszystkim zauważmy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n$, że $x^n < \varepsilon$. Istotnie, niech $\varepsilon = \sum a_j x^j$. Z warunku $\varepsilon > 0$ wynika, że dla pewnego indeksu $t$ jest $\forall j[(j < t \to (a_j = 0 \wedge\ a_t > 0)]$. Gdy $t \leqslant 0$, to $x < \varepsilon$. Gdy $t > 0$, wtedy $x^{t+1} < \varepsilon$, zachodzi bowiem

$$x^{t+1} = 0x^t + x^{t+1} < a_t x^t + a_{t+1}x^{t+1} + \cdots = \varepsilon.$$

Z powyższego dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \beta \leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\exists k \in \mathbb{N}\forall m \in \mathbb{N}[m < k \to |\alpha_m - \beta| < x^n].$$

(2) Niech teraz $(\alpha_n) \subset \mathbb{L}$ będzie ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego. Przyjmijmy oznaczenie

$$\alpha_n = \sum a_j^n x^j.$$

Zdefiniujemy szereg $\beta = \sum b_j x^j$, o którym pokażemy, że jest granicą ciągu $(\alpha_n)$.

Dla $\varepsilon = x$ istnieje takie $k$, że $\forall m[k < m \to |\alpha_k - \alpha_m| < x]$. Niech $k_0$ będzie najmniejszą liczbą o tej własności. Przyjmujemy

$$b_j = a_j^{k_0}, \quad \text{dla } j \leqslant 0.$$

Wówczas

$$\sum_{-\infty}^{j=0} a_j^{k_0} x^j = \sum_{-\infty}^{j=0} b_j x^j,$$

[29] Definicję ciała uporządkowanego zupełnego w sensie Cauchy'ego podajemy wyżej w pkt. 1.1.

a dla $m > k_0$ zachodzi

$$\sum_{-\infty}^{j=0} a_j^{k_0} x^j = \sum_{-\infty}^{j=0} a_j^m x^j.$$

Dla $\varepsilon = x^2$ istnieje takie $k > k_0$, że $\forall m[k < m \to |\alpha_k - \alpha_m| < x^2]$. Niech $k_1$ będzie najmniejszą liczbą o tej własności.[30] Przyjmujemy

$$b_1 = a_1^{k_1}.$$

Wówczas

$$\sum_{-\infty}^{j=1} a_j^{k_1} x^j = \sum_{-\infty}^{j=1} b_j x^j,$$

a dla $m > k_1$ zachodzi

$$\sum_{-\infty}^{j=1} a_j^{k_1} x^j = \sum_{-\infty}^{j=1} a_j^m x^j.$$

Niech dane będą współczynniki $\ldots, b_1, \ldots, b_s$. Zdefiniujemy $b_{s+1}$. Dla $\varepsilon = x^{s+2}$ istnieje takie $k_{s+1}$, że $k_s < k_{s+1}$ oraz $\forall m[k_{s+1} < m \to |\alpha_{k_{s+1}} - \alpha_m| < x^{s+2}]$. Przyjmujemy

$$b_{s+1} = a_{s+1}^{k_{s+1}}.$$

Wówczas

$$\sum_{-\infty}^{j=s+1} a_j^{k_{s+1}} x^j = \sum_{-\infty}^{j=s+1} b_j x^j,$$

a dla $m > k_{s+1}$

$$\sum_{-\infty}^{j=s} a_j^{k_{s+1}} x^j = \sum_{-\infty}^{j=s} a_j^m x^j.$$

(3) Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \beta.$$

Z warunku Cauchy'ego dostajemy, że dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie $k_n$, że zachodzi

$$\forall m \in \mathbb{N}[k_n < m \to |\alpha_{k_n} - \alpha_m| < x^{n+1}].$$

Z definicji szeregu $\beta$ wynika, że

$$|\alpha_{k_n} - \sum b_j x^j| < x^n.$$

[30] Zastrzeżenia tego nie będziemy dalej powtarzać, ale obowiązuje ono przy definiowaniu kolejnych wyrazów $k_i$.

Ostatecznie dla $m > k_n$ zachodzi

$$|\sum b_j x^j - \alpha_m| < |\sum b_j x^j - \alpha_{k_n}| + |\alpha_{k_n} - \alpha_m| < x^n + x^{n+1} < x^{n+1}.$$

Przykłady: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, (2) granicą ciągu

$$x,\ x + x^2,\ x + x^2 + x^3, \ldots, \sum_1^n x^j, \ldots$$

jest szereg $\sum\limits_1^\infty x^j$, (3) ciąg $(\frac{1}{n})$ nie jest ciągiem Cauchy'ego i nie jest zbieżny.

**9.** Ciało szeregów formalnych Laurenta $\mathcal{L}$ jest też definiowane jako ciało ułamków pewnego pierścienia całkowitego.[31]

Niech $\mathcal{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ będzie ciałem przemiennym. Przyjmujemy $P = F^{\mathbb{N}}$. Niech $\alpha, \beta \in P$, gdzie $\alpha = \{a_j\}$, $\beta = \{b_j\}$. W $P$ definiowane są równość, dodawanie i mnożenie:

$$\alpha = \beta \leftrightarrow_{df} \forall j[a_j = b_j],$$

$$\alpha + \beta =_{df} \{a_j + b_j\},$$

$$\alpha\beta =_{df} \{\sum\nolimits_{j=0}^{j=n} a_j b_{n-j}\}.$$

Pokazuje się, że zbiór $P$ z wyżej określonymi działaniami jest pierścieniem przemiennym, z jedynką, bez dzielników zera; $\mathcal{P} = (P, +, \cdot, 0, 1)$. Dla każdego $\alpha \in P$, jeżeli $a_0 \neq 0$, to w $\mathcal{P}$ istnieje element odwrotny $\alpha^{-1}$.

Niech $x$ oznacza element $(0, 1, 0, 0, \ldots)$. Mamy zatem

$$x^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots), \quad x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots); \quad \text{itd.},$$

przyjmujemy też, że $x^0 = (1, 0, 0, \ldots)$. Niech kolejne wyrazy ciągu $\alpha = \{a_j\}$ będą zapisane w postaci $(a_j, 0, 0, \ldots)$. Wówczas ciąg $\alpha = \{a_j\}$ może przedstawić jako szereg formalny $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots$ . Przyjmując tę konwencję, dodawanie i mnożenie w $\mathcal{P}$ odpowiada dodawaniu i mnożeniu szeregów zdefiniowanemu wyżej w pkt. 2.

9.1. Powtarzając Webera konstrukcję liczb wymiernych, pierścień $\mathcal{P}$ jest rozszerzany do ciała ułamków. W zbiorze $P \times (P \setminus \{0\})$ definiowana jest relacja:

$$(\alpha_1, \beta_1) \approx (\alpha_2, \beta_2) \leftrightarrow_{df} \alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1.$$

[31] Referujemy na podstawie [Niven 1969].

Relacja $\approx$ jest równoważnością.

W zbiorze ilorazowym $L = (P \times (P \setminus \{0\}))\Big/_{\approx}$ definiowane są działania:

$$(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) =_{df} (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \beta_1\beta_2),$$

$$(\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2) =_{df} (\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2).^{32}$$

Pokazuje się, że $L$ z tymi działaniami jest ciałem.

Kluczowe dla tego ujęcia jest twierdzenie:

Każdy element $(\alpha, \beta)$ ciała $(L, +, \cdot, 0, 1)$ można przedstawić w sposób jednoznaczny w postaci

$$(\alpha, \beta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_j x^j,$$

gdzie $c_j \in F$ oraz $\exists t \in \mathbb{Z} \forall j \in \mathbb{Z}[j < t \to c_j = 0 \wedge c_t \neq 0]$.

Dowód.[33] Jeżeli $\beta \neq 0$, to istnieje takie $\beta_1$, że $\beta = x^n\beta_1$, gdzie $\beta_1$ jest elementem odwaracalnym pierścienie $\mathcal{P}$. Wówczas zachodzi

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, x^n\beta_1) = (\alpha\beta_1^{-1}, x^n).$$

Wiadomo, że $\alpha\beta_1^{-1} \in P$, dlatego można przyjąć $\alpha\beta_1^{-1} = \sum\limits_{j=k}^{\infty} c_j x^j$. Klasie $(\alpha, \beta)$ przyporządkowany jest szereg formalny $x^{-n} \sum\limits_{j=k}^{\infty} c_j x^j = \sum\limits_{j=k}^{\infty} c_j x^{j-n}$.

Jednoznaczność tego przedstawienia otrzymamy wprost z definicji relacji $\approx$ i równości w $P$.

9.2. *Tajemniczy* znak $x$, który występuje w zapisie szeregu formalnego oznacza *de facto* element transcendenty (przestępny) względem ciała $\mathcal{F}$, dlatego gdy $\mathcal{F}$ jest ciałem liczb wymiernych, to czasami w miejsce $x$ pisze się $\pi$. Tak więc wielomian nie oznacza tu funkcji wielomianej, w takim rozumieniu jak to jest w analizie.

Teoriomnogościowe przedstawienie ciała szeregów formalnych nie jest celem samym w sobie, nie jest też motywowane dogmatem, że każdy obiekt matematyczny może być przedstawiony jako zbiór. Celem zarysowanej wyżej konstrukcji jest wskazanie elementu transcendentnego względem dowolnego ciała przemiennego $\mathcal{F}$. Ciało $\mathcal{F}$ można w *naturalny* sposób zanurzyć w ciele szeregów formalnych i wówczas dla każdego skończonego ciągu elementów $a_0, a_1, \ldots, a_n \in F$, gdzie $a_i \neq 0$ dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$, jest

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \notin F.$$

[32] Pomijamy znak klasy równoważności.

[33] Zob. [Niven 1969], s. 887–889.

Szereg Laurenta jest „formalny", bo suma $\sum$ nie oznacza tu granicy. Można wręcz powiedzieć, że szereg formalny jest symbolem, ciągiem znaków. Pionierzy analizy matematycznej podobnie jako symbol traktowali ciąg Cauchy'ego liczb wymiernych.[34] Nie potrafili jednak wyjaśnić dlaczego granicą ciągu $(a_n)$ jest sam ciąg $(a_n)$, dlaczego $\lim_{n\to\infty} a_n = (a_n)$. Trudność tę ostatecznie rozwiązuje się przedstawiając konstrukcję Cantora w ramach teorii mnogości.[35] W przypadku szeregów formalnych nie ma podobnych trudności. Sens redukcji teoriomnogościowej polega na wykazaniu, że dla każdego ciała $\mathfrak{F}$ istnieje element transcendenty względem $\mathfrak{F}$.

**10.** Niech $\mathcal{F}(x)$ oznacza ciało funkcji wymiernych o współczynnikach z $\mathcal{F}$, zatem każdy element $f \in \mathcal{F}(x)$ przedstawia się jako $f = \frac{\alpha}{\beta}$, gdzie $\alpha, \beta$ są elementami pierścienia wielomianów $\mathcal{F}[x]$, tj.

$$\alpha = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad \beta = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m, \quad \beta \neq 0.$$

$\mathcal{F}(x)$ jest nieskończonym rozszerzeniem ciała $\mathcal{F}$, tzn. $(\mathcal{F}(x) : \mathcal{F}) = \infty$.[36] Korzystając z przedstawienia funkcji wymiernej w postaci szeregu Laurenta,[37] ciało $\mathcal{L}$ uznajemy za rozszerzenie ciała $\mathcal{F}(x)$.[38] Z uwagi na ten fakt ciało szeregów formalnych Laurenta o współczynnikach z $\mathcal{F}$ jest oznaczane w literaturze matematycznej jako $\mathcal{F}((x))$.

Ciało $\mathcal{Z}_p((x))$ to przykład ciała szeregów formalnych, dla którego nie istnieje porządek zgodny z działaniami, $\mathcal{Z}_p((x))$ zawiera bowiem ciało $\mathcal{Z}_p$, a ciało uporządkowane jest charakterystyki zero; $\mathcal{Z}_p((x))$ jest nazywane ciałem szeregów nad ciałem reszt modulo $p$.

10.1. Na użytek tylko tego jednego punktu przyjmijmy, że ciało szeregów formalnych Laurenta $\mathcal{L}$ o współczynnikach z ciała $\mathcal{F}$ będziemy oznaczać jako $\mathcal{L}_F$. Tak więc $\mathcal{L}_\mathbb{Q}$ to ciało szeregów formalnych o współczynnikach z ciała liczb wymiernych $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$, a ciało $\mathcal{L}_{L_\mathbb{Q}}$, to ciało szeregów formalnych Laurenta o współczynnikach z ciała $\mathcal{L}_\mathbb{Q}$. Podobną konwencję przyjmijmy w stosunku do uporządkowanego ciała szeregów formalnych Laurenta, tak więc $\mathfrak{L}_\mathbb{Q}$ oznacza ciało uporządkowane szeregów formalnych Laurenta o współczynnikach z uporządkowanego ciała liczb wymiernych $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$.

Na podstawie uwag z poprzedniego punktu możemy wnosić, że ciała uporządkowane $\mathfrak{Q}$ i $\mathfrak{L}_\mathbb{Q}$ nie są izomorficzne, bo ciało $\mathcal{L}_\mathbb{Q} = \mathcal{Q}((x))$ jest nieskończonym rozszerzeniem ciała $\mathcal{Q}$. W konsekwencji nieizomorficzne są też

[34] Zob. niżej rozdz. *Konstrukcja Cantora*, pkt. 5; zob. także [Boyer 1949], s. 408.
[35] Zob. rozdz. *Konstrukcja Cantora*.
[36] Zob. [Browkin 1978], s. 68.
[37] Zob. wyżej. pkt. 5.2.
[38] Można pokazać, że jest to rozszerzenie właściwe.

ciała uporządkowane $\mathfrak{L}_{\mathbb{Q}}$ i $\mathfrak{L}_{L_{\mathbb{Q}}}$. W ten sposób otrzymujemy nieskończony ciąg nieizomorficznych ciał uporządkowanych zupełnych:

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{L}_{L_{\mathbb{Q}}}, \mathfrak{L}_{L_{L_{\mathbb{Q}}}}, \dots \ .$$

To samo rozumowanie możemy powtórzyć w odniesieniu do uporządkowanego ciała liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}$ oraz uporządkowanego ciała niestadardowych liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}^*$. W rezultacie otrzymujemy trzy ciągi ciał uporządkowanych zupełnych:

(1) $\mathfrak{L}_{\mathbb{Q}},\ \mathfrak{L}_{L_{\mathbb{Q}}},\ \mathfrak{L}_{L_{L_{\mathbb{Q}}}}, \dots$ ,
(2) $\mathfrak{R},\ \mathfrak{L}_{\mathbb{R}},\ \mathfrak{L}_{L_{\mathbb{R}}},\ \mathfrak{L}_{L_{L_{\mathbb{R}}}}, \dots$ ,
(3) $\mathfrak{R}^*,\ \mathfrak{L}_{\mathbb{R}^*},\ \mathfrak{L}_{L_{\mathbb{R}^*}},\ \mathfrak{L}_{L_{L_{\mathbb{R}^*}}}, \dots$ .[39]

W kolejnych paragrafie przedstawimy twierdzenie Hahna charakteryzujące ciała niearchimedesowe uporządkowane.

[39] Pomijamy sprawdzenie, że każde dwa ciała z tych ciągów nie są izomorficzne.

# Ciało zupełne w sensie Archimedesa[40]

W roku 1907, w artykule *Über nichtarchimedischen Grössensysteme* Hans Hahn, nawiązując do aksjomatyki podanej przez Hilberta, wprowadził pojęcie ciała zupełnego w sensie Archimedesa i pokazał, że ciało liczb rzeczywistych jest szczególnym ciałem zupełnym w sensie Archimedesa.[41]

**11.** Niech $\mathfrak{G} = (\mathbb{G}, +, 0)$ będzie grupą. Parę $(\mathfrak{G}, <)$, gdzie $<$ jest porządkiem liniowym na zbiorze $\mathbb{G}$ nazywamy grupą uporządkowaną, gdy dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{G}$ zachodzi:

$$a < b \to a + c < b + c, \qquad a < b \to c + a < c + b.$$

Grupę uporządkowaną $(\mathfrak{G}, <)$ nazywamy archimedesową, gdy zachodzi:

$$\forall a, b \in \mathbb{G} \exists n \in \mathbb{N}[0 < a < b \to b < na].$$

Otto Hölder, w pracy *Die Axiome der Quantität und die Lehre von Mass* (1901), udowodnił, że dowolna grupa archimedesowa jest abelowa oraz jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy addytywnej liczb rzeczywistych $(\mathbb{R},+,0,<)$,[42] dlatego dalej będziemy rozważać jedynie grupy przemienne. Zatrzymamy się jednak przy dowodzie twierdzenia Höldera, bo w istotny sposób jest w nim wykorzystywane utożsamienie liczby rzeczywistej z przekrojem zbioru liczb wymiernych.

---

[40] Opracowane na podstawie [Ehrlich 1995] oraz [Fuchs 1963], rozdz. IV–VIII.

[41] W wymienionej pracy Hahn pisze: „Z uwagi na archimedesowe systemy wielkości, Hilbert rozdzielił warunek ciągłości Dedekinda na dwa warunki: pierwszy to aksjomat Archimedesa, drugi – to tzw. aksjomat zupełności, orzekający, że nie da się rozszerzyć systemu wielkości dodając doń nowe wielkości w taki sposób, aby w tym rozszerzonym systemie zachodziły pozostałe aksjomaty, tj. aksjomaty dotyczące działań, porządku oraz aksjomat Archimedesa. Schoenflies wysunął hipotezę, że nie istnieją systemy niearchimedesowe, w których byłby spełniony aksjomat zupełności. Istotnie, jest tak wtedy, gdy aksjomat zupełności rozumiemy w taki oto sposób: nie można rozszerzyć systemu tak, aby zachodziły aksjomaty dotyczące działań i porządku. Jednakże całe zagadnienie może być postawione w zupełnie inny sposób"; cytowane za [Ehrlich 1995], s. 173.

[42] Zob. [Ehrlich 1995], s. 180–181, [Fuchs 1963], s. 45, [Kurosz 1965], s. 325.

11.1. Twierdzenie Höldera: Grupa uporządkowana $\mathfrak{G} = (\mathbb{G}, \oplus, e, <_G)$ jest archimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest przemienna oraz izomorficzna z pewną podgrupą grupy addytywnej liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, 0, <)$.

Niech $\mathfrak{G}$ będzie grupą archimedesową. Rozważane są dwa przypadki. Pierwszy:

$$(1) \quad \exists x \in \mathbb{G} \forall y \in \mathbb{G}[e \leqslant_G y <_G x \to y = e].$$

Niech $g \in \mathbb{G}$ będzie takim elementem, że $\forall y \in \mathbb{G}[e \leqslant_G y <_G g \to y = e]$. zaś $a$ dowolnym, dodatnim elementem grupy. Istnieje wówczas taka liczba naturalna $n$, że zachodzi: $ng \leqslant a < (n+1)g$. Stąd dostajemy $e \leqslant a - ng < g$, co oznacza, że $a = ng$. $\mathfrak{G}$ jest zatem grupą cykliczą generowaną przez element $g$ i jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$.

Gdy zachodzi drugi przypadek:

$$(2) \quad \forall x \in \mathbb{G} \exists y \in \mathbb{G}[e <_G y <_G x],$$

to grupa $\mathfrak{G}$ jest przemienna oraz izomorficzna z $(\mathbb{R}, +, 0, <)$. Skupimy się na wskazaniu izomorfizmu.

Ustalmy $a \in \mathbb{G}$, $e <_G a$. Dla dowolnego $b \in \mathbb{G}$ definiowana jest para zbiorów:

$$L_b = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, ma \leqslant_G nb\},\ U_b = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, nb <_G ma\},$$

gdzie $ma$ oznacza $\underbrace{a \oplus ... \oplus a}_{m-razy}$. Pokazuje się, że para $(L_b, U_b)$ jest przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}, <)$.

Przyjmijmy $f(a) =_{df} 1$ oraz

$$f(b) =_{df} (L_b, U_b).$$

Pokazuje się, że odwzorowanie $f : \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ jest izomorfizmem grup. Funkcja $f$ zachowuje też porządek, bo gdy $e <_G b$, to dla pewnego $n$ jest: $a \leqslant_G nb$, czyli $\frac{1}{n} \in L_b$, a wówczas liczba rzeczywista $(L_b, U_b)$ jest dodatnia.[43]

11.2. Istotnym momentem przedstawionego dowodu jest utożsamienie liczby rzeczywistej z przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}, <)$. Implikacja

$$e <_G b \to 0 < f(b),$$

oparta jest na prawidłowości dotyczącej przekrojów. Otóż przyjmując definicję porządku przekrojów zbioru $(\mathbb{Q}, <)$:

$$(A, B) \prec (C, D) \leftrightarrow_{df} \overline{\overline{C \setminus A}} \geqslant 2,\ ^{44}$$

[43] Zob. [Fuchs 1963], s. 45–46, [Kurosz 1965], s. 325–328.

[44] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 11.5, przypadek 2(b).

można pokazać to, co w przedstawionym wyżej dowodzie uznaje się za oczywiste, mianowicie: jeżeli $(A, B)$ jest przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}, <)$ oraz istnieje takie $q \in \mathbb{Q}_+$, że $q \in A$, to

$$((-\infty, 0], (0, +\infty)) \prec (A, B),$$

co oznacza, że liczba rzeczywista $(A, B)$ jest dodatnia.

**12.** Wartość bezwzględna w grupie uporządkowanej $(\mathfrak{G}, <)$ definiowana jest jak następuje:

$$|a| =_{df} \max\{a, -a\}.$$

W zbiorze $\mathbb{G}$ definiowana jest relacja:

$$a \ll b \leftrightarrow_{df} \forall n \in \mathbb{N}[n|a| < |b|];$$

element $a$ jest nazywany nieskończenie mniejszym względem $b$.

W zbiorze $\mathbb{G}\backslash\{0\}$ definiowana jest relacja:

$$a \approx b \leftrightarrow_{df} \exists m, n \in \mathbb{N}[m|b| > a \wedge b < n|a|].$$

Pokazuje się, że jest to relacja równoważności oraz, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{G}\backslash\{0\}$ zachodzi:

$$a \ll b \ \vee a \approx b \ \vee b \ll a.$$

W zbiorze ilorazowym $\mathbb{G}\backslash\{0\}/_{\approx}$ definiowany jest porządek:

$$[a] \prec [b] \leftrightarrow_{df} \exists x \in [a] \exists y \in [b][x \ll y].$$

Pokazuje się, że $\prec$ jest porządkiem liniowym.

Grupa (nietrywialna) $(\mathfrak{G}, <)$ jest archimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\mathbb{G}\backslash\{0\}/_{\approx}$ jest singletonem.

12.1 Niech $\gamma = \overline{(\mathbb{G}\backslash\{0\}/_{\approx}, \prec)}$ będzie typem porządkowym.[45] Wówczas grupa uporządkowana $(\mathfrak{G}, <)$ nazywana jest grupą typu $\gamma$.

**13.** Grupa $(\mathfrak{G}', <')$ jest rozszerzeniem archimedesowym grupy $(\mathfrak{G}, <)$, gdy $\mathbb{G} \subset \mathbb{G}'$ oraz

$$\forall y \in \mathbb{G}' \exists x \in \mathbb{G}[y \approx x].$$

Kryterium zupełności Hahna (dla grup): Grupa $(\mathfrak{G}, <)$ jest zupełna w sensie Archimedesa (Archimedean complete), gdy nie istnieje rozszerzenie archimedesowe grupy $(\mathfrak{G}, <)$.

[45] W sprawie pojęcia typu porządkowego zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], rozdz. VI oraz rozdz. II, s. 98.

Hahn pokazał, że istnieją grupy niearchimedesowe, które są zupełne w sensie Archimedesa – są to odpowiednie grupy Hahna.

**14.** Grupa Hahna. Niech $(\Gamma, <_\Gamma)$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym. Zdefiniujemy specjalną grupę szeregów formalnych o współczynnikach z ciała liczb rzeczywistych.

Niech $\Delta \subseteq \Gamma$ wraz z porządkiem, który jest zacieśnieniem porządku $<_\Gamma$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym. Niech

$$\sum_{y\in\Delta} r_y x^y,$$

gdzie $r_y \in \mathbb{R}$, będzie szeregiem formalnym. Przyjmujemy, że

$$\mathbb{R}[\Gamma] = \{\sum_{y\in\Delta} r_y x^y : \ \Delta \subseteq \Gamma\},$$

gdzie $(\Delta, <_\Gamma)$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym. Dalej, dla uproszczenia, elementy zbioru $\mathbb{R}[\Gamma]$ będziemy zapisywać w postaci

$$\sum_{y\in\Gamma} r_y x^y.$$

Dodawanie i porządek w zbiorze $\mathbb{R}[\Gamma]$ definiowane są jak następuje:

$$\sum_{y\in\Gamma} a_y x^y \oplus \sum_{y\in\Gamma} b_y x^y =_{df} \sum_{y\in\Gamma} (a_y + b_y) x^y,$$

$$\sum_{y\in\Gamma} a_y x^y \prec \sum_{y\in\Gamma} b_y x^y \leftrightarrow_{df} \exists y_0 \forall y [y <_\Gamma y_0 \to (a_y = b_y \wedge a_{y_0} < b_{y_0})].$$

Zbiór $\mathbb{R}[\Gamma]$ z działaniem $\oplus$ oraz porządkiem $\prec$ jest grupą uporządkowaną; grupę tę nazywa się grupą Hahna i oznacza symbolem $\mathfrak{R}[\Gamma]$.

14.1. Twierdzenie Hahna o zanurzeniu (dla grup). Niech $\Gamma$ będzie liczbą porządkową. Gdy $(\mathfrak{G}, <)$ jest grupą uporządkowaną typu $\Gamma$, to istnieje taki izomorfizm grup uporządkowanych

$$h : \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}[\Gamma],$$

że grupa $\mathfrak{R}[\Gamma]$ jest archimedesowym rozszerzeniem grupy, która jest obrazem grupy $(\mathfrak{G}, <)$ w przekształceniu $h$.

Twierdzenie Hahna o zupełności (dla grup). Grupa $\mathfrak{R}[\Gamma]$ jest jedyną, z dokładnością do izomorfizmu, grupą typu $\Gamma$, zupełną w sensie Archimedesa.

Tak więc, gdy w zbiorze $\Gamma$ są co najmniej dwa elementy, to $\mathfrak{R}[\Gamma]$ jest grupą niearchimedesową, zupełną w sensie Archimedesa.

**15.** Ciało Hahna. Niech $(\mathbb{G}, +, 0, <)$ będzie grupą uporządkowaną. W zbiorze szeregów formalnych $\mathbb{R}[\mathbb{G}]$ definiowane jest mnożenie:

$$\sum_{y\in\mathbb{G}} a_y x^y \odot \sum_{y\in\mathbb{G}} b_y x^y =_{df} \sum_{y\in\mathbb{G}} (\sum_{\mu+\nu=y} a_\mu b_\nu) x^y, \quad \text{gdzie } \mu, \nu \in \mathbb{G}.$$

Pokazuje się, że definicja ta jest poprawna, tj. istnieje taki podzbiór $\Delta \subseteq \mathbb{G}$, gdzie $(\Delta, <)$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym i

$$\sum_{y\in\mathbb{G}} (\sum_{\mu+\nu=y} a_\mu b_\nu) x^y = \sum_{y\in\Delta} (\sum_{\mu+\nu=y} a_\mu b_\nu) x^y$$

oraz, że każda suma

$$\sum_{\mu+\nu=y} a_\mu b_\nu$$

ma skończenie wiele składników.

Z definicji powyższej wynika w szczególności, że gdy $\mu, \nu \in \mathbb{G}$, to

$$x^\mu \odot x^\nu = x^{\mu+\nu},$$

przy czym

$$a_0 x^0 =_{df} a_0.$$

Pokazuje się, że grupa $\mathfrak{R}[\mathbb{G}]$ wraz z wyżej zdefiniowanym działem jest ciałem uporządkowanym. Ciało to nazywa się ciałem Hahna i oznacza symbolem $\mathfrak{R}(\mathbb{G})$.

Można pokazać, że ciało $\mathfrak{R}(\mathbb{G})$ jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy grupa $(\mathbb{G}, +, 0, <)$ jest trywialna, tj. $\mathbb{G} = \{0\}$.

**16.** Ciało uporządkowane $\mathfrak{F} = (\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest zupełne w sensie Archimedesa, gdy grupa addytywna $(\mathbb{F}, +, 0, <)$ jest zupełna w sensie Archimedesa.

Hahn pokazał, że istnieją ciała niearchimedesowe i zupełne w sensie Archimedesa, czyli takie ciała niearchimedesowe, że ich grupa addytywna jest izomorficzna z pewną grupą Hahna. Są to odpowiednio dobrane ciała Hahna.

**17.** Niech $\mathfrak{F} = (\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem archimedesowym. W zbiorze $\mathbb{F} \setminus \{0\}$, podobnie jak wyżej w punkcie 12, definiowana jest relacja równoważności $\approx$. W zbiorze ilorazowym $\mathbb{F} \setminus \{0\}/_\approx$ obok porządku

$$[a] \prec [b] \leftrightarrow_{df} \exists x \in [a] \exists y \in [b][x \ll y],$$

definiowane jest mnożenie:

$$[a] \otimes [b] =_{df} [a \cdot b].$$

Pokazuje się, że struktura $(\mathbb{F} \setminus \{0\}/_{\approx}, \otimes, [1], \prec)$ jest grupą przemienną, uporządkowaną; przyjmuje się, że wyznacza ona typ ciała $\mathfrak{F}$, dokładniej:

ciało $\mathfrak{F}$ jest typu $(\mathfrak{G}, <)$, gdzie $(\mathfrak{G}, <)$ jest grupą uporządkowaną, gdy grupa $(\mathfrak{G}, <)$ jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{F} \setminus \{0\}/_{\approx}, \otimes, [1], \prec)$.

Mówimy, że ciało $\mathfrak{H}$ jest archimedesowym rozszerzeniem ciała $\mathfrak{F}$, gdy grupa addytywna ciała $\mathfrak{H}$ jest archimedesowym rozszerzeniem ciała $\mathfrak{F}$.

Twierdzenie Hahna o zanurzeniu (dla ciał). Gdy $\mathfrak{F}$ jest ciałem uporządkowanym typu $(\mathfrak{G}, <)$, to istnieje taki izomorfizm ciał uporządkowanych

$$h : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{G}),$$

że ciało $\mathfrak{R}(\mathbb{G})$ jest archimedesowym rozszerzeniem ciała, które jest obrazem ciała $\mathfrak{F}$ w przekształceniu $h$.

Twierdzenie Hahna o zupełności (dla ciał). Ciało $\mathfrak{R}(\mathbb{G})$ jest jedynym, z dokładnością do izomorfizmu, ciałem uporządkowanym typu $(\mathfrak{G}, <)$, które jest zupełne w sensie Archimedesa.

Przyjmując, że typ ciała wyznacza grupa trywialna, dostajemy, że ciało liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}$ jest ciałem Hahna $\mathfrak{R}(\{0\})$. Stąd ciało liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}$ jest jedynym, z dokładnością do izomorfizmu, ciałem uporządkowanym zupełnym w sensie Archimedesa typu $(\{0\}, <)$.

# Ciało unormowane[46]

**18.** Niech $\mathcal{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ będzie ciałem (przemiennym lub nieprzemiennym). Normą w $\mathcal{F}$ nazywa się odwzorowanie $\varphi : F \mapsto \mathbb{R}$, spełniające warunki:
(1) $\varphi(a) \geqslant 0,\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1,$
(2) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$
(3) $\varphi(a + b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b).$

Normę $\varphi$ spełniającą warunek
(3') $\varphi(a + b) \leqslant max\{\varphi(a), \varphi(b)\}, \quad$ dla $\ a, b \in F,$
nazywa się niearchimedesową.[47]

Pokazuje się, że norma jest niearchimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(2) \leqslant 1$, czy ogólnie: $\varphi(n) \leqslant 1$. Odpowiednio, normę spełniającą warunek $\varphi(2) > 1$, nazywa się archimedesową.

Czasami normę oznacza się tym samym symbolem, co wartość bezwzględną. Przyjmując na chwilę tę konwencję możemy napisać: norma $|\ |$ jest archimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|1 + 1| > 1$$

i niearchimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{n}-\text{razy}}| \leqslant 1.$$

Przykłady. (1) Norma trywialana to norma, która przyjmuje tylko dwie wartości: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) = 1$, dla $a \neq 0$. Jest to norma niearchimedesowa.

[46] Referujemy na podstawie [Browkin 1978], rozdz. IV, *Normy w ciałach.*

[47] Gdy $\varphi$ jest normą, to funkcja $\varphi^s$, gdzie $s \in \mathbb{R}_+$, dana wzorem $\varphi^s(x) = (\varphi(x))^s$, także jest normą. Jeżeli $\varphi$ i $\psi$ są normami w $\mathcal{F}$ i istnieje takie $s \in \mathbb{R}_+$, że $\varphi = \psi^s$, to normy te nazywa się równoważnymi. Z uwagi na szkicowość tej prezentacji pomijamy normy równoważne, tak więc gdy mówimy, że dwie normy są różne, to znaczy to, że nie są one równoważne.

(2) Niech $\varphi_\infty$ oznacza wartość bezwzględną w ciele uporządkowanym liczb wymiernych $\mathfrak{Q}$. Wówczas $\varphi_\infty$ jest normą w ciele liczb wymiernych $\mathcal{Q}$. To samo w odniesieniu do wartości bezwzględnej w $\mathfrak{R}$.

(3) Niech $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ będzie ciałem liczb zespolonych. Funkcja $\varphi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\varphi(a + bi) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

jest normą w ciele $\mathcal{C}$.

(4) Ciało kwaternionów $\mathcal{H} = (\mathbb{H}, +, \cdot, 0, 1)$. Zbiór kwaternionów dany jest definicją:

$$\mathbb{H} = \{a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k : \ a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$$

gdzie $i,\ j,\ k$ to elementy spełniające równania

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ik = -ki = j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Dodawanie i mnożenie definiowane jest jak następuje:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) + (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k)\\ = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i + (a_3 + b_3)j + (a_4 + b_4)k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)(b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k)\\ &\quad = (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3)i\\ &\qquad + (a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_4 b_2 - a_2 b_4)j + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2)k.\end{aligned}$$

Zbiór $\mathbb{H}$ z wyżej określonymi działaniami stanowi ciało kwaternionów $\mathcal{H}$.

Funkcja $\varphi : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\varphi(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$$

jest normą w ciele $\mathcal{H}$.

(5) Norma $p$-addyczna. Każdą liczbę wymierną $q \in \mathbb{Q}$ można przedstawić w postaci

$$q = p^m \frac{a}{b}, \quad \text{gdzie} \quad m, a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0, \quad p \nmid ab\ .$$

Funkcja $\varphi_p : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\varphi_p(q) = p^{-m}$$

jest normą w $\mathcal{Q}$; $\varphi_p$ jest nazywana normą $p$-addyczną.

Dla dowolnego $n$ jest $\varphi_p(n) \leqslant 1$, zatem $\varphi_p$ jest normą niearchimedesową.

(6) Niech $\mathcal{F}(x)$ będzie ciałem funkcji wymiernych o współczynnikach w ciele $\mathcal{F}$, niech $c$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą większą od 1. Każdą funkcję $f(x) \in \mathcal{F}(x)$ można przedstawić w postaci

$$f(x) = x^m \frac{a \cdot g(x)}{b \cdot h(x)},$$

gdzie $m \in \mathbb{Z}$, $a, b \in F$, $b \neq 0$, $g(x),\ h(x)$ są wielomianami o współczynnikach z ciała $\mathcal{F}$, tj. $g(x), h(x) \in \mathcal{F}[x]$, $x \nmid g(x)h(x)$.

Funkcja $\varphi_x : F(x) \mapsto \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\varphi_x(f) = c^{-m},$$

gdzie $c$ jest pewną liczbą rzeczywistą większą od 1, jest normą w $\mathcal{F}(x)$. Dla każdego $a \in F \setminus \{0\}$ jest $\varphi_x(a) = 1$, zatem norma $\varphi_x$ jest niearchimedesowa.

**19.** Funkcja $\varrho : F \times F \mapsto \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\varrho_\varphi(a, b) = \varphi(a - b)$$

jest metryką na $F$; odpowiednią przestrzeń metryczną oznaczamy jako $(F, \varrho_\varphi)$. Topologię wyznaczoną przez tę metrykę nazywamy topologią wyznaczoną przez normę $\varphi$, a odpowiednią przestrzeń topologiczną oznaczamy jako $(F, \tau_\varphi)$.

Metryka wyznaczona przez normę niearchimedesową spełnia nierówność

$$\varrho(a, b) \leqslant max\{\varrho(a, c), \varrho(c, b)\}, \qquad \text{dla} \quad a, b, c \in F.$$

W takiej *niearchimedesowej* przestrzeni metrycznej, dla przykładu, każdy trójkąt jest równoramienny, a każdy punkt leżący wewnątrz danej kuli jest jej środkiem.

Pokazuje się, że jeżeli $\varphi$ jest normą w $\mathcal{F}$, to działania
(1) $F \times F \ni (x, y) \mapsto x + y \in F$,
(2) $F \ni x \mapsto -x \in F$,
(3) $F \times F \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in F$,
(4) $F \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^{-1} \in F$,
(5) oraz sama funkcja $\varphi$
są ciągłe w topologii $\tau_\varphi$.

**20.** Stosując do przestrzeni $(F, \varrho_\varphi)$ twierdzenie o uzupełnianiu przestrzeni metrycznej do przestrzeni zupełnej dostajemy, że istnieje przestrzeń metryczna zupełna $(\overline{F}, \bar{\varrho})$ oraz izometria $i : F \to \overline{F}$ taka, że $i(F)$ jest podzbiorem gęstym (w sensie topologicznym) przestrzeni $\overline{F}$.[48] Dowód jest podobny do konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych metodą Cantora:

[48] Zob. [Hausdorff 1937], s. 122–124, [Engelking 1989], t. II, s. 316.

(1) $\mathbf{C} = \{(a_n) \in F^{\mathbb{N}} : \ (a_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego$\}$,
(2) $(a_n) \approx (b_n) \Leftrightarrow_{df} \lim\limits_{n\mapsto\infty}(a_n - b_n) = 0$,
(3) $\overline{F} = \mathbf{C}/_{\approx}$.

Pozostaje jeszcze ustalenie izometrii $i$. Natomiast zbiór $i(F)$ to zbiór klas abstrakcji wyznaczonych przez ciągi stałe $(a, a, a, \dots)$, gdzie $a \in F$, dlatego dalej nie będziemy odróżniać $F$ od $i(F)$.

W algebrze powyższe twierdzenie jest odpowiednio wzmocnione. Pokazuje się mianowicie, że zachodzi:

„Niech $\varphi$ będzie normą w ciele $\mathcal{F}$, a $\varrho_\varphi$ odpowiadającą jej metryką. Niech $(\overline{F}, \overline{\varrho_\varphi})$ będzie uzupełnieniem przestrzeni metrycznej $(F, \varrho_\varphi)$. Wtedy w zbiorze $\overline{F}$ można jednoznacznie określić strukturę ciała tak, by $\mathcal{F}$ było jego podciałem i działania w $\overline{F}$ były funkcjami ciągłymi. Ponadto normę $\varphi$ można jednoznacznie rozszerzyć do takiej funkcji ciągłej $\overline{\varphi} : \overline{F} \mapsto R$, która jest normą".[49]

Uzupełnienie ciała $\mathcal{F}$ względem normy $\varphi$ oznaczymy jako $\overline{\mathcal{F}}$, natomiast dla normy $\overline{\varphi}$ zachowamy oznaczenie $\varphi$.

Wartość bezwzględna w ciele uporządkowanym liczb wymiernych $\mathfrak{Q}$ to norma $\varphi_\infty$ w ciele $\mathcal{Q}$. Gdy liczby rzeczywiste są rozumiane w ten sposób, że zbiór $\mathbb{R}$ jest uzupełnieniem przestrzeni metrycznej $(\mathbb{Q}, \varrho_{\varphi_\infty})$ do przestrzeni metrycznej zupełnej, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, to działania oraz wartość bezwzględna w ciele $\mathfrak{R}$ są, na podstawie podanego twierdzenia, jedynym rozszerzeniem działań oraz wartości bezwzględnej w ciele $\mathfrak{Q}$, tj. $\overline{\mathcal{Q}} = \mathcal{R}$. Tak więc ciało $\mathfrak{R}$ jest jedynym rozszerzeniem ciała $\mathcal{Q}$ z normą $\varphi_\infty$ do ciała unormowanego zupełnego. A zatem, gdy dana jest konstrukcja liczb rzeczywistych, czy to Dedekinda, czy Cantora, to można przyjąć, że ciało liczb rzeczywistych jest tym jedynym uzupełnieniem przestrzeni metrycznej $(\mathcal{Q}, \varrho_{\varphi_\infty})$ do przestrzeni metrycznej zupełnej.

Gdy metryka w ciele liczb wymiernych $\mathcal{Q}$ jest wyznaczona przez normę $\varphi_p$, to $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_p$, a ciało $\overline{\mathcal{Q}}$ jest oznaczane jako $\mathcal{Q}_p$.

20.1. Pokazuje się, że jeżeli $\varphi$ jest normą w ciele liczb wymiernych, to jest albo normą trywialną, albo normą $\varphi_p$, albo normą $\varphi_\infty$ i normy te są różne.[50]

W związku z tym twierdzeniem ciało liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ jest przedstawiane jako element ciągu ciał zupełnych, które powstają w wyniku uzu-

[49] Zob. [Browkin 1978], s. 202. W oryginale występują inne oznaczenia literowe.
[50] Zob. [Browkin 1978], s. 190.

pełnienia $\mathcal{Q}$ z normą $\varphi_p$ lub $\varphi_\infty$:

$$\mathcal{Q}_2,\ \mathcal{Q}_3,\ \mathcal{Q}_5,\ \mathcal{Q}_7,\ \ldots\ ,\ \mathcal{Q}_\infty = \mathcal{R}.\ ^{51}$$

Z uwagi na to przedstawienie ciało liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ jest jednym z wielu ciał, które są uzupełnieniem ciała unormowanego $\mathcal{Q}$. Czym zatem wyróżnia się $\mathcal{R}$?

Kryterium matematyczne jest proste: Wśród wielu norm, jakie *dopuszcza* ciało $\mathcal{Q}$ jest tylko jedna norma archimedesowa. Ciało $\mathcal{R}$ jest uzupełnieniem ciała $\mathcal{Q}$ z tą jedyną normą archimedesową.

Spróbujemy teraz wyjaśnić wyróżnioną rolę normy $\varphi_\infty$ przyjmując perspektywę historyczną.

Norma $\varphi_\infty$ jest definiowana *via* jedyny porządek liniowy w $\mathbb{Q}$ zgodny z działaniami w $\mathcal{Q}$. Ideę zgodności struktury algebraicznej z porządkiem można odnaleźć już w *Elementach* Euklidesa w związku z występującym tam pojęciem wielkości ciągłej (wielkości geometrycznej). Tak więc norma $\varphi_\infty$ jest historycznie wyróżniona w ten sposób, że od czasów Euklidesa porządek zgodny z działaniami był wiązany z wielkością ciągłą.[52]

Perspektywa historyczna pozwala też zrozumieć, jak pewne idee związane z definicją norm $\varphi_\infty$ i $\varphi_p$ zbiegają się w pojęciu ciała liczb wymiernych.

W dowodach z Księgi V, gdzie – przypomnijmy – rozwinięta jest teoria proporcji wielkości ciągłych, aksjomat Archimedsa jest stosowany wraz z zasadą indukcji w wersji: w każdym niepustym podzbiorze liczb naturalnych istnieje element najmniejszy.[53] Ale najmniejszy z uwagi na jaki porządek? To u Euklidesa bynajmniej nie jest jasne. Nie jest przecież tak, że istnieje tylko jeden porządek na zbiorze liczb naturalnych zgodny ze strukturą algebraiczną liczb naturalnych $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$.

Definicja normy $\varphi_p$ wiąże się z jednoznacznością rozkładu liczby naturalnej na iloczyn liczb pierwszych, a więc z zasadniczym twierdzeniem arytmetyki. Zasada indukcji w wyżej przedstawionej wersji jest stosowana we współczesnym dowodzie zasadniczego twierdzenia arytmetyki,[54] a cały dowód jest w zasadzie powtórzeniem dowodu twierdzenia 31 z Księgi VII *Elementów* Euklidesa.

Te trzy idee – zgodność porządku z działaniami, aksjomat Archimedesa, aksjomat indukcji – zbiegają się w definicji ciała liczb wymiernych. Ciało liczb wymiernych to najmniejsze uporządkowane ciało archimedesowe, które zawiera liczby naturalne spełniające warunek: w każdym niepustym

[51] Zob. [Neukirch 1995], s. 169.
[52] Zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 21–24.
[53] Zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 1–6.
[54] Zob. [Birkhoff, Mac Lane 1957], s. 29–30.

podzbiorze istnieje element najmniejszy z uwagi na jedyny porządek zgodny ze strukturą algebraiczną ciała $\mathcal{Q}$.

**21.** Ciało liczb $p$-addycznych $\mathcal{Q}_p = (\mathbb{Q}_p, +, \cdot, 0, 1)$, to ciało unormowane, które powstaje przez uzupełnienie ciała liczb wymiernych względem normy $\varphi_p$.

Pokazuje się, każdy element zbioru $\mathbb{Q}_p$ przedstawia się jednoznacznie w postaci szeregu

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_m p^m,$$

gdzie $a_m \in \{0, \ldots, p-1\}$, zaś $m \in \mathbb{Z}$.[55]

21.1. Własności *analityczne* ciała $\mathcal{Q}_p$. Podamy dwie własności, które odróżniają ciało $\mathcal{Q}_p$ od ciała liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}$. Niech $(a_n) \subset \mathbb{Q}_p$, wówczas:

(1) ciąg $(a_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a_{n+1}) = 0$,
(2) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. [56]

21.2. Własności topologiczne. Zbiór $\mathbb{Q}_p$ z topologią $\tau_{\varphi_p}$ jest przestrzenią Hausdorffa, lokalnie zwartą, całkowicie niespójną.[57] Z kolei przestrzeń topologiczna $(\mathbb{R}, \tau_{\varphi_\infty}) = (\mathbb{R}, \tau_<)$ jest przestrzenią Hausdorffa, lokalnie zwartą i spójną. Ten ostatni warunek oznacza ni mniej ni więcej jak to, że porządek liczb rzeczywistych jest ciągły w sensie Dedekinda.[58]

**22.** Związek między zupełnością ciała a normą archimedesową ustalony jest w twierdzeniu:

„Jeżeli ciało $\mathcal{F}$ jest zupełne w metryce odpowiadającej normie archimedsowej $\varphi$, to $\mathcal{F}$ jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych lub ciałem liczb zespolonych, a norma jest równoważna ze zwykłą wartością bezwzględną".[59]

Dodajmy, że ciałem zupełnym z normą archimedesową jest też ciało kwaternionów $\mathcal{H}$, a „zwykła wartość bezwzględna" to wyżej zdefiniowane normy w ciałach $\mathcal{C}$ i $\mathcal{H}$.[60] Innymi słowy, każde ciało unormowane, z normą archime-

[55] Zob. [Gouvêa 2000], s. 69, [Narkiewicz 1977], s. 334.

[56] Zob. [Narkiewicz 1977], s. 330.

[57] Zob.[Gouvêa 2000], s. 64–65, [Neukrich 1995], s. 172, [Robert 2000], s. 38. Lokalna zwartość oznacza, że dla każdego punktu istnieje otoczenie $U$, którego domknięcie $\overline{U}$ jest zbiorem zwartym. Całkowita niespójność oznacza, że dla każdego punktu $a$ iloczyn wszystkich zbiorów domknięto-otwartych zawierających $a$ jest singletonem $\{a\}$.

[58] Zob. wyżej rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 3.1.

[59] [Browkin 1978], s. 204.

[60] Zob. [Maurin 1991], t. II, s. 316. W wykładzie J. Brokwina pominięto $\mathcal{H}$, bo rozważane są tylko ciała przemienne.

desową i zupełne w sensie Cauchy'ego jest izomorficzne albo z ciałem liczb rzeczywistych z normą zadaną przez wartość bezwzględną, albo z ciałem liczb zespolonych z normą zadaną przez metrykę euklidesową, albo z ciałem kwaternionów z normą zadaną przez metrykę euklidesową.

Twierdzenie to zostało ogłoszone w roku 1918 przez Aleksandra Ostrowskiego i w literaturze jest nazywane twierdzeniem Ostrowskiego.[61]

22.1. Krzysztof Maurin opatrzył powyższe twierdzenie następującym komentarzem:

„Twierdzenie Ostrowskiego ma duże znaczenie filozoficzne: wykazuje jak idea ciała z normą archimedesową realizuje się w trzech najważniejszych ciałach: $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ i $\mathcal{H}$. Ciało liczb rzeczywistych było znane już w starożytności (Eudoksos), choć dopiero R. Dedekind w roku 1858 (drukiem w roku 1872) podał pierwszą definicję liczby rzeczywistej – za pomocą przekroju w ciele $\mathcal{Q}$. Ciało $\mathcal{R}$ można aksjomatycznie określić jako przemienne, zupełne liniowo uporządkowane ciało archimedesowe.

Ciało liczb zespolonych $\mathcal{C}$ powstało 2000 lat później dzięki wysiłkom Gaussa i Cauchy'ego. Kwaterniony, jak wiemy, odkrył W. R. Hamilton (1805–1856) w roku 1843, a ich obszerny wykład podał w *Lectures on Quaternions*, Dublin 1853".[62]

„Duże znaczenie filozoficzne" – ale jakie? Dlaczegóż to ciała $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ i $\mathcal{H}$ są „ważniejsze" od ciał $\mathcal{Q}_p$? Dlaczegóż to norma archimedesowa jest „ważniejsza" od niearchimedesowej? Czy z twierdzenia Ostrowskiego wynika, że liczby rzeczywiste „można aksjomatycznie określić jako przemienne, zupełne liniowo uporządkowane ciało archimedesowe"? Jakie są dowody na to, że „przemienne, zupełne liniowo uporządkowane ciało archimedesowe" „było znane już w starożytności"?

(1) Rozdział *Eudoxos versus Dedekind* poświęciliśmy w całości pytaniu, czy ciało liczb rzeczywistych było istotnie znane w starożytności. W tym miejscu możemy powtórzyć, że teza, iż Eudoxos znał liczby rzeczywiste jest z matematycznego punktu widzenia bezpodstawna, gdyż struktura wielkości ciągłych (geometrycznych), jaką otrzymaliśmy interpretując Księgę V *Elementów* Euklidesa jest inną strukturą niż ciało uporządkowane w sposób ciągły. Na gruncie historycznym natomiast, badając rozwój pojęcia „wiel-

[61] Zob. A. Ostrowski, *Über einige Lösungen der Funktionalgleichung* $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$, Acta Mathematica 41, 1918; podajemy za [Koecher, Remmert 1995], s. 245.

[62] [Maurin 1991], t. II, s. 316. Jakkolwiek w zacytowanym fragmencie występują te same litery $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{H}$, co w niniejszej pracy, to jednak w książce Krzysztofa Maurina nie odróżnia się symbolicznie ciał $\mathcal{R}$ i $\mathfrak{R}$, czy $\mathcal{Q}$ i $\mathfrak{Q}$.

kość", można owszem uzasadnić związek między pojęciem ciała uporządkowanego w sposób ciągły, a pojęciem wielkości w takim rozumieniu, jakie odnajdujemy w teorii proporcji Eudoxosa.[63]

(2) Dedekind istotnie podał definicję liczby rzeczywistej, ale tylko tyle. Definicja mówiąca, że liczby rzeczywiste są szczególnym (maksymalnym w sensie, który będzie niżej sprecyzowany) ciałem uporządkowanym i archimedesowym pochodzi od Hilberta.[64] W *Stetigkeit und irrationale Zahlen* porządek liczb rzeczywistych nie jest wprost charakteryzowany ani przez zgodność z działaniami, ani przez aksjomat Archimedesa, a jedynie przez ciągłość w sensie Dedekinda. Dopiero z czasem konstrukcję Dedekinda nazwano ciałem uporządkowanym, archimedesowym i zupełnym (w sensie Cauchy'ego).

(3) Gdy liczby rzeczywiste są definiowane jako szczególne ciało uporządkowane, to zupełność w sensie Cauchy'ego musi być rozumiana jako zupełność ciała uporządkowanego, a nie tak, jak to jest w teorii ciał unormowanych, jako zupełność przestrzeni metrycznej. Z matematycznego punktu widzenia, jeśli tylko jest wyraźnie powiedziane, jak rozumiana jest zupełność, nie ma to żadnego znaczenia, natomiast z filozoficznego punktu widzenia jest to ważne. Pojawia się bowiem pytanie, na jakiej podstawie można porównywać zupełność ciała uporządkowanego i zupełność przestrzeni metrycznej, na jakiej podstawie można porównywać *archimedesowość* porządku w ciele i *archimedesowość* normy w ciele.

W miejsce magicznej „realizacji idei ciała z normą archimedesową" proponujemy mówić o interpretacji aksjomatu Archimedesa.[65] W takim podejściu możemy mówić o faktach, mianowice o tekstach źródłowych, możemy też pokazać, co w różnych tekstach było nazywane aksjomatem Archimedesa. Historia aksjomatu Archimedesa ma swój początek – definicja 4 z Księgi V *Elementów* Euklidesa. Sam Archimedes odnosząc się do tej definicji podał już odmienną formułę.[66] W miejsce „idei normy archimedesowej" wystarczy poprzestać na odnalezieniu samej definicji normy. Tak jak aksjomat Archimedesa możemy związać z konkretnymi tekstami, tak i pojęcie normy, *via* pojęcie liczby rzeczywistej, możemy związać z konkretnymi tekstami, dokładniej chodziłoby tu o tekst, w którym po raz pierwszy zdefiniowano wartość bezwzględną z liczby rzeczywistej.[67]

(4) Na podstawie twierdzenie Ostrowskiego w klasie ciał unormowanych

[63] Zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*.

[64] Zob. rozdz. *Aksjomaty*, pkt. 1.

[65] Z uwagi na słowa „duże znaczenie filozoficzne" przyjmujemy, że zwrot „idea ciała z normą archimedesową realizuje się ..." nie jest jedynie figurą retoryczną.

[66] Zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 4.2.

[67] Zob. rozdz. *Konstrukcja Cantora*, pkt. 1.1.

można wyróżnić ciało liczb rzeczywistych: jest to ciało z normą archimedesową, zupełne (jako przestrzeń metryczna), przemienne (w odróżnieniu od ciała kwaternionów $\mathcal{H}$), które nie jest algebraicznie domkniętne (w odróżnieniu od ciała liczb zespolonych $\mathcal{C}$). Zdanie to można by uznać za definicję i zrazu wydaje, że w charakterystyce ciała liczb rzeczywistych można pominąć porządek. Jednakże już w samej definicji ciała unormowanego liczby rzeczywiste są rozumiane jako ciało uporządkowane. Dlaczego?

Otóż norma to specjalna funkcja rzeczywista, której przeciwdziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich wraz z zerem. Pojęcie „zbiór liczb rzeczywistych dodatnich" jest związane z tym, że liczby rzeczywiste są ciałem uporządkowanym.[68]

[68] W teorii ciał unormowanych, na przykład wtedy, gdy wykorzystywane są funkcje rzeczywiste $log x$, czy $c^x$, zakłada się również ciągłość porządku liczb rzeczywistych. Zob. [Browkin 1978], rozdz. IV.

# Ciało topologiczne[69]

**23.** Ciało topologiczne $(\mathcal{F}, \tau)$, to ciało algebraiczne $\mathcal{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ z taką topologią $\tau$, że działania w $\mathcal{F}$

(1) $F \times F \ni (x, y) \mapsto x + y \in F$,
(2) $F \ni x \mapsto -x \in F$,
(3) $F \times F \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in F$,
(4) $F \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^{-1} \in F$.

są ciągłe w topologii $\tau$.

Jeżeli przestrzeń topologiczna $(F, \tau)$ jest spójna, to ciało topologiczne nazywane jest spójnym. Pokazuje się, że każde ciało topologiczne jest albo spójne, albo całkowicie niespójne.

Jeżeli przestrzeń topologiczna $(F, \tau)$ jest lokalnie zwarta, to ciało topologiczne nazywane jest lokalnie zwartym.[70] Gdy topologia $\tau$ nie jest dyskretna i $(F, \tau)$ jest przestrzenią lokalnie zwartą, to ciało topologiczne nazywane jest ciałem ciągłym.

Pokazuje się, że jeżeli $(\mathcal{F}, \tau)$ jest ciałem topologicznym, to przestrzeń $(F, \tau)$ jest regularna.[71]

Podobnie jak ciało definiowany jest pierścień topologiczny.

23.1. Topologia w ciele $\mathcal{F}$ jest wprowadzana przez zdefiniowanie bazy otoczeń w każdym punkcie. Gdy dana jest baza otoczeń zera $\mathfrak{U}_0$, to rodzina $\mathfrak{U}_a = \{a + U : U \in \mathfrak{U}_0\}$ stanowi bazę otoczeń punktu $a$.

Pokazuje się, że ciało topologiczne lokalnie zwarte ma przeliczalną bazę otoczeń w każdym punkcie.

---

[69] Referujemy na podstawie [Pontriagin 1961], rozdz. IV *Ciała topologiczne*.

[70] Zbiór zwarty Pontriagin nazywa zbiorem dwuzwartym; zob. [Pontriagin 1961], §13.

[71] Zob. [Pontriagin 1961], s. 95. Przestrzeń topologiczna $(X, \tau)$ jest regularna, gdy spełnione są dwa warunki: (1) dla każdych $x, y \in X$ istnieje $U \in \tau$, taki że $x \in U$ oraz $y \notin U$, (2) dla każdego $x \in X$, dla każdego zbioru domkniętego $H$ istnieją zbiory $U_1, U_2 \in \tau$, takie że $x \in U_1$, $H \subset U_2$ oraz $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

„Istnienie przeliczalnej bazy w każdym punkcie daje możliwość do zastosowania badania ciał topologicznych pojęcia ciągu zbieżnego”.[72]

Niech $(a_n) \subset F$, niech $a \in F$. Granica ciągu $(a_n)$ w ciele topologicznym $(\mathcal{F}, \tau)$ jest definiowana następująco:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leftrightarrow_{df} \forall U \in \mathfrak{U}_a \exists k \forall n [n > k \to a_n \in U].$$

Jeżeli istnieje przeliczalna baza otoczeń $\{U_n\}$ punktu $b$, to rodzina $\{V_n\}$, gdzie $V_n = U_1 \cap \ldots \cap U_n$, stanowi przeliczalną bazę otoczeń punktu $b$ oraz zachodzi: $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots$ . Wówczas, gdy $b \in \overline{M \backslash \{b\}}$, to istnieje taki ciąg punktów $(b_n) \subset M$, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to na podstawie ciągłości działań w ciele $(\mathcal{F}, \tau)$ zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab, \quad \lim_{n\to\infty} (-a_n) = -a,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = a^{-1}, \quad \text{dla} \quad a \neq 0.$$

Ciąg $(a_n) \subset F$ nazywany jest „podstawowym”, lub inaczej ciągiem Cauchy'ego, gdy

$$\forall U \in \mathfrak{U}_0 \exists k \forall n, m [n, m > k \to (a_n - a_m) \in U].$$

„Dwa ciągi $a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots$ i $b_1,\ b_2, \ldots, b_n, \ldots$ nazywamy *równoważnymi*, jeżeli ciąg $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2, \ldots, a_n,\ b_n, \ldots$ jest ciągiem podstawowym. Można bezpośrednio pokazać, że jeżeli dwa ciagi są zbieżne do jednego punktu, to są one równoważnymi ciągami podstawowymi. Łatwo również dowieść, że jeżeli ciało $K$ jest lokalnie dwuzwarte [tj. lokalnie zwarte – P.B.] to każdy ciąg podstawowy jest w nim zbieżny”.[73]

Lokalną zwartość ciała topologiczna można zatem rozumieć (interpretować) jako własność, którą dotąd nazywaliśmy zupełnością w sensie Cauchy'ego.

[72] [Pontriagin 1961], s. 144.
[73] [Pontriagin 1961], s. 145.

23.2. Niech $\mathfrak{F} = (F, +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem uporządkowanym. *Naturalną* topologią w $\mathfrak{F}$ jest topologia porządkowa $\tau_<$, której bazę stanowi rodzina przedziałów otwartych:

$$\{(a,b) : \ a,b \in F, \ a < b\}, \quad \text{gdzie} \ \ (a,b) = \{x \in F : \ a < x < b\}.^{74}$$

Jeżeli $\mathfrak{F}$ jest ciałem uporządkowanym, to można pokazać, że $(\mathcal{F}, \tau_<)$ jest ciałem topologicznym.

Przestrzeń topologiczna $(F, \tau_<)$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy porządek $<$ w ciele $\mathfrak{F}$ jest ciągły w sensie Dedekinda.[75] Tak więc, z wyjątkiem ciała liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}$, wszystkie omawiane dotąd ciała uporządkowane, w szczególności ciała uporządkowane szeregów formalnych Laurenta są ciałami topologicznymi niespójnymi (w istocie całkowicie niespójnymi).

23.3. Przyjmijmy $\mathcal{F}_1 = (F_1, +, \cdot, 0, 1)$. Niech $(\mathcal{F}_1, \tau_1)$ będzie takim ciałem topologicznym, że baza otoczeń w każdym punkcie jest przeliczalna. Niech $(\mathcal{F}_2, \tau_2)$ będzie ciałem topologicznym lokalnie zwartym. Niech $P_1 = (\mathbb{P}_1, +, \cdot, 0)$ będzie takim podpierścieniem ciała $\mathcal{F}_1$, że $\overline{\mathbb{P}_1} = F_1$. Niech $P_2 = (\mathbb{P}_2, +, \cdot, 0)$ będzie podpierścieniem ciała $\mathcal{F}_2$. Niech $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ będzie izomorfizmem pierścieni topologicznych $P_1$ i $P_2$.[76] Pokazuje się, że istnieje dokładnie jeden izomorfizm $\varphi$ ciała topologicznego $(\mathcal{F}_1, \tau_1)$ na podciało topologiczne $(\mathcal{F}, \tau_2)$ ciała $(\mathcal{F}_2, \tau_2)$, taki że $\varphi_{|\mathbb{P}_1} = f$.

Odpowiednikiem uzupełnienia ciała unormowanego do ciała unormowanego zupełnego jest w teorii ciał topologicznych pojęcie ciągłego domknięcia. Otóż mówi się, że ciało topologiczne $(\mathcal{F}, \tau)$ dopuszcza ciągłe domknięcie jeżeli może być odwzorowane izomorficznie na podciało pewnego ciała ciągłego $(\mathcal{K}, \tau_k)$. Korzystając z wyżej przytoczonego twierdzenia pokazuje się, że domknięcie ciągłe ciała $(\mathcal{F}, \tau)$ jest wyznaczone jednoznacznie i nie zależy od wyboru ciała $(\mathcal{K}, \tau_k)$; domknięcie ciągłe ciała $(\mathcal{F}, \tau)$ jest oznaczane jako $\overline{(\mathcal{F}, \tau)}$.

Gdy dana jest konstrukcja liczb rzeczywistych, czy to Dedekinda, czy Cantora, to zarówno liczby wymierne, jak i liczby rzeczywiste mogą być ujęte jako ciała topologiczne odpowiednio $(\mathcal{Q}, \tau_<)$ i $(\mathcal{R}, \tau_<)$. Z konstrukcji

[74] Od Dedekinda pochodzi ogólniejsze rozumienie przedziału: przedziałem w zbiorze liniowo uporządkowanym $(X, <)$ jest taki podzbiór $P \subset X$, że $\forall x, y, z \in X[(x, y \in P \wedge x < z < y) \to z \in P$; zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], s. 209; [Dedekind 1872], s. 147, oraz wyżej rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 16.3. Gdy porządek w $X$ jest ciągły, to przy założeniu, że przedział jest zbiorem ograniczonym, każdy (otwarty) przedział w rozumieniu Dedekinda jest postaci $(a, b)$, dla pewnych $a, b \in X$. Ale już w ciałach $\mathfrak{Q}$, czy $\mathfrak{R}^*$ tak nie jest.

[75] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 3.1.

[76] To znaczy $f$ jest izomorfizmem i homeomorfizmem.

wynika, że $(\mathcal{R}, \tau_<)$ jest ciałem lokalnie zwartym, zatem ciało $(\mathcal{Q}, \tau_<)$ dopuszcza ciągłe domknięcie $\overline{(\mathcal{Q}, \tau_<)}$. Z konstrukcji wynika także, że ciało $(\mathcal{Q}, \tau_<)$ ma przeliczalną bazę oraz to, że w przestrzeni topologicznej $(\mathbb{R}, \tau_<)$ jest $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Zatem, na podstawie powyższych ustaleń jest: $\overline{(\mathcal{Q}, \tau_<)} = (\mathcal{R}, \tau_<)$.

**24.** „Klasyczne ciała ciągłe".

„Ciało topologiczne przemienne $D^1$ liczb rzeczywistych i ciało topologiczne przemienne $D^2$ liczb zespolonych znajdują szerokie zastosowanie w matematyce i są wszystkim dobrze znane. Podamy w tym paragrafie opis ciała kwaternionów $D^4$, ciała przemiennego $K_0^p$ liczb $p$-addycznych i ciała przemiennego $K_t^p$ szeregów nad ciałem reszt modulo $p$".[77]

Pokazuje się, że ciało liczb wymiernych $\mathcal{Q}$ z bazą otoczeń zera $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie

$$V_n = \{q \in \mathbb{Q} : \ q = \frac{ap^n}{b}, \ a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$$

oraz ciało funkcji wymiernych $\mathcal{Z}_p(x)$ z bazą otoczeń zera $\{V_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, gdzie

$$V_n = \Big\{\frac{x^n f(x)}{g(x)} : \ f(x), g(x) \in \mathcal{Z}_p[x], \ x \nmid g(x)\Big\},$$

są ciałami topologicznymi, oznaczmy je jako $(\mathcal{Q}, \tau_1)$ i $(\mathcal{Z}_p(x), \tau_2)$.

Pokazuje się, że każde z tych ciał dopuszcza ciągłe domknięcie.

„Dowód przeprowadzimy przy pomocy bezpośredniej konstrukcji ciał $K_0^p$ i $K_t^p$",[78] które są ciągłymi domknięciami $\overline{(\mathcal{Q}, \tau_1)}$ i $\overline{(\mathcal{Z}_p(x), \tau_2)}$.

Pokażemy w zarysie, jak wygląda ta konstrukcja.

24.1. W zbiorze szeregów formalnych Laurenta $\mathbb{L} = \{\sum a_j x^j : a_j \in \mathcal{Z}_p\}$ definiowana jest topologia w następujący sposób. Niech $a = \sum a_j x^j \in \mathbb{L}$. Przyjmuje się

$$U_n(a) = \{b \in \mathbb{L} : \ \forall j \in \mathbb{Z}[j \leqslant n \to a_j = b_j]\}, \quad \text{gdzie} \quad b = \sum b_j x^j.$$

Przeliczalna rodzina zbiorów $\{U_n(a) : \ n \in \mathbb{N}, \ a \in \mathbb{L}\}$ wyznacza topologię $\tau_L$ na zbiorze $\mathbb{L}$. Pokazuje się, że przestrzeń topologiczna $(\mathbb{L}, \tau_L)$ jest lokalnie zwarta i całkowicie niespójna. W kolejnym kroku na zbiorze $\mathbb{L}$ definiowana jest, na dwa różne sposoby, struktura ciała algebraicznego.

[77] [Pontriagin 1961], s. 146.
[78] [Pontriagin 1961], s. 152.

Niech $\mathbb{S}$ będzie zbiorem *skończonych* szeregów formalnych $\sum\limits_{j=m}^{j=n} a_j x^j$;

$$\mathbb{S} = \{\sum_{j=m}^{\infty} a_j x^j \in \mathbb{L} : \ \exists n \forall j \in \mathbb{Z}[j > n \to a_j = 0]\}.$$

Następnie definiowane są zbiory:

$$\mathbb{S}_p = \{\frac{q}{p^m} \in \mathbb{Q} : \ q \in \mathbb{Q}_+, \ m \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{S}_x = \{\frac{f(x)}{x^m} : \ f(x) \in \mathcal{Z}_p[x], m \in \mathbb{Z}\}.$$

Zbiór $\mathbb{S}_p$ jest zamknięty na dodawanie i mnożenie w ciele $\mathcal{Q}$, natomiast $\mathbb{S}_x$ jest podpierścieniem ciała funkcji wymiernych $\mathcal{Z}_p(x)$.

Funkcje

$$\omega_p : \mathbb{S} \to \mathbb{S}_p, \quad \omega_x : \mathbb{S} \to \mathbb{S}_x,$$

dane wzorami:

$$\omega_p(\sum_{j=m}^{j=n} a_j x^j) = \sum_{j=m}^{j=n} a_j p^j, \qquad \omega_x(\sum_{j=m}^{j=n} a_j x^j) = \sum_{j=m}^{j=n} a_j x^j,$$

są bijekcjami. W zbiorze $\mathbb{S}$, na dwa sposoby, definiowane są działania:

$$a +_p b = \omega_p^{-1}(\omega_p(a) + \omega_p(b)), \quad a \cdot_p b = \omega_p^{-1}(\omega_p(a)\omega_p(b)),$$

$$a +_x b = \omega_x^{-1}(\omega_x(a) + \omega_x(b)), \quad a \cdot_x b = \omega_x^{-1}(\omega_x(a)\omega_x(b)).$$

W kolejnym kroku operacje te są rozszerzane ze zbioru $\mathbb{S}$ na cały zbiór $\mathbb{L}$ tak, że w rezultacie powstają dwa pierścienie: $(\mathbb{L},+_p,\cdot_p,0,1)$ i $(\mathbb{L},+_x,\cdot_x,0,1)$. Pokazuje się, że pierścienie te z topologią $\tau_L$ są ciałami ciągłymi; oznaczmy je jako $(\mathcal{L}_p,\tau_L)$, $(\mathcal{L}_x,\tau_L)$. Tak więc $(\mathcal{L}_p,\tau_L)$ to ciało topologiczne $\mathcal{Q}_p$, zaś $(\mathcal{L}_x,\tau_L)$ to ciało topologiczne $\mathcal{Z}_p((x))$.

Dokładniej: W poprzednim paragrafie ciało $\mathcal{Q}_p$ zostało zdefiniowane jako uzupełnienie ciała unormowanego liczb wymiernych z normą $\varphi_p$ do ciała unormowanego zupełnego. W paragrafie *Ciało szeregów formalnych Laurenta* ciało $\mathcal{Z}_p((x))$ zostało zdefiniowane wprost przez określenie działań na zbiorze $\mathbb{L}$. W konstrukcji przedstawionej przez Pontriagina ciało topologiczne $\mathcal{Q}_p$ jest definiowane jako domknięcie ciągłe ciała topologicznego $(\mathcal{Q},\tau_1)$. Ciało topologiczne $\mathcal{Z}_p((x))$ jest definiowane jako domknięcie ciągłe ciała topologicznego $(\mathcal{Z}_p(x),\tau_2)$. Ciała topologiczne $(\mathcal{Q}_p,\tau_L)$ i $(\mathcal{Z}_p((x)),\tau_L)$ są więc definiowane na podstawie twierdzenia o jednoznaczności domknięcia ciągłego.

W odróżnieniu od uzupełniania ciała unormowanego liczb wymiernych, gdzie na początku konstrukcji ustalona jest struktura algebraiczna, a następnie definiowane są różne normy, w tym przypadku na zbiorze $\mathbb{L}$ najpierw wprowadzona jest topologia $\tau_L$, a następnie konstruowane są dwie struktury algebraiczne, które są *zgodne* z topologią $\tau_L$ w tym sensie, że każda z powstałych struktur jest ciałem topologicznym.

**25.** W roku 1932 Lew Pontriagin udowodnił twierdzenie:

„Każde spójne, lokalnie dwuzwarte ciało topologiczne jest izomorficzne z ciałem topologicznym liczb rzeczywistych, lub z ciałem topologicznym liczb zespolonych, lub z ciałem topologicznym kwaternionów”.[79]

Dowód składa się z dwóch zasadniczych części:

(1) Każde ciało ciągłe zawiera jako swoje podciało jedno z ciał topologicznych $(\mathcal{R}, \tau_<)$, $(\mathcal{Q}_p, \tau_L)$ lub $(\mathcal{Z}_p((x)), \tau_L)$ i jest jego skończonym rozszerzeniem. Ciała $(\mathcal{R}, \tau_<)$, $(\mathcal{Q}_p, \tau_L)$ nie zawierają żadnych podciał ciągłych właściwych, a każde podciało ciągłe ciała $(\mathcal{Z}_p((x)), \tau_L)$ jest izomorficzne z nim samym.

(2) Twierdzenia Frobeniusa. Niech $\mathcal{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ będzie ciałem (przemiennym lub nieprzemiennym) takim, że ciało liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ zawarte jest w centrum ciała $\mathcal{F}$. Niech $(F, +, 0)$ będzie przestrzenią wektorową nad $(\mathbb{R}, +, 0)$, niech zbiór $\{1, e_1, \ldots, e_n\} \subset F$ stanowi bazę tej przestrzeni. Ciało $\mathcal{F}$ jest wówczas albo identyczne z $\mathcal{R}$, albo jest izomorficzne z ciałem liczb zespolonych $\mathcal{C}$, albo jest izomorficzne z ciałem kwaternionów $\mathcal{H}$.[80]

Dalej rozumowanie jest następujące: Jeżeli ciało jest spójne, to topologia w ciele nie jest dyskretna, tak więc ciało spójne i lokalnie zwarte jest ciągłe. Wiedząc, że każde ciało topologiczne jest albo spójne, albo niespójne dostajemy, że ciało spójne, lokalnie zwarte jest skończonym rozszerzeniem ciała topologicznego liczb rzeczywistych, a zatem, albo ciałem topologicznym liczb zespolonych, albo ciałem topologicznym kwaternionów.

25.1. Krótko o dowodzie twierdzenia Frobeniusa. (1) Gdy $\mathcal{F} = \mathcal{R}$ to twierdzenie jest oczywiste. Niech zatem $\mathcal{F} \neq \mathcal{R}$. Przyjmuje się

$$I = \{z \in F : \ z^2 \in \mathbb{R} \wedge z^2 \leqslant 0\}.$$

[79] [Pontriagin 1961], s. 157; po raz pierwszy twierdzenie to było ogłoszone w artykule: L. Pontriagin, *Über stetige algebraische Körper*, Annals of Mathematics 33, 1932.

[80] Zob. [Pontriagin 1954], s. 148–151. Po raz pierwszy twierdzenie to zostało udowodnione przez Ferdinanda Frobeniusa w roku 1877; podajemy za [Koecher, Remmert 1995], s. 229.

Pokazuje się, że zachodzi

$$\forall a \in F \exists! r \in \mathbb{R} \exists! z \in I[a = r + z].$$

Pokazuje się, że $(I, +, 0)$ jest podprzestrzenią liniową, tzn.

$$\forall x, y \in F \forall r, s \in \mathbb{R}[x, y \in I \to rx + sy \in I].$$

Gdy każde dwa elementu przestrzeni $(I, +, 0)$ są liniowo zależne, to elementy ciała $\mathcal{F}$ można przedstawić w postaci $r + si$, gdzie $r, s \in \mathbb{R}$, zaś $i^2 = -1$, a wtedy $\mathcal{F}$ jest izomorficzne z ciałem liczb zespolonych.

Gdy do przestrzeni $(I, +, 0)$ należą dwa elementy liniowo niezależne, wtedy $\mathcal{F}$ jest izomorficzne z ciałem kwaternionów $\mathcal{H}$, natomiast założenie, że $\mathcal{F}$ jest właściwym rozszerzeniem $\mathcal{H}$ prowadzi do sprzeczności.

**26.** We wstępie do rozdziału *Ciała topologiczne* Pontriagin pisze:

„Ciało ciągłe jest obiektem topologiczno-algebraicznym, który jest określony przy pomocy stosunkowo małej liczby bardzo naturalnych aksjomatów; a jednak obiekt ten okazuje się nadzwyczaj konkretny. Pokażemy, że istnieją tylko trzy różne spójne ciała ciągłe, a mianowicie ciało liczb rzeczywistych, ciało liczb zespolonych i ciało kwaternionów. [...] Wspomniane ciała ciągłe, mianowicie ciało liczb rzeczywistych, ciało liczb zespolonych, ciało kwaternionów, ciała liczb $p$-adycznych i ciało szeregów nad ciałem reszt modulo $p$, można uważać za klasyczne ciała ciągłe. Wszystkie one są stosunkowo dawno znane i odgrywają w matematyce istotną rolę. Sformułowane wyżej wyniki dotyczące jednoznaczności pokazują, że rola klasycznych ciał ciągłych w matematyce tłumaczy się nie historyczną przypadkowością rozwoju tych pojęć, a ich logiczną koniecznością. Tak więc wyniki tego rozdziału mają pewien sens filozoficzny: dają one logiczne wyjaśnienie historycznego rozwoju pojęć liczb rzeczywistych i zespolonych”.[81]

26.1. „Historyczna przypadkowość” *versus* „logiczna konieczność”. Na podstawie dowodu twierdzenia Pontriagina możemy powiedzieć, że wyróżnione są trzy ciała ciągłe: ciało topologiczne liczb rzeczywistych, ciało topologiczne $\mathcal{Q}_p$ i ciało topologiczne $\mathcal{Z}_p((x))$. Nie widać natomiast jaka to „logiczna konieczność” każe nam wyróżnić ciała spójne?

W tezie twierdzenia Pontriagina liczby rzeczywiste są określone jako ciało topologiczne, w dowodzie natomiast są również ciałem uporządkowanym – jest tak już w dowodzie twierdzenia Frobeniusa, w definicji zbioru $I$. Nie ma tu oczywiście sprzeczności, a najpewniej jest domniemane, że topologia

[81] [Pontriagin 1961], s. 142.

na zbiorze $\mathbb{R}$, to *naturalna* topologia porządkowa $\tau_<$. Dalej, o ciele topologicznym $(\mathcal{R}, \tau_<)$ wiadomo, że jest lokalnie zwarte i spójne, ale skąd to wiadomo?

Pontriagin pisze, że klasyczne ciała ciągłe „są stosunkowo dobrze znane". Skąd są znane liczby rzeczywiste? Przede wszystkim jako konstrukcja Dedekinda: liczby rzeczywiste dane jako konstrukcja Dedekinda mogą być ujęte jako ciało topologiczne, a wówczas można pokazać, że w topologii $\tau_<$ są one ciałem lokalnie zwartym, spójnym oraz $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Przypomnijmy zarazem, że naczelnym motywem rozprawy *Stetigkeit und irrationale Zahlen* było „czysto arytmetyczne i w pełni ścisłe ugruntowanie zasad analizy infinitezymalnej", Dedekind zaś związał to z „rzeczywistą definicją istoty ciągłości".[82] „Istota ciągłości" według Dedekinda, to – jak pamiętamy – szczególna charakterystyka uporządkowania liczb rzeczywistych, mianowicie ciągłość w sensie Dedekinda. Gdy liczby rzeczywiste są ujmowane jako przestrzeń topologiczna z topologią $\tau_<$, to spójność przestrzeni topologicznej $(\mathbb{R}, \tau_<)$ oznacza ni mniej ni więcej, jak ciągłość porządku liczb rzeczywistych.

Zagadnienie „czysto arytmetycznych i w pełni ściśle ugruntowanych zasad analizy infinitezymalnej" można jednak – jak wiemy – rozwiązać w strukturze niestandardowych liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}^*$.[83] Lecz ciało topologiczne $(\mathcal{R}^*, \tau_<)$ jest ciałem niespójnym i w ogóle nie jest – jeśli wolno tak powiedzieć – *zauważone* przez twierdzenie Pontriagina. Tak więc ciało topologiczne liczb rzeczywistych jest „historycznie przypadkowe" w tym sensie, że jest ono związane z wyróżnionym, ale tylko historycznie, rozwiązaniem problemu „arytmetycznych podstaw analizy infinitezymalnej".

Reasumując: spójność wyróżnia w klasie ciał ciągłych ciało liczb rzeczywistych, ale sama kategoria spójności jest wyróżniona jedynie historycznie.

**27.** Na podstawie twierdzenia Pontriagina liczby rzeczywiste można zdefiniować jako szczególe ciało topologiczne. W tym celu należy znaleźć podstawę do odróżnienia ciała topoligicznego $\mathcal{R}$ od ciał topolgicznych $\mathcal{C}$ i $\mathcal{H}$. Pierwszy sposób, w jaki można to uczynić omówiliśmy przy okazji twierdzenia Ostrowskiego, powtórzy: ciało liczb rzeczywistych jest ciałem przemiennym (w odróżnieniu od $\mathcal{H}$) i nie jest algebraicznie domknięte (w odróżnieniu od $\mathcal{C}$). Podamy teraz drugi sposób, który nie odwołuje się do zasadniczego twierdzenia algebry. Otóż ciało topologiczne liczb rzeczywistych można odróżnić od ciała topologiczne liczb zespolonych i kwaternionów za pomocą pojęcia wymiaru topologicznego.

[82] Zob. [Dedekind 1872], s. 132–133.

[83] Zob. rozdz. *Niestandardowe liczby rzeczywiste.*

Przypomnijmy pojęcie wymiaru. Niech $(X, \tau)$ będzie przestrzenią regularną. Skończony wymiar topologiczny (Mengera-Uryhsona) $ind\ X$ definiowany jest indukcyjnie:

(1) $ind\ X = -1 \leftrightarrow_{df} X = \emptyset$,
(2) $(\forall x \in X \forall U \in \tau \exists V \in \tau [x \in U \subset V \rightarrow ind\ FrU \leqslant n-1]) \rightarrow ind\ X \leqslant n$,
(3) $(ind\ X \leqslant n \wedge \neg(ind\ X \leqslant n-1)) \rightarrow ind\ X = n$.[84]

Topologie w ciałach $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ i $\mathcal{H}$ są rozumiane jako topologie wprowadzone przez normy w tych ciałach.[85] Pokazuje się, że te przestrzenie topologiczne mają wymiar odpowiednio 1, 2 i 4. W dowodzie tego twierdzenia wykorzystywane jest fakt, że są to przestrzenie ośrodkowe.[86]

Tak więc na podstawie twierdzenia Pontriagina oraz twierdzenia dotyczącego wymiaru topologicznego przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ liczby rzeczywiste można zdefiniować jako ciało topologiczne spójne, lokalnie zwarte o wymiarze topologicznym 1.

[84] Zob. [Engelking 1989], t. II, s. 440. Brzeg zbioru $FrU$ jest definiowany równością $FrU = \overline{U} \cap \overline{(F \backslash U)}$.

[85] Zob. wyżej pkt. 11.

[86] Zob. [Engelking 1989], t. II, rozdz. 7.

# AKSJOMATY

# David Hilbert, *Über den Zahlbegriff*, 1900

W pierwszych punktach tego rozdziału przedstawimy interpretację dwóch prac, które uznajemy za aksjomatyczne ujęcie liczb rzeczywistych: artykuł Davida Hilberta *Über den Zahlbegriff* oraz czwarty rozdział książki Lwa Pontragina *Grupy topologiczne*. Specyfika proponowanego podejścia polega na tym, że nie *szukamy* przedmiotu odniesienia dla aksjomatów, ale aksjomaty traktujemy jako sposób ujęcia przedmiotu wyznaczonego przez rozprawę *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

Następnie omówimy wybrane fragmenty prac klasyków współczesnej filozofii matematyki, Penelope Maddy i Stewarta Shapiro, traktujące o liczbach rzeczywistych. Autorzy ci – każdy oczywiście na swój sposób – *filozofię* liczb rzeczywistych opierają na aksjomatach i w tym sensie zajmują stanowisko radykalnie odmienne od tego, które prezentujemy w niniejszej pracy.

**1.** W roku 1899 ukazało się pierwsze wydanie *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta, a rok później króciutki artykuł *Über den Zahlbegriff*, który następnie był dołączany do kolejnych wydań *Grundlagen*. W *Über den Zahlbegriff* po raz pierwszy zostały podane aksjomaty ciała liczb rzeczywistych.

Artykuł otwierają uwagi na temat różnic w metodzie badań arytmetyki i geometrii:

„Przypomnijmy najpierw, w jaki sposób wprowadzane jest pojęcie liczby. Poczynając od pojęcia liczby 1, kolejne dodatnie liczby całkowite 2, 3, 4 ... są przedstawiane jako wynik procesu liczenia, i rozwijane są odpowiadające im prawa rachunkowe. Następnie, aby zapewnić wykonalność odejmowania, otrzymuje się liczby ujemne. Dalej definiowane są, powiedzmy jako pary liczb, ułamki tak, że każda funkcja liniowa posiada pierwiastek. Aż wreszcie definiowane są liczby rzeczywiste jako przekroje lub ciągi fundamentalne tak, że każda funkcja wymierna o współczynnikach całkowitych przyjmująca wartości różnych znaków [ganze rationale indefinite Funktion] (a w istocie, każda funkcja ciągła przyjmująca wartości różnych znaków) posiada miejsca zerowe. Taki sposób wprowadzania liczb nazywamy metodą genetyczną,

ponieważ najogólniejsze pojęcie liczby rzeczywistej jest tworzone poprzez kolejne rozszerzenia prostego pojęcia liczby".[1]

Badania geometryczne są tak charakteryzowane:

„Zupełnie inaczej postępujemy w geometrii. Zwykle zaczyna się tu od założenia, że istnieją wszystkie elementy, tj. na wstępie przyjmuje się istnienie trzech grup przedmiotów (punktów, linii i płaszczyzn), a następnie – w istocie na wzór Euklidesa – na podstawie aksjomatów, mianowicie incydencji [Verknüpfung], porządku, przystawania i ciągłości, ustanawiane są wzajemne relacje między tymi przedmiotami. Trzeba wówczas wykazać niesprzeczność i zupełność systemu, tj. należy udowodnić, że aksjomaty te nie prowadzą do sprzeczności oraz, że tworzą system, w którym można udowodnić wszystkie twierdzenia geometryczne. Ten sposób postępowania nazwiemy metodą aksjomatyczną".[2]

Celem artykułu jest zastosowanie metody aksjomatycznej w „teorii pojęcia liczby".

1.1. Aksjomaty podzielił Hilbert na cztery grupy: I. Aksjomaty Powiązania, II. Aksjomaty Działań, III. Aksjomaty Porządku, IV. Aksjomaty Ciągłości.

„I 1. Z liczb $a$ i $b$ powstaje w wyniku 'dodawania' określona liczba $c$; symbolicznie:

$$a + b = c \quad \text{lub} \quad c = a + b.$$

I 2. Gdy $a$ i $b$ są liczbami wtedy istnieje jedna i tylko jedna liczba $x$ oraz jedna i tylko jedna liczba $y$ takie, że

$$a + x = b \quad \text{i} \quad y + a = b.$$

I 3. Istnieje określona liczba – nazywana 0 – taka, że dla każdego $a$ zachodzi

$$a + 0 = a \quad \text{i} \quad 0 + a = a.$$

I 4. Z liczb $a$ i $b$ powstaje w wyniku innego procesu, mianowicie 'mnożenia', określona liczba $c$; symbolicznie:

$$ab = c \quad \text{lub} \quad c = ab.$$

[1] [Hilbert 1900], s. 241.
[2] [Hilbert 1900], s. 241–242.

I 5. Gdy $a$ i $b$ są liczbami i $a$ jest różne od 0, to istnieje jedna i tylko jedna liczba $x$ oraz jedna i tylko jedna liczba $y$ takie, że

$$ax = b \quad \text{i} \quad ya = b.$$

I 6. Istnieje określona liczba – nazywana 1 – taka, że dla każdego $a$ zachodzi

$$a.1 = a \quad \text{i} \quad 1.a = a\ ".$$[3]

Aksjomaty drugiej grupy to symbolicznie zapisane łączność i przemienność działań, a następnie rozdzielność (lewo- i prawostronna) mnożenia względem dodawania. Aksjomaty trzeciej grupy:

„III 1. Gdy $a$ i $b$ są różnymi liczbami, wówczas jedna z nich (powiedzmy $a$) jest większa ($>$) od drugiej, ta druga jest nazywana mniejszą; symbolicznie:

$$a > b \quad \text{i} \quad b < a.$$

Dla żadnego $a$ nie zachodzi $a > a$.

III 2. Gdy $a > b$ oraz $b > c$, to $a > c$.

III 3. Gdy $a > b$, to zawsze jest

$$a + c > b + c \quad \text{oraz} \quad c + a > c + b.$$

III 4. Gdy $a > b$ oraz $c > 0$, to zawsze jest

$$ac > bc \quad \text{oraz} \quad ca > cb\ ".$$[4]

Aksjomaty czwartej grupy:

„IV 1. (Aksjomat Archimedesa.) Gdy $a > 0$ oraz $b > 0$ są dowolnymi liczbami, to zawsze można dodawać do siebie $a$ tyle razy, że suma będzie miała własność

$$a + a + \cdots + a > b.$$

IV 2. (Aksjomat Zupełności.) Do tego systemu liczbowego nie można dołączyć innych liczb tak, aby w nowym systemie spełnione były aksjomaty grup I, II, III oraz aksjomat IV 1, krótko: liczby tworzą system, który nie może być rozszerzony przy zachowaniu pozostałych aksjomatów".[5]

Dalej Hilbert omawia zależności między aksjomatami. Poprzestaniemy na komentarzu do aksjomatów ciągłości:

[3] [Hilbert 1900], s. 242–243.
[4] [Hilbert 1900], s. 243.
[5] [Hilbert 1900], s. 244.

„Aksjomaty IV 1 i IV 2 są niezależne. Nic w nich nie jest powiedziane o pojęciu zbieżności czy istnieniu granic, jednakże wynika z nich (jak można pokazać) twierdzenie Bolzano o istnieniu punktu skupienia. Dlatego uznajemy zgodność naszego systemu ze zwykłym systemem liczb rzeczywistych".[6]

**2.** Aksjomatyka liczb rzeczywistych podana przez Hilberta, zwłaszcza aksjomaty ciągłości, przez wiele lat była *poprawiana*. Obecnie jest ona tak prezentowana: aksjomaty ciała uporządkowanego $\mathfrak{F} = (F, +, \cdot, 0, 1, <)$ oraz aksjomat ciągłości. Ten ostatni jest jeszcze różnie formułowany. Oto kilka przykładów:

(C1) Dla każdego przekroju $(A, B)$ zbioru $(F, <)$ albo w zbiorze $A$ istnieje element największy, albo w zbiorze $B$ istnieje element najmniejszy.
(C2) Dla każdego niepustego i ograniczonego z góry zbioru $A \subset F$ istnieje w $F$ kres górny.
(C3) Dla każdego nieskończonego i ograniczonego zbioru $A \subset F$ istnieje w $F$ punkt skupienia (w topologii porządkowej $\tau_<$).
(C4) $\mathfrak{F}$ jest ciałem archimedesowym i dla każdego ciągu $(a_n) \subset F$ spełniającego warunek Cauchy'ego istnieje $a \in F$ takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
(C5) $\mathfrak{F}$ jest ciałem archimedesowym i dla każdego ciągu przedziałów domkniętych $(A_n)$ zachodzi

$$(\forall n[A_{n+1} \subset A_n]) \to \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Pokazuje się, że na gruncie aksjomatów ciała uporządkowanego warunki (C1)–(C5) są równoważne.[7]

W *Stetigkeit* Dedekind wykazuje „równoważność" warunków (C1) i (C2), ale sens tej „równoważności" jest odmienny od dzisiejszego: dowód Dedekinda polega bowiem na tym, że o skonstruowanym ciele liczb rzeczywistych można udowodnić zarówno (C1), jak i (C2).[8]

2.1. Pokazuje się, że aksjomatyka ciała liczb rzeczywistych jest kategoryczna: każde dwa ciała uporządkowane spełniające aksjomat (C1) są izomorficzne.

Dowód tego twierdzenia zwykle jest tak prowadzony. Niech dane będą dwa ciała uporządkowane $\mathfrak{F}_1 = (F_1, +, \cdot, 0, 1, <)$, $\mathfrak{F}_2 = (F_2, +, \cdot, 0, 1, <)$. Gdy w $\mathfrak{F}_1$ spełniony jest aksjomat (C1), to (1) uporządkowane ciało ułamków $\mathfrak{F}^1_Q$, jest izomorficzne z ciałem liczb wymiernych $\mathfrak{Q}$, (2) zbiór ułamków $\mathbb{Q}_{F_1}$ ciała

[6] [Hilbert 1900], s. 245.
[7] Zob. [Bukovský 1979], rozdz. 15, [Cohen, Ehrlich 1963], rozdz. 5.
[8] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 17.1.

$\mathfrak{F}_1$ jest gęsty w zbiorze $(F_1, <)$; to samo w odniesieniu do ciała $\mathfrak{F}_2$. Naturalny izomorfizm $\varphi$ ciał uporządkowanych $\mathfrak{F}_Q^1$ i $\mathfrak{F}_Q^2$

$$\varphi : \mathbb{Q}_{F_1} \mapsto \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}_{F_2}$$

jest rozszerzany do funkcji $\Phi : F_1 \mapsto F_2$. Rozszerzenie $\Phi$ definiowane jest na dwa sposoby:

(1) Każdy element $a \in F_1$ jest wyznaczony przez przekrój $(A, B)$ zbioru $(\mathbb{Q}_{F_1}, <)$. Wówczas para $(\varphi(A), \varphi(B))$ jest przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}_{F_2}, <)$ i wyznacza pewien element $a' \in F_2$. Przyjmuje się, że $\Phi(a) = a'$.[9]

(2) Każdy element $a \in F_1$ jest wyznaczony przez pewien ciąg $(q_n) \subset \mathbb{Q}_{F_1}$ w taki sposób, że $a = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$. Ciąg $(\varphi(q_n)) \subset \mathbb{Q}_{F_2}$, spełnia warunek Cauchy'ego i jest zbieżny do pewnego elementu $a' \in F_2$. Przyjmuje się, że $\Phi(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(q_n)$.[10]

Pokazuje się, że funkcja $\Phi$ jest izomorfizmem ciał $\mathfrak{F}_1$ oraz $\mathfrak{F}_2$.

Na tej podstawie liczby rzeczywiste są definiowane jako ciało uporządkowane w sposób ciągły.

Twierdzenie o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych będziemy dalej nazywali krótko twierdzeniem o kategoryczności.

2.2. Gdy dana jest konstrukcja czy to Dedekinda, czy Cantora, to zarówno liczby wymierne jak i liczby rzeczywiste mogą być ujęte jako ciała uporządkowane. O liczbach rzeczywistych dowodzi się, że spełniają aksjomat (C1). Tak więc na podstawie konstrukcji przyjmuje się, że istnieje ciało uporządkowane w sposób ciągły. Z kolei z twierdzenia o kategoryczności wynika, że istnieje co najwyżej jedno, z dokładnością do izomorfizmu, ciało uporządkowane w sposób ciągły. W tym sensie twierdzenie o kategoryczności uzasadnia definicję liczb rzeczywistych.

2.3. Historycznie twierdzenie o kategoryczności wiąże się z tym, że przez pewien czas w matematyce funkcjonowały dwie konstrukcje liczb rzeczywistych – Dedekinda i Cantora – i bynajmniej nie od razu było jasne, jaka relacja zachodzi między nimi. Jeszcze Hobson „zależność między teorią Cantora i Dedekinda" sprowadzał jedynie do bijekcji między zbiorami: przekrojów Dedekinda zbioru $(\mathbb{Q}, <)$ z jednej strony i ciągów Cauchy'ego liczb wymiernych z drugiej.[11]

[9] Zob. [Birkhoff, Mac Lane 1957], s. 108–109.

[10] Zob. [Cohen, Ehrlich 1963], rozdz. 5.

[11] Zob. [Hobson 1921], s. 39–41. David McCarty zastanawia się dlaczego w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* Dedekind nie ustalił izomorfizmu między swoją konstrukcją a konstrukcją Cantora; zob. [McCarty 1995], s. 60–62. McCarty zdradza tu nieznajomość faktów historycznych: aby to było możliwe, to konstrukcję należałoby ująć np. jako szczegól-

Pokażmy teraz – tak dla porządku – że różnica między ciałami liczb rzeczywistych nie polega jedynie na różnym przedstawieniu elementów dziedziny.

Niech $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem uporządkowanym w sposób ciągły. Można pokazać, że ciało $(\mathbb{R}, \oplus_3, \cdot, 0, 1, <)$, gdzie

$$a \oplus_3 b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3,$$

a porządek w obydwu ciałach jest ten sam, jest ciałem uporządkowanym w sposób ciągły. To samo w przypadku $(\mathbb{R}, \oplus_k, \cdot, 0, 1, <)$, gdzie $k$ jest liczbą naturalną nieparzystą i

$$a \oplus_k b = (\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b})^k.$$

Można pokazać, że ciało $(\mathbb{R}_+, \oplus, \otimes, 1, e, <_1)$, gdzie

$$a \oplus b = a \cdot b, \qquad a \otimes b = e^{(\log a)\cdot(\log b)},$$

a porządek $<_1$ to porządek $<$ zawężony do zbioru $\mathbb{R}_+$, też jest ciałem uporządkowanym w sposób ciągły.

2.4. Można powiedzieć, że aksjomat ciągłości *wyróżnia* w klasie ciał uporządkowanych ciało liczb rzeczywistych. W związku z tym w twierdzeniu o kategoryczności zarówno gęstość zbioru ułamków $\mathbb{Q}_F$ w zbiorze $(F, <)$, jak i zbieżność ciągu $(q_n)$ winny być zdefiniowane, *via* zgodność porządku z działaniami, w ciele $\mathfrak{F}$.[12]

W ciele $\mathfrak{F}$ granica ciągu $(q_n)$ jest definiowana jako szczególna relacja $G$ między ciągiem $(q_n)$ i elementem $a \in F$:

$$G(a, (q_n)) \leftrightarrow_{df} \forall \varepsilon \in F_+ \exists k \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}[n > k \rightarrow |q_n - a| < \varepsilon].$$[13]

Przy tym przyjmuje się też szczególne, *węższe* rozumienie przedziału w ciele uporządkowanym.[14]

---

ne ciało uporządkowane, a dla Dedekinda liczby rzeczywiste nie są szczególnym ciałem uporządkowanym, ale strukturą, w której można zrekonstruować analizę matematyczną. Zauważamy, że Hilbert, który przecież zdefiniował liczby rzeczywiste jako szczególne ciało uporządkowane, też nie pokazał, że istnieje dokładnie jedno takie ciało. Dalej McCarty pisze, że Dedekind powinien był ustalić izomorfizm „między arytmetyczną i geometryczną wersją kontinuum", przy czym przez kontinuum arytmetyczne rozumie ciało uporządkowane liczb rzeczywistych, a przez kontinuum geometryczne linię prostą; zob. [McCarty 1995], s. 62. Tu McCarty zdradza nieznajomość faktów matematycznych: w tym przypadku można mówić co najwyżej o izometrii; zob. rozdz. *O ciągłości linii prostej.*

[12] Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 1.3.

[13] Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 1.2.

[14] Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 16.2.

**3.** Podając aksjomaty liczb rzeczywistych Hilbert odnosi się do pewnego obiektu, mianowicie do „zwykłych" – jak pisze – liczb rzeczywistych;

„uznajemy zgodność naszego systemu ze zwykłym systemem liczb rzeczywistych".

Cóż to jednak jest ów „zwykły system liczb rzeczywistych"? Wskazówkę stanowi uwaga, że ciało liczb wymiernych jest rozszerzane albo za pomocą przekrojów Dedekinda, albo ciągów Cauchy'ego:

„aż wreszcie definiowane są liczby rzeczywiste jako przekroje lub ciągi fundamentalne".

Na tej podstawie przyjmujemy, że „zwykłe liczby rzeczywiste" to liczby rzeczywiste wyznaczone przez rozprawę Dedekinda *Stetigkeit und irrationale Zahlen* lub rozprawę Cantora *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*. Pozostańmy przy pierwszej z nich.

3.1. Przyjmując, że *Stetigkeit* wyznacza pewien przedmiot intencjonalny, aksjomatykę Hilberta traktujemy jako sposób ujęcia tego przedmiotu – w ujęciu tym zawartość przedmiotu intencjonalnego stanowi ciało uporządkowane w sposób ciągły (*maksymalne* rozszerzenie ciała uporządkowanego $\mathfrak{Q}$ zachowujące aksjomat Archimedesa).

Ujęcie aksjomatyczne różni się od samej konstrukcji przede wszystkim tym, że jest ono rekonstrukcją – rekonstruowana jest w nim warstwa dedukcyjna *Stetigkeit*. Zakładając, że liczby rzeczywiste są ciałem uporządkowanym można uzupełnić *luki* w dowodach podanych przez Dedekinda: wskazać wprost aksjomat Archimedesa oraz warunek zgodności dodawania i mnożenia z porządkiem.[15]

Wyróżniając w tekście matematycznym warstwę dedukcyjną, w nowym świetle możemy zobaczyć samo zestawienie metody „genetycznej" z „aksjomatyczną": metoda aksjomatyczna wykształciła się właśnie jako sposób rekonstrukcji warstwy dedukcyjnej ksiąg *geometrycznych Elementów* Euklidesa.

3.2. Z pojęciem „zwykłych liczb rzeczywistych" wiąże się własność *explicite* zaznaczona w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, ta mianowicie, że ciało liczb rzeczywistych jest systemem, w którym można udowodnić twierdzenie Bolzano-Weierstrassa:

[15] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 7.

„Nic w nich nie jest powiedziane o pojęciu zbieżności czy istnieniu granic, jednakże wynika z nich (jak można pokazać) twierdzenie Bolzano o istnieniu punktu skupienia".[16]

W ten sposób twierdzenie Bolzano-Weierstrassa staje się wspólnym mianownikiem dla tych trzech prac: Hilberta *Über den Zahlbegrieff*, Cantora *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*,[17] Dedekinda *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.[18]

Następnie, w pracach tych występuje też wspólne rozumienie granicy, mianowicie:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \leftrightarrow_{df} \forall\varepsilon \in F_+ \exists k \forall n[n > k \to |a_n - a| < \varepsilon].$$

Zbieżność ciągu $(a_n)$ do punktu $a$ jest tu rozumiana jako relacja zachodząca w ciele uporządkowanym $\mathfrak{F} = (F, +, \cdot, 0, 1, <)$.

Dla kontrastu: w twierdzeniu Ostrowskiego granica ciągu jest definiowana jako szczególna relacja między punktem $a \in F$ oraz ciągiem $(a_n) \subset F$ w przestrzeni metrycznej $(F, \varrho_\varphi)$, a z twierdzeniem Pontriaginia związane jest aksjomatyczne rozumienie samego pojęcia granicy ciągu.

3.3. W teorii ciał unormowanych zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ to domknięcie zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, czyli $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, w specjalnie skonstruowanej przestrzeni metrycznej – w uzupełnieniu przestrzeni metrycznej do przestrzeni metrycznej zupełnej. Z kolei działania i norma w ciele liczb rzeczywistych są rozumiane jako *przedłużenie* działań i normy w ciele liczb wymiernych.

W teorii ciał topologicznych liczby rzeczywiste są rozumiane jako specjalne rozszerzenie (domknięcie ciągłe) ciała topologicznego liczb wymiernych.

W teorii ciał uporządkowanych zrazu nie widać, że ciało liczb rzeczywistych jest szczególnym rozszerzeniem ciała liczb wymiernych. To, że liczby rzeczywiste są rozumiane jako rozszerzenie ciała liczb wymiernych *odsłania* się w dowodzie twierdzenia o kategoryczności – wprost powtarzane są w nim fragmenty konstrukcji liczb rzeczywistych Cantora lub Dedekinda.

Uogólniając można powiedzieć, że w tych trzech teoriach – tj. w teorii ciał uporządkowanych, unormowanych i topologicznych – liczby rzeczywiste są rozumiane jako rozszerzenie ciała liczb wymiernych, symbolicznie można to przedstawić tak, że liczby rzeczywiste to *ex definitione* $\overline{\mathbb{Q}}$, zaś ciągłości liczb rzeczywistych odpowiada fakt $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{(\overline{\mathbb{Q}})}$. W teorii ciał uporządkowanych

[16] [Hilbert 1900], s. 245.
[17] Zob. rozdz. *Konstrukcja Cantora*, pkt. 7.
[18] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 17.5.

operacja domknięcia jest definiowana w topologii porządkowej $\tau_<$, w teorii ciał unormowanych – w przestrzeni metrycznej z metryką $\varrho_{\varphi_\infty}$, w teorii ciał topologicznych operacja domknięcia jest charakteryzowana aksjomatycznie.

3.4. Hilbert przeciwstawia genetyczne i aksjomatyczne rozumienie liczby. Rozumienie genetyczne ma polegać na rozszerzeniu kolejnych struktur liczbowych, rozumienie aksjomatyczne niejako *od razu* ujmuje liczby rzeczywiste jako szczególne ciało uporządkowane.

Istotnie, w samych aksjomatach zrazu nie widać, że liczby rzeczywiste są rozszerzeniem liczb wymiernych. Natomiast w dowodzie twierdzenia o kategoryczności, które uzasadnia definicję liczb rzeczywistych widzimy, że pojęcie ciała uporządkowanego w sposób ciągły jest związane z konstrukcjami, w których rozszerzane jest ciało liczb wymiernych. Jednocześnie tym, co decyduje o pojmowaniu liczb rzeczywistych, jakie znajdujemy w *Über den Zahlbegrieff* jest szczególne rozumienie granicy, związane z pojęciem ciała uporządkowanego. W tym sensie koncepcja Hilberta jest uzasadniona jedynie historycznie.

W książce Pontriagina *Grupy topologiczne* znajdujemy aksjomatyczne ujęcie samego pojęcia granicy. Można je przeciwstawić specyficznemu, bo związanemu z pojęciem ciała uporządkowanego, rozumieniu granicy, jakie stosował Hilbert.

# Lew Pontragin, *Grupy topologiczne*, 1961

**4.** Pontriagin pisze:

„Jeżeli dany jest jakikolwiek zbiór $M$ liczb rzeczywistych, to o każdej liczbie rzeczywistej można powiedzieć, że jest ona liczbą graniczną zbioru $M$ albo nią nie jest. W terminach punktów granicznych można sformułować warunek zbieżności ciągu liczb rzeczywistych i wszystkie pojęcia związane z przejściem do granicy. To właśnie pojęcie punktu granicznego tkwi u podstaw aksjomatyki przestrzeni topologicznej. Jednak bardziej racjonalną okazuje się aksjomatyka nie pojęcia punktu granicznego, ale całkowicie równoważnego z nim pojęcia domknięcia. Jeżeli dołączymy do zbioru $M$ wszystkie jego punkty graniczne, to otrzymamy tak zwane *domknięcie* $\overline{M}$ zbioru $M$; składa się ono ze wszystkich punktów zbioru $M$ i ze wszystkich jego punktów granicznych. Tak więc, wiedząc co to jest punkt graniczny, wiemy jednocześnie co to jest domknięcie. Odwrotnie można sformułować pojęcie punktu granicznego w terminologii domknięć. Jeżeli punkt $a$ nie należy do $M$, to $a$ jest wtedy i tylko wtedy punktem granicznym $M$, jeżeli $a \in \overline{M}$. W przypadku jednak gdy $a \in M$, kryterium to jest niewystarczające, gdyż punkt $a$ może być punktem izolowanym. Jeżeli jednak $a$ zawiera się w $M$ i jest jednocześnie punktem granicznym $M$, to $a$ będzie również punktem granicznym dla zbioru $M \backslash a$, tzn. $a \in \overline{M \backslash a}$. Ten warunek jest już dostateczny; więcej, można go zastosować również wtedy, gdy $a$ nie należy do $M$, gdyż w tym przypadku $M = M \backslash a$. Tak więc ostatecznie $a$ jest punktem granicznym wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in \overline{M \backslash a}$. Aksjomatyzacja pojęcia domknięcia prowadzi do pojęcia przestrzeni topologicznej”.[19]

Pontriagin podaje następnie aksjomaty domknięcia:

(1) $\overline{\{a\}} = \{a\}$,
(2) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$,

[19] [Pontriagin 1961], s. 55.

(3) $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$, gdzie $a \in X$, $M, N \subset X$. [20]

„Punkt $a$ przestrzeni $X$ nazywamy *punktem granicznym* zbioru $M$, jeżeli $a \in \overline{M \backslash a}$".[21]

W *Stetigkeit und irrationale Zahlen* są – jak wiemy – dwa rozumienia ciągłości: ciągłość porządku i ciągłość funkcji.[22] Aksjomaty domknięcia pozwalają scharakteryzować je topologicznie: ciągłości w sensie Dedekinda odpowiada spójność przestrzeni,[23] zaś ciągłości funkcji – warunek, że przeciwobraz zbioru otwartego jest zbiorem otwartym.

Podobnie jak aksjomatykę zawartą w *Über den Zahlbegriff*, także i ten opis liczb rzeczywistych, jaki znajdujemy w *Grupach topologicznych* można traktować jako ujęcie konstrukcji przedstawionej w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Także i w tym przypadku można mówić o rekonstrukcji warstwy dedukcyjnej, z tą różnicą, że teraz aksjomaty odnoszą się do samego pojęcia granicy. W *Über den Zahlbegriff* granica jest pojęciem, które pozwalało powiązać aksjomaty liczb rzeczywistych ze „zwykłymi liczbami rzeczywistymi". W książce *Grupy topologiczne* aksjomaty domknięcia pozwalają powiązać dwa rozumienia ciągłości występujące w *Stetigkeit*.

**5.** Na podstawie pojęcia ciała uporządkowanego można ustalić zależności między różnymi definicjami czy też faktami uważanymi za „istotę" ciągłości. Takie podejście wyróżnia zarazem jedno z wielu rozumień ciągłości, jakie funkcjonują w matematyce, mianowicie charakterystykę porządku. Ale już w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* są dwa różne rozumienia ciągłości: ciągłość porządku i ciągłość funkcji. Zauważmy, że chociaż zbiór $(\mathbb{Q}, <)$ nie jest uporządkowany w sposób ciągły, to działania algebraiczne w ciele $\mathcal{Q}$ są ciągłe w ciele unormowanym $\mathcal{Q}$ oraz w ciele topologicznym $(\mathcal{Q}, \tau_<)$.

Zauważmy też, że znane są równoważne wersje aksjomatu (C1), które nie są wyrażone na gruncie aksjomatycznej teorii ciał uporządkowanych: ciało uporządkowane $\mathfrak{F}$ jest ciągłe w sensie Dedekinda wtedy i tylko wtedy, gdy w rozszerzeniu $\mathfrak{F}^*$ zachodzi twierdzenie o części standardowej.[24]

5.1. Na podstawie twierdzenia o kategoryczności liczby rzeczywiste są definiowane jako ciało uporządkowane w sposób ciągły. Na podstawie twier-

[20] Pierwsze aksjomatyczne ujęcie przestrzeni topologicznej pochodzi od Kazimierza Kuratowskiego. W artykule *Sur l'operation $\overline{A}$ d'analysis situs*, Fundamenta Mathematicae 3, 1922, Kuratowski podał następujące aksjomaty domknięcia: (1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, (2) $A \subset \overline{A}$, (3) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ , (4) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

[21] [Pontriagin 1961], s. 56.

[22] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 9, 16.

[23] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 4.1.

[24] Zob. rozdz. *Niestandardowe liczby rzeczywiste*, pkt. 3.

dzenia Ostrowskiego liczby rzeczywiste mogą być zdefiniowane jako ciało przemienne, unormowane, zupełne, algebraicznie domknięte. Na podstawie twierdzenia Pontriagina liczby rzeczywiste mogą być zdefiniowane jako ciało topologiczne ciągłe, lokalnie zwarte, spójne o wymiarze topologicznym 1.

Nie ma – o ile nam wiadomo – dowodu równoważności tych definicji, więcej, o ile nam wiadomo, nawet nie postawiono pytania, czy definicje te są równoważne. Rzecz ma wymiar czysto matematyczny, ale i filozoficzny.

Aspekt matematyczny to dowód tych równoważności. Tutaj istotne jest, na jakim *gruncie*, w jakiej teorii miałaby być one wykazane. Przypomnijmy, że w *Stetigkeit* Dedekind wykazuje równoważność ciągłości w sensie Dedekinda (DC) i zupełności w sensie Cauchy'ego (CC), ale dowód nie jest prowadzony w ramach teorii ciał uporządkowanych. W istocie dowód polega na tym, że skonstruowane liczby rzeczywiste mają zarówno własność (DC) jak i własność (CC). Na *gruncie* teorii ciał uporządkowanych natomiast własności te nie są równoważne.[25] Podobnie o przedmiocie danym w konstrukcji Dedekinda można pokazać, że (1) jest ciałem uporządkowanym w sposób ciągły, że (2) jest ciałem przemiennym, unormowanym, zupełnym, które nie jest algebraicznie domknięte, a wreszcie, że (3) jest ciałem ciągłym, spójnym, lokalnie zwartym, o wymiarze topologicznym 1. Nie jest natomiast oczywiste, na jakim *gruncie*, w jakiej teorii miałaby być wykazywana równoważność tych trzech definicji liczb rzeczywistych.

Aspekt filozoficzny sprowadza się do pytania, czym jest to coś, co raz jest szczególnym ciałem uporządkowanym, raz szczególnym ciałem unormowanym, a raz szczególnym ciałem topologicznym? Odpowiedź, którą szerzej uzasadnimy w następnym rozdziale jest następująca: jest to zawartość przedmiotu intencjonalnego, natomiast ciało uporządkowane, ciało unormowane, ciało topologiczne to sposoby ujmowania tej zawartości. Każda ze wskazanych definicji jest sposobem ujęcia przedmiotu wyznaczonego przez rozprawę Dedekinda *Steigkeit und irrationale Zahlen.*

[25] Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 8, rozdz. *Niestandardowe liczby rzeczywiste*, pkt. 8.

# Klasycy współczesnej filozofii matematyki o liczbach rzeczywistych

**6.** Penelope Maddy, *Realism in Mathematics*.[26] Swoją *filozofię* liczb rzeczywistych Penelope Maddy przedstawia w trzecim rozdziale książki *Realism in Mathematics*, w kontekście tak zwanego paradoksu wielorakiej redukcji. Zaczniemy zatem od tego paradoksu.

6.1. W roku 1965 Paul Benacerraf wystąpił z artykułem *What numbers could not be*.[27] Rozpoczyna się on historyjką o dwóch chłopcach, nazwanych Ernie i Johnny, uczących się podstaw arytmetyki liczb naturalnych. Tak więc chłopcy dowiadują się, że poszczególne liczby naturalne są zbiorami, że zbiór wszystkich liczb naturalnych jest dobrze uporządkowany przez relację $<$, a wreszcie, jak można zdefiniować działania arytmetyczne.[28] „Ostatnim elementem dopełniającym edukację Erniego jest wyjaśnienie *zastosowania* tych pojęć, mianowicie liczenia i mierzenia".[29] Wyjaśnienie to polega – zdaniem Benaceraffa – na wprowadzeniu pojęć równoliczności zbiorów i liczby kardynalnej.[30]

Ernie i Johnny – jak powiedziano – dowiadują się, że poszczególne liczby naturalne są zbiorami, ale mają oni różnych nauczycieli i tak dla Erniego kolejne liczby, poczynając od jeden, to $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, ..., dla Johniego zaś to $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, ... .[31] Ta dwojaka reprezentacja sprawia, że są kwestie, w których chłopcy nie mogą się zgodzić, np. czy

[26] Zob. [Maddy 1992].

[27] Zob. [Benacerraf 1965].

[28] Relacja Benacerrafa na temat teoriomngościowej rekonstrukcji arytmetyki liczb naturalnych odbiega od tego, co znajdujemy w matematyce. Na przykład według Benacerrafa operacje arytmetyczne są definiowane *explicite* (w artykule nie podano tych definicji). W monografii Kuratowskiego i Mostowskiego operacje arytmetyczne są definiowane indukcyjnie; zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], rozdz. 3.

[29] [Benacerraf 1965], s. 274.

[30] Zob. [Benacerraf 1965], s. 277.

[31] Pierwsze przedstawienie liczb naturalnych pochodzi od Johna von Neumanna, drugie – od Ernesta Zermelo.

$1 \in 3$. To, że liczby naturalne są przedstawiane jako różne zbiory ma – jak pisze Benacerraf – fatalne skutki dla poglądu, że każda poszczególna liczba jest jakimś konkretnym zbiorem. Weźmy dla przykładu liczbę 3: albo jest ona jednocześnie jednym i drugim zbiorem, albo jest tylko jednym z nich. Czy może być tak, że 3 jest i singletonem $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, i trzyelementowym zbiorem $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$? Takie rozwiązanie jest dla Benacerrafa na tyle absurdalne, że w ogóle nie poświęca mu uwagi. Druga możliwość jest szerzej rozważana, a podsumowanie jest następujące: Jeżeli liczba 3 jest zbiorem, to którym? Nie istnieją żadne racje na rzecz jednej lub drugiej identyfikacji, dlatego liczba nie jest w ogóle żadnym zbiorem.

Dalej Benacerraf przekonuje, że poszczególne liczby naturalne nie mogą być żadnymi przedmiotami, bo podobnie jak w przypadku reprezentacji teoriomnogościowej, nie ma podstaw do tego, aby identyfikować je z takimi, a nie innymi przedmiotami.

Czym zatem są liczby naturalne?

„Same przedmioty nie spełniają roli liczb i jeżeli w ogóle coś spełnia tę rolę, to jest to dopiero cały system".[32]

„Dlatego arytmetyka jest nauką badającą abstrakcyjną strukturę wspólną wszystkim ciągom badanym jedynie z uwagi na bycie ciągiem. Nie jest nauką traktującą o poszczególnych przedmiotach – liczbach. [...] Teoria liczb to nauka o własnościach *wszystkich* struktur, które mają typ porządkowy taki jak liczby [naturalne – P.B.]".[33]

Innymi słowy, teoria liczb – według Benacerrafa – to nauka o liczbie porządkowej $\omega$.

6.2. Nie będziemy dalej zajmować się rozprawą Benacerrafa, bo jej naczelnym problemem jest nie sama matematyka, ale filozofia matematyki Gottloba Fregego. Praca Benecerrafa jest ciekawa przede wszystkim jako dokument *wyzwalanie się* z przesądu, że odniesieniem dla liczebników głównych są indywidualne (idealne i samodzielne) przedmioty. To natomiast, co dla Benacerrafa jest filozoficznym odkryciem – tj. miast szukać przedmiotów-liczb, należy w pierwszym rzędzie ustalić czym są wszystkie liczby naturalne razem wzięte – staje się oczywiste, gdy tylko bada się samą matematykę. Wystarczy sięgnąć do *praźródła* nauki o liczbach, do Ksiąg VII–IX *Elementów* Euklidesa, by zauważyć, że naczelną zasadą arytmetyki

[32] [Benacerraf 1965], s. 290; ani „przedmiot", ani „system" nie są tu rozumiane jako kategorie ontologiczne, tym bardziej jako kategorie ontologii Ingardena – to słowa, które czytelnik ma sobie z czymś skojarzyć chyba wedle własnego uznania.

[33] [Benacerraf 1965], s. 291.

jest indukcja, a zatem podstawowym przedmiotem jest struktura (w sensie matematycznym) liczb naturalnych, a nie poszczególne liczby naturalne.[34]

Poprzestając na tekstach matematycznych widzimy też, że jakkolwiek znane są różne teoriomnogościowe rekonstrukcje arytmetyki liczb naturalnych, to z filozoficznego punktu widzenia istotne jest, że są to właśnie rekonstrukcje. Należy więc zapytać: czym jest to coś, co w tych teoriach jest odtwarzane, lub parafrazując Hilberta, czym są *zwykłe* liczby naturalne? Tradycyjnie wskazuje się, że rekonstrukcje te są modelami aksjomatyki pochodzącej od Peano, ale w ten sposób pytanie o *zwykłe* liczby naturalne jedynie *przenosi się* na aksjomaty Peano i odsyła do konkretnej pracy, mianowicie: Giuseppe Peano, *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* (1889).[35]

Zwracając uwagę na to, że poszczególne liczby naturalne są niesamodzielne bytowo względem struktury liczb naturalnych Benacerraf zainicjował w amerykańskiej filozofii matematyki nowy nurt nazwany z czasem strukturalizmem.[36] W odróżnieniu od filozofii Bourbakiego, gdzie termin struktura odnosi się do systemów matematycznych – algebraicznych, porządkowych, topologicznych, algebraiczno-porządkowych, algebraiczno-topologicznych – w amerykańskim strukturalizmie jest on w pierwszym rzędzie kategorią ontologiczną.

**7.** Penelope Maddy rozpatruje paradoks wielorakiej redukcji w odniesieniu i do liczb naturalnych, i do liczb rzeczywistych. W związku z liczbami naturalnymi przyjmuje tylko część argumentacji Benacerrafa. Zgadza się, że liczby naturalne nie są zbiorami, ale nie zgadza się z tym, że nie są one w ogóle żadnymi przedmiotami. Poszczególne liczby naturalne – twierdzi Maddy – są własnościami zbiorów, własnościami liczbowymi. Co to znaczy? Jeżeli liczba 3 określa moc np. liczby porządkowej von Neumanna $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, to posiadać własność 3 znaczy być równolicznym z tym właśnie zbiorem. Liczby von Neumanna pełnią tu rolę analogiczną do wzorca metra długości,

[34] Zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekind*, pkt. 1–6.

[35] Dla matematyków samo odniesie do aksjomatów Peano nie zawsze jest też wystarczającym uzasadnieniem rekonstrukcji teoriomnogościowej. Czytamy: „W arytmetyce określa się zbiór liczb większych od danej liczby $n$ jako część wspólną wszystkich zbiorów, które zawierają następnik $n$. Twierdzenie (5) pokazuje zatem, że relacją między elementami $\mathbb{N}$, która odpowiada relacji mniejszości wśród liczb, jest relacja należenia $\in$" [Kuratowski, Mostowski 1978], s. 102. Co znaczy, że dopiero na podstawie konkretnych twierdzeń arytmetyki nierówność $<$ można interpretować jako należenie $\in$.

[36] „Niesamodzielność bytowa" oraz wcześniej użyte pojęcie „samodzielności" to pojęcia z ontologii Ingardena. Sami strukturaliści nie wypracowali kategorii opisujących związki zachodzące między *częścią* a *całością* przedmiotu.

zaś wybór między jednym a drugim teoriomnogościowym przedstawieniem liczb naturalnych jest jedynie wyborem wzorca.[37]

Tyle o liczbach naturalnych, a jak jest z liczbami rzeczywistymi?

7.1. Jako różne teoriomnogościowe przedstawienia liczb rzeczywistych Maddy rozpatruje konstrukcje Dedekinda i Cantora. W pierwszej z nich poszczególne liczby są parami podzbiorów $\mathbb{Q}$, w drugiej – zbiorami ciągów liczb wymiernych. Parafrazując rozumowanie Benacerrafa można zatem spytać: jeżeli liczba rzeczywista jest zbiorem, to którym zbiorem?

Maddy przyznaje, że – w perspektywie ontologicznej – liczby rzeczywiste razem wzięte nie są zbiorem, mimo to są pewnym przedmiotem, mianowicie własnością ciągłości: jest jedna własność występująca w różnych zjawiskach, którą obydwie konstrukcje liczb rzeczywistych wyjaśniają, własność, która jest przez nie „mierzona" – to ciągłość.

Teraz to samo słowami Penelope Maddy:

„Sądzę, że pytanie 'czym są liczby rzeczywiste?' nie jest, jak by się zrazu mogło wydawać, wprost podobne do pytania 'czym są liczby naturalne?' Aby to zobaczyć porównajmy przedsięwzięcie Dedekinda i Fregego. Frege stanął wobec ustalonej praktyki językowej, która istotnie skłaniała do poglądu, że słowa określające liczby są nazwami, a liczby są przedmiotami, jego zadanie zaś polegało na wyjaśnieniu natury tych przedmiotów. [1] W przypadku Dedekinda natomiast nie było żadnego ustalonego sposobu posługiwania się liczbami rzeczywistymi. [2] Co natomiast było, to intuicja linii geometrycznej, zadaniem Dedekinda zaś było stworzenie takiego systemu liczbowego, który naśladowałby własności linii, a zwłaszcza ciągłość. [3] Tak więc pytanie, przed którym stanął Dedekind to nie pytanie 'czym są liczby rzeczywiste?', w analogii do pytania Fregego 'czym są liczby naturalne?', lecz raczej 'czym jest ciągłość?' Odpowiedź Dedekinda była natomiast taka: [4] ciągłość to to, co mają przekroje Dedekinda. I [...] to samo odnosi się do ciągów fundamentalnych Cantora oraz innych teoriomnogościowych przedstawień liczb rzeczywistych. [5] Jest zatem ostatecznie pewna podstawowa własność, do wykrycia której służą wszystkie teoriomnogościowe przedstawienia liczb rzeczywistych, pewna własność występująca we wszystkim poszczególnych zasadniczo odmiennych zjawiskach, którą liczby rzeczywiste mają mierzyć, a mianowicie ciągłość. [...] W odróżnieniu od liczb naturalnych, [6] to nie liczby rzeczywiste wymagają wyjaśnienia. To ciągłość wymaga wyjaśnienia, a różne teorimnogościowe ujęcia liczb rzeczywistych właśnie to czynią.

[37] Dokładniej: posiadać własność 3 znaczy być równolicznym ze zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 3. Akurat w przypadku liczb von Neumanna jest to ten sam zbiór, co zbiór odpowiadający liczbie 3. Zob. [Maddy 1992], s. 92.

W naszej intuicyjnej ontologii nie jest tak, że mamy liczby rzeczywiste i ich różne teoriomnogościowe przedstawienia, jak to jest z liczbami naturalnymi i ich teoriomnogościowymi przedstawieniami; mamy raczej zjawisko ciągłości i teoriomnogościowe przedstawienia liczb rzeczywistych, które wyjaśniają tę własność będąc jej przykładem. Nie ma natomiast żadnych przedteoretycznych liczb rzeczywistych, które miałyby być z czymś identyfikowane".[38]

**8.** Przede wszystkim zauważmy, że w związku z teoriomnogościową rekonstrukcją liczb rzeczywistych, inaczej niż przy liczbach naturalnych, Maddy nie mówi o poszczególnych liczbach, lecz o zbiorze liczb rzeczywistych i w tym sensie nauka Benacerrafa nie poszła na marne. Ale mimo to jej odpowiedź jest połowiczna. Maddy nie precyzuje, czy ma na uwadze zbiór uporządkowany $(\mathbb{R}, <)$, czy ciało uporządkowane $\mathfrak{R}$. W rezultacie gdy pisze, że „ciągłość to to, co mają przekroje Dedekinda", to możemy wnosić, że ciągłość jest własnością struktury porządkowej $(\mathbb{R}, <)$, gdy natomiast pisze, że „liczby rzeczywiste mają mierzyć [...] ciągłość", to nie wiadomo czy to zbiór uporządkowany $(\mathbb{R}, <)$, czy ciało uporządkowane $\mathfrak{R}$ „ma mierzyć ciągłość".

Przejdźmy do szczegółów.

8.1. (Ad [1].) Maddy pisze: „W przypadku Dedekinda [...] nie było żadnego ustalonego sposobu posługiwania się liczbami rzeczywistymi".

Uwaga ta ma charakter historyczny i jako taka jest błędna – przede wszystkim dlatego, że w miejsce „ustalonego sposobu posługiwania się liczbami rzeczywistymi" należy mówić o *ustalonym sposobie* uprawiania analizy matematycznej. Przypomnijmy, że ostatni paragraf *Stetigkeit und irrationale Zahlen* otwiera zdanie:

„Na zakończenie powinniśmy jeszcze wyjaśnić związek, jaki zachodzi między naszymi dotychczasowymi rozważaniami a pewnymi podstawowymi twierdzeniami analizy infinitezymalnej".[39]

Dalej Dedekind pokazuje, że zasada ciągłości jest równoważna zupełności w sensie Cauchy'ego oraz twierdzeniu Bolzano-Weierstrassa.[40] Tak więc „w przypadku Dedekinda" był owszem „ustalony sposób posługiwania się liczbami rzeczywistymi", *ustalony sposób* uprawiania analizy matematycznej, chodzi mianowicie o te dwie zasady stosowane w rachunku różniczkowym: zupełność w sensie Cauchy'ego i twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.

Trzymając się historycznych faktów, powiemy, że *Stetigkeit* daje arytme-

[38] [Maddy 1992], s. 94–95, numery zdań zostały dodane.
[39] [Dedekind 1872], s. 148.
[40] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 17.

tyczne podstawy pojęciu zupełności, które do czasu publikacji rozprawy było stosowane w sposób niejasny (przyjmując oczywiście współczesne rygory). Trzeba zarazem przyznać, że i długo po ukazaniu się rozprawy Dedekinda status zupełności był niejasny. Dopiero pojęcie ciała uporządkowanego i podejście aksjomatyczne pozwoliło ustalić zależność między ciągłością w sensie Dedekinda, a zupełnością w sensie Cauchy'ego. Przyjmując tę aksjomatyczną perspektywę można pokazać, że ciało uporządkowane w sposób ciągły jest czymś innym niż ciało uporządkowane i zupełne w sensie Cauchy'ego. *Naddatek*, jaki przynosi konstrukcja Dedekinda to ośrodkowość przestrzeni topologicznej $(\mathbb{R}, \tau_<)$, czy też archimedesowość ciała uporządkowanego $\mathfrak{R}$.

Tak więc istotnie liczb rzeczywistych w dzisiejszym rozumieniu „przed Dedekindem" nie było, był natomiast pewien „ustalony sposób" uprawiania analizy matematycznej i on to właśnie stanowił dla Dedekinda punkt odniesienia oraz krytetrium sensowności przedstawionej konstrukcji.

(Ad [3].) Maddy pisze, że „pytanie, przed którym stanął Dedekind to nie pytanie 'czym są liczby rzeczywiste?', [...] lecz raczej czym jest ciągłość?".

Otóż naczelne zadanie *Stetigkeit und irrationale Zahlen* brzmi: znaleźć

„czysto arytmetyczne i w pełni ścisłe ugruntowanie zasad analizy infinitezymalnej".

Dedekind zinterpretował je jako pytanie o „istotę ciągłości". Dzisiaj jednak wiemy, że struktura, która może stanowić „czysto arytmetyczne podstawy" analizy matematycznej nie musi być ciągła w sensie Dedekinda.[41]

(Ad [6].) Maddy pisze: „to nie liczby rzeczywiste wymagają wyjaśnienia. To ciągłość wymaga wyjaśnienia".

Dedekind odnosi się do „przedteoretycznego" rozumienia ciągłości przywołując obiegowe przekonanie, że analiza matematyczna zajmuje się wielkościami ciągłymi:

„Mówi się często, że rachunek różniczkowy zajmuje się wielkościami ciągłymi".[42]

W *Stetigkeit* zasada ciągłości jest uznana za „istotę ciągłości" tylko dlatego, że jest – zdaniem Dedekinda – równoważna „podstawowym twierdzeniom" rachunku różniczkowego. Tak więc i przed Dedekindem ciągłość była owszem „wyjaśniona" i matematycznie zrozumiała, mianowicie jako zupełność w sensie Cauchy'ego, albo twierdzenie Bolzano-Weierstrassa, jednakże

[41] Zob. rozdz. *Niestandardowe liczby rzeczywiste*.

[42] [Dedekind 1872], s. 136.

– zdaniem Dedekinda – były to wyjaśnienia „geometryczne", nie zaś arytmetyczne. Ostatecznie jednak – powtórzmy – zasadniczym problem *Stetigkeit* są „arytmetyczne" podstawy analizy matematycznej, a „istota ciągłości".

Zasada ciągłości Dedekinda zyskała tak wielki oddźwięk w filozofii, bo w swej nazwie zawiera obciążone wielowiekową tradycją filozoficzną pojęcie ciągłości. Z matematycznego punktu widzenia jest to prosta reguła opisująca przekroje zbioru uporządkowanego.

8.2. (Ad [2].) Maddy pisze: „Co natomiast było, to intuicja linii geometrycznej, zadaniem Dedekinda zaś było stworzenie takiego systemu liczbowego, który naśladowałby własności linii, a zwłaszcza ciągłość".

Niczego podobnego nie znajdziemy ani w *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, ani w *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*.[43] Dedekind jest pierwszym matematykiem, który wysunął hipotezę, że pojęcie ciągłości jest niezależne od pojęcia linii geometrycznej. Dzisiaj uznajemy to jako twierdzenie o niezależności aksjomatu ciągłości od pozostałych aksjomatów geometrii euklidesowej. Trzymając się jedynie *Stetigkeit* możemy powiedzieć, że Dedekind dochodzi do zasady ciągłości nie w wyniku naocznego oglądu (intuicji) jakiejś mitycznej linii prostej, ale analizując przekroje zbioru $(\mathbb{Q}, <)$ definiowane w ciele uporządkowanym $\mathfrak{Q}$.[44]

We współczesnej geometrii elementarnej prosta to *ex definitione* obiekt scharakteryzowany przez zasadę ciągłości Dedekinda, dlatego parafrazując słowa Penelope Maddy o naśladowaniu można powiedzieć tak: *to nie zasada ciągłości naśladuje ciągłość linii prostej, ale prosta – o ile chce być ciągła – musi naśladować zasadę ciągłości Dedekinda.*[45]

8.3. (Ad [4].) Maddy pisze, że „ciągłość to to, co mają przekroje Dedekinda. I [...] to samo odnosi się do ciągów fundamentalnych Cantora oraz innych teoriomnogościowych przedstawień liczb rzeczywistych".

Ciągłość w sensie Dedekinda (CD) i zupełność w sensie Cauchy'ego (CC) to różne własności i to w dwojakim sensie. Po pierwsze, (CD) odnosi się do zbiorów liniowo uporządkowanych, (CC) – albo do przestrzeni metrycznych, albo do ciał uporządkowanych. Po drugie, w teorii ciał uporządkowanych, gdzie można orzekać zarówno (CD) jak (CC), nie są to własności równoważne: $(CD) \to (CC)$, ale $\neg((CC) \to (CD))$.[46]

8.4. (Ad [5].) Maddy pisze: „Jest zatem ostatecznie pewna podstawowa własność, do wykrycia której służą wszystkie teoriomnogościowe przedsta-

[43] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 8, 9, rozdz. *Konstrukcja Cantora*, pkt. 9.
[44] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 9, 10.
[45] Zob. rozdz. *O ciągłości linii prostej.*
[46] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 17.6.

wienia liczb rzeczywistych, pewna własność występująca we wszystkim poszczególnych zasadniczo odmiennych zjawiskach [fizycznych – P.B.], którą liczby rzeczywiste mają mierzyć, a mianowicie ciągłość".

Pominiemy domniemane tu odniesienie do zjawisk fizycznych i ograniczymy się jedynie do kwestii matematycznych. Po pierwsze, wobec tego, że znane są – a można je znaleźć już w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* – różne rozumienia ciągłości, np. ciągłość porządku i ciągłość funkcji, to – spytajmy retorycznie – którą z nich „mierzą" liczby rzeczywiste? Po drugie, liczby rzeczywiste – czyli co? Zbiór uporządkowany i ciągły w sensie Dedekinda? Zbiór uporządkowany w sposób ciągły?[47] Ciało uporządkowane w sposób ciągły? Szczególne ciało unormowane? Szczególne ciało topologiczne?

Zasadnicze pytanie filozoficzne polega nie na tym, co „mierzą", ale czym są liczby rzeczywiste.

**9.** Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* oraz *Thinking about mathematics*.[48]

Struktura to pojemny termin. W kontekście filozofii Stewarta Shapiro podstawowe są dwa znaczenia: (1) struktura w sensie matematycznym, czyli – w pierwszym przybliżeniu – struktura relacyjna $\langle A, \{r_i\}_{i\in I}, \{c_j\}_{j\in J}\rangle$, gdzie $r_i$ to relacje lub funkcje (jedno- lub wieloargumentowe) na zbiorze $A$, zaś $c_j$ to wyróżnione elementy zbioru $A$, (2) struktura w sensie ontologicznym, czyli pewien samodzielny i *abstrakcyjny* (idealny) przedmiot.[49]

Strukturalizm Shapiro rozwinął się w odpowiedzi na paradoks wielorakiej redukcji, ale szybko wykroczył poza ten specyficzny problem i obecnie, obejmując obok wielu czysto technicznych kwestii także ontologię i epistemologię, aspiruje do roli całościowej filozofii matematyki. W związku z charakterystyką struktury w drugim z wyróżnionych znaczeń, zawiera on pewną teorię przedmiotu. Jest to jednak uboga i wręcz naiwna ontologia. Analizy związane z charakterystyką struktury, a dotyczące relacji „struktura – miejsce w strukturze", czy kategorii „system", prowadzone są tak, jakby w filozofii nic na ten temat wcześniej nie napisano, jakby nie było *Badań logicznych* Edmunda Husserla, czy prac Mario Bunge o systemie.[50] Dlatego polemiki ze strukturalizmem nie będziemy prowadzić na gruncie ontologii,

[47] W sprawie rozróżnienia ciągły i ciągły w sensie Dedekinda zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 4–5.

[48] Zob. [Shapiro 1997], [Shapiro 2000(a)]. Zob. też rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 15, gdzie omówiona jest praca [Shapiro 2000(b)], zob. także rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 3.2.

[49] Z uwagi na przestrzenie metryczne musimy przyjąć, że w zbiorze $\{r_i\}_{i\in I}$, obok funkcji $A^2 \mapsto A$, są też funkcje $A^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ciało topologiczne także można rozumieć jako strukturę w sensie matematycznym, a wówczas podaną definicję należałoby jeszcze dalej zmodyfikować.

[50] Zob. [Błaszczyk 2006(a)].

a skoncentrujemy się na tym, co łatwo można zweryfikować, mianowicie na charakterystyce struktur matematycznych, a w tej warstwie ustalenia strukturalizmu też są – powiedzmy – kontrowersyjne. Ale wcześniej krótkie wprowadzenie.

Myśl wiodąca ontologii rozwijanej przez Shapiro jest taka: Istnieją różne konstrukcje liczb rzeczywistych, a każda z nich stanowi przykład tej samej struktury matematycznej – ciała uporządkowanego w sposób ciągły. Struktura (w sensie ontologicznym) liczb rzeczywistych, to jeden jedyny przedmiot abstrakcyjny, a poszczególne konstrukcje matematyczne są jego egzemplifikacją, przykładem, wzorcem. Egzemplifikacją struktury w sensie ontologicznym może być też obiekt fizyczny, czasoprzestrzenny.

W strukturalizmie znajdujemy zatem pewną próbę rozwiązania klasycznego problemu „jedność – wielość": wielość istot ludzkich *versus* idea człowieka, wielość przedmiotów czerwonych *versus* czysta jakość idealna czerwieni, przy czym w miejsce kategorii $\mu\varepsilon\theta\varepsilon\xi\iota\varsigma$, czy konkretyzacja, w strukturalizmie stosuje się pojęcie egzemplifikacji.

Przeświadczenie o jedyności struktury ontologicznej jest zwykle motywowane odpowiednim twierdzeniem matematycznym, np. twierdzeniem o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych. Stąd najchętniej rozważanymi strukturami są liczby naturalne, liczby rzeczywiste i przestrzeń euklidesowa.[51]

A oto nasze podstawowe zarzuty wobec strukturalizmu. Po pierwsze, zupełnie tajemniczy jest ten wątek, w którym występuje domniemane, iż pewne konstrukcje matematyczne oraz przedmioty fizyczne są egzemplifikacją tej samej struktury ontologicznej. Wynika to po części z niedostatków ontologii strukturalizmu, a po części stąd, że Shapiro nie ma jasności co do tego, czym są odpowiednie struktury matematyczne. Po drugie, nie jest przekonywująca teza, która stała się dogmatem strukturalizmu, że poszczególne liczby nie mają *cech* indywidualnych, a jedynie *strukturalne*. Po trzecie, strukturalizm nie sprawdza się w sytuacji – jeśli wolno tak powiedzieć – najprostszej, mianowicie wtedy, gdy rozważane są izomorficzne struktury matematyczne. Przejdźmy do szczegółów.

**10.** Czytamy:

„Strukturalista zdecydowanie odrzuca jakąkolwiek ontologiczną niezależność [poszczególnych – P.B.] liczb naturalnych. Do istoty danej liczby naturalnej należą jej relacje z innymi liczbami. Przedmiotem arytmetyki jest jedna jedyna abstrakcyjna struktura, to co wspólne wszystkim nieskończonym zbiorom

[51] W trzecim przypadku chodzi o kategoryczność aksjomatyki geometrii euklidesowej.

przedmiotów, z operacją następnika, z wyróżnionym pierwszym elementem, które spełniają aksjomat indukcji".[52]

Zrazu, gdy tylko doprecyzować pojęcie aksjomatu indukcji, wydaje się, że chodzi tu o strukturę relacyjną $(N, S, 0)$, gdzie $S : N \mapsto N$ jest operacją następnika scharakteryzowaną aksjomatami: (1) $S$ jest injekcją, (2) $0 \notin S(N)$, (3) $\forall M \subset N[(0 \in M \wedge S(M) \subset M) \rightarrow M = N]$. Teoria ta jest kategoryczna[53] i najpewniej to jest podstawą przekonania o jedyności odpowiedniej struktury ontologicznej. Wydawałoby się zatem, że jedynymi egzemplifikacjami tej struktury są modele matematyczne wskazanej teorii. Tak jednak nie jest. Czytamy dalej:

„Struktura liczb naturalnych jest egzemplifikowana przez skończone ciągi liter uporządkowane leksykograficznie, nieskończony ciąg różnych momentów czasu i nieskończony ciąg kresek | | | | | | ... ".[54]

Cóż to może znaczyć? Weźmy „nieskończony ciąg kresek". Nie sposób zgadnąć jakie są elementy tego „zbioru" i czym jest tu operacja następnika. Problem bynajmniej nie sprowadza się do tego, że wystarczy *jedynie doprecyzować szczegóły*, bo na czym miałoby to polegać.

*Doprecyzowanie* mogłoby na przykład tak wyglądać: *Kolejne* elementy „zbioru kresek" to $|$, $\{|\}$, $\{|, \{|\}\}, \ldots$, a operacja następnika zbiorowi kresek $x$ przyporządkowuje zbiór $x \cup \{x\}$. *Precyzując* pojęcie nieskończoności przyjmijmy, że „nieskończony ciąg kresek" powstaje na mocy aksjomatu nieskończoności. A skoro już wkroczyliśmy na grunt teorii mnogości, to w miejsce kreski | przyjmiemy zbiór pusty $\emptyset$, ewentualnie zgodzimy się na konwencję, że w miejsce symbolu $\emptyset$ przyjmujemy symbol $|$. W rezultacie dochodzimy do teoriomnogościowej rekonstrukcji arytmetyki liczb naturalnych. Innymi słowy, „nieskończony zbiór kresek" jest egzemplifikacją struktury liczb naturalnych o tyle, o ile *narzucimy* nań tę strukturę, lub inaczej, o ile wprost założymy, że jest izomorficzny ze strukturą $(N, S, 0)$.

To samo w odniesieniu do momentów czasu: jeśli ustalimy, co to jest „zbiór momentów" i na czym polega operacja następnika, to będzie on egzemplifikacją struktury liczb naturalnych wtedy, gdy *narzucimy* nań strukturę $(N, S, 0)$.

Reasumując: w pojęciu struktury ontologicznej, poza deklaracją, że jest to przedmiot abstrakcyjny, nie ma nic ponad to, co zawiera pojęcie odpowiedniej struktury matematycznej, natomiast odpowiedź na pytanie

[52] [Shapiro 2000(a)], s. 258.
[53] Zob. [Mainzer 1995(a)], s. 17.
[54] [Shapiro 2000(a)], s. 258.

o związek między przedmiotami matematycznymi a fizycznymi strukturalizm zastępuje ezopową mową o egzemplifikacji struktur ontologicznych.

10.1. Przejdźmy do matematycznej struktury liczb rzeczywistych. Czytamy:

„Aby otrzymać obszerniejsze [niż liczby naturalne i wymierne – P.B.] struktury, nasz podmiot może rozważyć pewne *zbiory* liczb wymiernych, jako przekroje Dedekinda, albo nieskończone ciągi liczb wymiernych spełniające warunek Cauchy'ego [...]. Są to oczywiście różne metody, ale w rezultacie otrzymujemy *tę samą strukturę*, strukturę liczb rzeczywistych".[55]

Jak matematycznie scharakteryzować tę strukturę?

„analiza rzeczywista zajmuje się badaniem ciał zupełnych rzeczywiście domkniętych [complete real closed field]".[56]

Jeżeli „complete real closed field" oznacza ciało rzeczywiście domknięte i zupełne w sensie Cauchy'ego, to podana charakterystyka nie jest jednoznaczna, bo i ciało liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}$, i ciało niestandardowych liczb rzeczywistych $\mathfrak{R}^*$ są ciałami rzeczywiście domkniętymi i zupełnymi w sensie Cauchy'ego.[57] Jeżeli „complete" znaczy „Dedekind complete", tj. żaden przekrój nie wyznacza luki, to struktura matematyczna liczb rzeczywistych jest ciałem uporządkowanym w sposób ciągły; przyjmujemy, że właśnie to chciał powiedzieć Shapiro nazywając liczby rzeczywiste „ciałem zupełnym rzeczywiście domkniętym".[58]

Ten prosty obraz – tj. struktura liczb rzeczywistych jest ciałem uporządkowanym w sposób ciągły – burzą jednak przykłady. Czytamy:

„prosta euklidesowa egzemplifikuje strukturę liczb rzeczywistych".[59]

W geometrii elementarnej linia prosta jest izometryczna z przestrzenią metryczną $(\mathbb{R}, \varrho_\infty)$, gdzie $\varrho_\infty$ jest metryką wyznaczoną przez wartość bez-

[55] [Shapiro 2000(a)], s. 281.

[56] [Shapiro 2000(a)], s. 258–259.

[57] W związku z zupełnością w sensie Cauchy'ego ciała $\mathfrak{R}^*$ zob. rozdz. *Niestandardowe liczby rzeczywiste*, pkt. 8; w związku z tym, że ciało $\mathfrak{R}$ jest ciałem rzeczywiście domkniętym zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 4–6; w związku z tym, że $\mathfrak{R}^*$ jest ciałem rzeczywiście domkniętym zob. [Keisler 1994].

[58] W ciele uporządkowanym $(F, +, \cdot, 0, 1, <)$ „zupełność w sensie Dedekinda" zbioru $(F, <)$ jest równoważna ciągłości w sensie Dedekinda zbioru $(F, <)$, bo porządek $<$ jest gęsty. W sprawie terminu „zupełność w sensie Dedekinda" zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 3.1.

[59] [Shapiro 2000(a)], s. 269.

względną w ciele $\mathfrak{R}$.[60] Podobnie w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, prosta jest izometryczna z przestrzenią metryczną $(\mathbb{R}, \varrho_\infty)$.[61] Na linii prostej nie jest określone mnożenie punktów i już chociażby dlatego punkty prostej nie tworzą struktury ciała algebraicznego; innymi słowy, linia prosta nie jest izomorficzna z ciałem uporządkowanym $\mathfrak{R}$.

Tę samą myśl – tj. struktura matematyczna liczb rzeczywistych jest tym samym, co struktura linii prostej – znajdujemy też w innym miejscu.

„Dedekind [1872] w słynnym traktacie o ciągłości wydatnie wykorzystał strukturalne podobieństwo między punktami prostej i liczbami rzeczywistymi".[62]

Ale w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* – powtórzmy – Dedekind scharakteryzował prostą jedynie jako zbiór uporządkowany.[63]

W jeszcze innym miejscu czytamy:

„Dedekind [...] zauważył, że gdy tylko wyróżniona zostanie jednostka długości oraz pewien punkt na prostej, to liczby wymierne mogą być bijektywnie odwzorowane na linię prostą. W ten sposób arytmetyczna własność 'pomiędzy' ma wiele wspólnych cech (strukturalnych) ze swoim geometrycznym odpowiednikiem. Z nauki matematyków greckich o wielkościach niewspółmiernych wnosimy, że są na prostej punkty, które nie odpowiadają liczbom wymiernym, innymi słowy, liczby wymierne mają przerwy, czy luki. W rezultacie liczby wymierne nie są ciągłe".[64]

Po pierwsze, liniowość i gęstość porządku Shapiro nazywa własnościami strukturalnymi relacji „pomiędzy", a nie zauważa, że Dedekind jako pierwszy w historii traktuje linię prostą jako strukturę porządkową.[65] Po drugie, dowód faktu, że zbiór $(\mathbb{Q}, <)$ posiada luki, nie jest w *Stetigkeit* w ogóle związany ze strukturą linii prostej, ale z określoną własnością ciała uporządkowanego liczb wymiernych, wszak odpowiedni przekrój definiowany jest właśnie w ciele $\mathfrak{Q}$.[66]

---

[60] Zob. rozdz. *O ciągłości linii prostej*. Oznaczenie $\varrho_\infty$ uzasadnione jest w rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 11.

[61] Zob. [Sieklucki 1978], rozdz. 1.

[62] [Shapiro 1997], s. 102.

[63] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 8.

[64] [Shapiro 1997], s. 171

[65] Pomijamy już to, że w strukturze $(\mathbb{Q}, <)$ „pomiędzy" oznacza własność porządku, mianowicie gęstość, zaś w geometrii elementarnej „pomiędzy" może być rozumiane jako relacja leżenia między B, albo jako własność tej relacji zapisana w aksjomacie O.6, czyli gęstość punktów na prostej; zob. rozdz. *O ciągłości linii prostej*, pkt. 2

[66] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 10.

Kolejny cytat rodzi jeszcze bardziej zasadnicze wątpliwości co do tego, czym jest matematyczna struktura liczb rzeczywistych. Komentując *Stetigkeit und irrationale Zahlen* Shapiro pisze:

„Strukturalista oczywiście powiedziałby, że przekroje egzemplifikują strukturę liczb rzeczywistych".[67]

W zdaniu tym chodzi o konstrukcję Dedekinda, ale przecież konstrukcja ta może być ujęta i jako szczególne ciało uporządkowane, i jako szczególne ciało unormowane, i jako szczególne ciało topologiczne, a każdemu z tych ujęć towarzyszy twierdzenie o jednoznaczności: twierdzenie o kategoryczności, twierdzenie Ostrowskiego, twierdzenia Pontriagina. Wobec tego spytajmy retorycznie: na jakiej podstawie wyróżnioną rolę przypisuje się charakterystyce aksjomatycznej?

10.2. Zrazu wydaje się, że strukturalizm słusznie akcentuje bytową niesamodzielność liczby względem struktury matematycznej:

„Liczba rzeczywista jest dla nas miejscem w strukturze liczb rzeczywistych. 'Postulowanie jednej liczby rzeczywistej' jest bezcelowe, bo każda liczba jest częścią dużej struktury".[68]

W takim sformułowaniu i w pierwszym przybliżeniu teza ta jest wręcz banalna. Z drugiej jednak strony, w rozwinięciach zostaje ona przerysowana i wtedy rodzi już wątpliwości. Czytamy:

„Rozumienie struktury liczb rzeczywistych sprowadza się do operowania językiem analizy. Ucząc się tego języka, zdobywając sprawność w posługiwaniu się kwantyfikatorami, których zakres jest ograniczony do liczb rzeczywistych, poznajemy liczby rzeczywiste. Używając tego języka poznajemy aksjomaty [...]. Aksjomaty te, czy inne opisy liczb rzeczywistych, wyznaczają relacje między liczbami, takie jak działania, ciągłość, własność Archimedesa. Przedmiotem niniejszej książki jest to, że relacje te charakteryzują strukturę. 'Liczby rzeczywiste' to nic więcej niż te relacje".[69]

(1) Kluczowe jest tu zdanie „Aksjomaty [...] wyznaczają relacje między liczbami ...". Do relacji tych Shapiro nie zalicza sposobu, w jaki liczby rzeczywiste są reprezentowane, tego, że są one przedstawiane czy to jako przekroje Dedekinda zbioru $(\mathbb{Q}, <)$, czy jako zbiory ciągów Cauchy'ego liczb

[67] [Shapiro 1997], s. 171.
[68] [Shapiro 1997], s. 76.
[69] [Shapiro 1997], s. 138–139.

wymiernych. Takie podejście wynika jedynie z wyróżnionej pozycji opisu aksjomatycznego.

To, co jest lekceważone przez strukturalizm, mianowicie konkretne przedstawienia, w ścisły sposób jest związane z konkretnymi konstrukcjami liczb rzeczywistych. Wbrew sugestiom strukturalistów bynajmniej nie ma tu inflacji, nadmiaru pomysłów. Obok omówionych konstrukcji można jeszcze wskazać konstrukcje, w których liczby rzeczywiste są identyfikowane z podciałem pewnego większego ciała, np. ciała szeregów formalnych Laurenta o współczynnikach w ciele liczb wymiernych, ciała niestandardowych liczb rzeczywistych, ciała liczb Conway'a.[70] Istotne jest, że różne konstrukcje związane są z różnymi *technikami* matematycznymi. Poprzestając tylko na tym, co opisano w niniejszej pracy, z konstrukcją Dedekinda wiąże się *technika* uzupełniania zbioru liniowo uporządkowanego do zbioru ciągłego w sensie Dedekinda, z konstrukcją Cantora – *technika* uzupełniania przestrzeni metrycznej do przestrzeni metrycznej zupełnej. *Techniki* te nie należą do „języka analizy" w takim znaczeniu, jakie przyjmuje Shapiro, bo są stosowane także poza aksjomatyczną teorią liczb rzeczywistych. *Techniki* te nie są też strukturami w rozumieniu Shapiro.

(2) Z perspektywy ujęcia aksjomatycznego sposób przedstawienia liczb rzeczywistych jest nieistotny, ale jest on już istotny w dowodzie twierdzenia o kategoryczności.[71] Podobnie utożsamienie liczby rzeczywistej z przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}, <)$ jest istotnym krokiem w dowodzie twierdzenia Höldera o grupach archimedesowych.[72]

Fakt, że liczba niewymierna ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci ułamka łańcuchowego jest *nieistotny* z perspektywy ujęcia aksjomatycznego, bo jest to tylko sposób przedstawienia. Natomiast z matematycznego punktu widzenia fakt ten pozwala wprowadzić w zbiorze liczb niewymiernych z przedziału $[0, 1]$ taką metrykę, że w rezultacie powstaje przestrzeń metryczna zupełna.[73]

(3) A wreszcie, skoro poszczególne liczby mają mieć jedynie *własności strukturalne*, to jak wytłumaczyć fakt, że w analizie występują wyróżnione stałe, jak na przykład $\pi$ czy $e$.

Jaka to *własność strukturalna* związana jest z tym, że liczba $\pi$ jest miarą kąta półpełnego, który jest definiowany w geometrii elementarnej?[74]

[70] Zob. odpowiednio: [Faltin et al. 1975], [Goldblatt 1998], [Conway 2001].
[71] Zob. wyżej pkt. 2.
[72] Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 11.
[73] Zob. rozdz. *Konstrukcja Cantora*, pkt. 15.
[74] Zob. [Borsuk, Szmielew 1972], s. 161.

To, że istnieją liczby niewymierne można owszem uznać za *własność strukturalną* liczb rzeczywistych. Wydaje się jednak, że niewymierność liczby $e$ jest jej indywidualną własnością. To, że istnieją liczby rzeczywiste niealgebraiczne można owszem uznać za *własność strukturalną* liczb rzeczywistych. Wydaje się jednak, że niealgebraiczność liczby $e$ jest jej indywidualną własnością.

Na podstawie aksjomatu ciągłości przyjmuje się, że istnieje liczba $e$, tj. granica ciągu $(1+\frac{1}{n})^n$ czy suma szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, ale dowód twierdzenia, że liczba $e$ jest niealgebraiczna wiążą się z *technikami*, które tylko historycznie są związane ze strukturą liczb rzeczywistych.

Podane przykłady mają przede wszystkim pokazać, jak dalece niejasne jest pojęcie *własności strukturalnej*.

10.3. Przejdźmy wreszcie do przykładu, który wydaje się zupełnie oczywisty i wręcz sztandarowy dla strukturalistycznego ujęcia matematyki. Weźmy uporządkowane ciało $\mathfrak{Q}$ oraz ciało ułamków $\mathfrak{R}_Q$, rozważane w związku z konstrukcją Cantora.[75] Różnią się one tylko tym *nieistotnym szczegółem*, że ich odpowiednie elementy są różnymi zbiorami: z jednej strony mamy $q \in \mathbb{Q}$, z drugiej – $[(q, q, q, \dots)] \in \mathbb{Q}_R$. Ze strukturalistycznego punktu widzenia ciała te są egzemplifikacją struktury ciała liczb wymiernych, lub inaczej: ciała uporządkowanego prostego charakterystyki zero. Ale wobec tego jak wytłumaczyć fakt, że w dowodzie twierdzenia o zupełności liczb rzeczywistych ciała te muszą jednak być – mając na uwadze znane dowody – rozróżnione. Dlaczego *nieistotna* różnica ma tak istotne znaczenie?

Ze swej strony proponujemy takie oto wyjaśnienie: Jeżeli samo rozróżnienie ciał $\mathfrak{Q}$ i $\mathfrak{R}_Q$ uznamy za *technikę* dowodzenia, to wówczas przyjmujemy jako fakt, że $\mathfrak{Q}$ i $\mathfrak{R}_Q$ są *istotnie* różne. Następnie przyjmujemy, że izomorfizm ciał uporządkowanych wyznacza aspekt, z uwagi na który te dwa przedmioty – tj. $\mathfrak{Q}$ i $\mathfrak{R}_Q$ – są porównywane. Aspekt jest niesamodzielnym (w sensie Ingardena) momentem przedmiotu, dlatego nie musimy *kreować*, domniemywać trzeciego samodzielnego przedmiotu – np. ontologicznej struktury ciała uporządkowanego prostego charakterystyki zero – takiego, że $\mathfrak{Q}$ oraz $\mathfrak{R}_Q$ są jego egzemplifikacjami. Nie ma też wówczas potrzeby redukowania przedmiotów $\mathfrak{Q}$ i $\mathfrak{R}_Q$ do owego aspektu; nie musimy też *utożsamiać*, identyfikować $\mathfrak{Q}$ i $\mathfrak{R}_Q$ tak, jak to czasami zdarza się matematykom.[76] Aby wyjaśnić powody, dla których wyróżnia, *stwarza* się aspekt związany z izomorfizmem ciał uporządkowanych, wystarczy przywołać konkretną sytuacją matematyczną,

[75] Zob. rozdz. *Konstrukcja Cantora*, pkt. 1.5. To samo odnosi się do konstrukcji Dedekinda; zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 11 oraz 14.

[76] Zob. rozdz. *Konstrukcja Cantora*, pkt. 4.

konkretny problem, który dzięki temu pojęciu ma być rozwiązany; w przypadku odróżnienia $\mathfrak{Q}$ i $\mathfrak{R}_Q$ jest to dowód zupełności ciała liczb rzeczywistych w konstrukcji Cantora.

Do wyjaśnienia pozostaje jeszcze samo pojęcie aspektu, ale to już domena ontologii. Tej kwestii poświęcimy kolejny rozdział.

# O PRZEDMIOCIE MATEMATYCZNYM

## CZĘŚĆ II

# Odrzucenie *tertium non datur*

W rozdziale *O przedmiocie matematycznym. Część I* przedstawiliśmy opracowaną przez Ingardena teorię przedmiotu intencjonalnego.[1] W tym miejscu szerzej potraktujemy tylko jeden wątek tej koncepcji – schematyczność.

Miejsca niedookreślenia stanowią cechę charakterystyczną przedmiotu intencjonalnego, jednak kategoria ta jest oddawana na wiele sposobów,[2] a przy tym żaden z nich nie daje podstaw do odpowiedzi na proste pytanie: czy grupa krwi stanowi miejsce niedookreślenia tytułowej postaci poematu *Pan Tadeusz*?[3]

Niżej pokażemy, co w związku z tym pytaniem można znaleźć u samego Ingardena. Odpowiedzi podanej wprost oczywiście nie ma i nie jest też tak, że może być ona wyprowadzona z ustaleń przyjętych w *Sporze*, dlatego potrzebna jest interpretacja. Ta, którą przedstawimy, związana jest ze stanowiskiem dotyczącym ontologicznej zasady wyłączonego środka. Przy odpowiednim odczytaniu schematyczności, głoszone przez Ingardena odrzucenie zasady wyłączonego środka staje się zrozumiałe, a nawet oczywiste. W związku z przyjętą przez nas interpretacją będziemy musieli jednak wykroczyć poza ustalenia Ingardena dotyczące przedmiotu intencjonalnego.

**1.** W *Sporze o istnienie świata* jest zdanie odbierające ontologicznej zasadzie wyłączonego środka walor ogólności:

„zasada wyłączonego środka obowiązuje jedynie w odniesieniu do indywidualnych przedmiotów samoistnych, a przedmioty intencjonalne w swej zawartości nie podpadają pod jej zakres".[4]

[1] W dalszym ciągu przez przedmiot intencjonalny rozumiemy szczególny przedmiot pochodnie intencjonalny, jakim jest postać literacka.

[2] Zob. niżej pkt. 10.

[3] Zob. rozdz. *O przedmiocie matematycznym. Część I*, pkt. 1.

[4] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 207.

Rzecz jest dla Ingardena na tyle oczywista, że nie podając wyjaśnień nawet nie zapowiada, jak to się często zdarza, dyskusji. Pokażemy, jak na gruncie ontologii *Sporu* można uzasadnić odrzucenie ontologicznej zasady wyłączonego środka, pokażemy do jakich przedmiotów i dlaczego nie stosuje się ta zasada oraz to, w których dziedzinach bytowych obowiązuje i jaką postać winna wówczas przyjąć.

1.1. Samo sformułowanie ontologicznej zasady wyłączonego środka nie jest bynajmniej oczywiste. Jako punkt wyjścia przyjmujemy zdanie:

$$\forall P \forall w[w(P) \vee \neg(w(P))], \tag{1}$$

co czytamy: dla każdego przedmiotu $P$ i każdej własności $w$ jest tak, że $w$ przysługuje $P$ lub $w$ nie przysługuje $P$.

W kolejnych punktach zarysujemy sens pojęć występujących w tym wzorze, a następnie poddając go dwóm modyfikacjom, dojdziemy do sformułowania, które można wpisać w ramy ontologii Ingardena.

**2.** Co to jest przedmiot $P$? (1) Najogólniejsze rozumienie przedmiotu jakie znajdujemy w *Sporze* to coś, co jest trójjednością materii, formy oraz sposobu istnienia. Przedmiotem w tym znaczeniu jest na przykład idea, własność, negatywny stan rzeczy; nieprzedmiotem – czysta jakość idealna, sama materia, sama forma, sam sposób istnienia. Materia, forma, sposób istnienia to tylko abstrakcyjnie wyróżnione momenty przedmiotu.

(2) Drugie rozumienie – bliskie klasycznemu – związane jest z formą i odnosi się do tego, co ma strukturę: podmiot własności – własności. W tym przypadku najważniejszy jest moment samodzielności bytowej:

„Przedmiot istnieje samodzielnie, jeżeli nie wymaga z istoty swej żadnego innego przedmiotu, z którym musiałby współistnieć w obrębie jednej i tej samej całości".[5]

Przy tym rozstrzygnięciu, własność jest nieprzedmiotem, bo istnieje niesamodzielnie.

Obok klasycznej formy podmiot własności–własności w *Sporze* analizowane są też inne formy przedmiotowe: przedmiot wyższego rzędu, przedmiot o dwustronnej budowie, przedmiot o budowie warstwowej oraz system.[6]

(3) Jeszcze inny podział wyznacza opozycja ogólne *versus* indywidualne. Przedmioty ogólne to idee, natomiast za nieprzedmioty ogólne można uznać czyste jakości idealne. Przyjmujemy, że to, co nie jest ogólne jest indywidualne.

[5] [Ingarden 1987], t. I, s. 116.

[6] Zob. [Błaszczyk 2006(a)].

2.1. Każdy przedmiot istnieje w pewien sposób. Na tej podstawie przedmioty samodzielne tworzą trzy dziedziny bytowe: dziedzinę tego, co istnieje realnie, tego, co istnieje idealnie oraz tego, co istnieje intencjonalnie.[7] Przykłady samodzielnych przedmiotów realnych to rzecz, owoc, człowiek; Ingarden nazywa je łącznie przedmiotami trwającymi w czasie. Przykłady przedmiotów intencjonalnych to dzieło literackie oraz to, co nas tu najbardziej zajmuje, wybrana postać danego dzieła. Przedmioty idealne to idee oraz indywidualne przedmioty idealne. Do tych drugich sam Ingarden zaliczał przedmioty matematyki: liczby i figury geometryczne.

Czym zatem jest $P$ występujące we wzorze (1)? $P$ oznacza przedmiot indywidualny, istniejący samodzielnie; jest to więc albo przedmiot trwający w czasie, albo przedmiot intencjonalny, albo indywidualny przedmiot idealny.

**3.** Co to jest własność $w$? Własność – autonomiczna – to coś, co przysługuje przedmiotowi, np. czerwień przysługująca danemu owocowi.[8] W samej własności Ingarden także wyróżnia materię, formę oraz sposób istnienia. Materią jest tu konkretyzacja czystej jakości idealnej (skonkretyzowana czysta jakość idealna), forma polega na przysługiwaniu czemuś, a o sposobie istnienia decyduje moment bytowej niesamodzielności.

Własność jest własnością pewnego przedmiotu i nie może istnieć bez przedmiotu, któremu przysługuje, lub inaczej: tylko w abstrakcyjnym rozważaniu własność może być traktowana jako coś odrębnego, oddzielonego od przedmiotu. Jest ona zatem równie indywidualna jak przedmiot, któremu przysługuje.

Z uwagi na wskazaną indywidualność, na fakt, że dana własność nie może przysługiwać dowolnemu przedmiotowi, że jest własnością tylko jednego przedmiotu, zasadę wyłączonego środka należy przeformułować. Trzeba zaznaczyć, że to dowolna jakość, a nie dowolna własność, może być przypisywana przedmiotowi $P$. Jednocześnie należy jeszcze uwzględnić, że przedmiotowi nie przysługuje wprost sama jakość, lecz jakość skonkretyzowana i ujęta w formę własności.

Po tych uwagach zasada wyłączonego środka przyjmie postać:

$$\forall P \forall j [w_j(P) \vee \neg w_j(P)], \tag{2}$$

gdzie $w_j$ oznacza własność, w której skonkretyzowana jest jakość $j$; w tym miejscu przyjmujemy też, że $j_w$ oznacza czystą jakość idealną, której konkretyzacja stanowi materię własności $w$.

[7] Pomijamy tu istnienie absolutne, co nie ma żadnego wpływu na dalsze analizy.

[8] W *Sporze* dużo uwagi poświęcił też Ingarden własności relatywnej; zob. [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, rozdz. XII.

**4.** Co to jest $w_j(P)$? Przedmiotowi przysługują własności, natomiast samo przysługiwanie własności jest w tradycji fenomenologicznej nazywane stanem rzeczy. To właśnie stany rzeczy, a nie rzeczy, czy własności uznawane są za odpowiedniki zdań. Przykład: ontycznym korelatem zdania „To jabłko jest zielone" jest stan rzeczy: „Przysługiwanie zieleni temu oto jabłku". Zatem $w_j(P)$ to stan rzeczy – pozytywny stan rzeczy.

4.1. Co to jest $\neg w_j(P)$? Co to znaczy, że „$w_j$ nie przysługuje $P$"?

Pierwsze gruntowne opracowanie kategorii stan rzeczy, Sachverhalt, przedstawił Adolf Reinach w pracy z roku 1911 *Zur Theorie des negativen Urteils*. Czytamy tam:

„W sporze o to, czy w sądzie mogą być ujmowane dowolne twory przedmiotowe, czy tylko relacje [...] przeoczony został ów trzeci twór – stan rzeczy – który nie jest ani przedmiotem, ani relacją, i który [...] wyłącznie może stanowić intencjonalny korelat sądów".[9]

Dalej Reinach pisze, że stany rzeczy mogą być pozytywne („bycie-b-przedmiotu A") lub negatywne („nie-bycie-b-przedmiotu A"), a ontyczne związki między pozytywnymi i negatywnymi stanami rzeczy charakteryzuje jak następuje:

„Negatywne stany rzeczy zachodzą dokładnie w tym samym sensie i dokładnie w ten sam obiektywny sposób jak pozytywne stany rzeczy".[10]

„Obok stanu rzeczy 'bycie-b-przedmiotu A' istnieje stan rzeczy 'nie-bycie-b-przedmiotu A'. Te dwa stany rzeczy są wobec siebie kontradyktoryczne; zachodzenie jednego wyklucza zachodzenie drugiego".[11]

Reinach skrupulatnie bada poznawanie stanów rzeczy. Jako możliwe znajduje negatywne lub pozytywne przeświadczenie o negatywnym lub pozytywnym stanie rzeczy. Stąd otrzymuje cztery kombinacje: pozytywne przeświadczenie o pozytywnym stanie rzeczy, negatywne przeświadczenie o pozytywnym stanie rzeczy, pozytywne przeświadczenie o negatywnym stanie rzeczy, negatywne przeświadczenie o negatywnym stanie rzeczy.

Pierwsza możliwość polega na tym, że pozytywny stan rzeczy dany jest w sposób oczywisty.

Druga – odpowiada sytuacji, w której poznajemy, że „A nie jest a". Polega to na prostym ujęciu różności („negatywnej oczywistości niezgodności")

[9] [Reinach 1911], s. 74.
[10] [Reinach 1911], s. 76,
[11] [Reinach 1911], s. 70.

zachodzącej między stanami rzeczy: domniemanym pozytywnym stanem „bycie-a-przedmiotu A" i faktycznym pozytywnym stanem „bycie-b-przedmiotu A";

„Przebiegając wzrokiem otaczający nas świat, będziemy wprawdzie mogli dojść do pozytywnego przeświadczenia, że pewien przedmiot jest czerwony, lecz nie do negatywnego, że nie jest on żółty. To ostatnie zakłada, że w jakiś sposób – czy to pytając, czy to wątpiąc itp. – brałem pod rozwagę ten stan rzeczy (scil. bycie żółtym owego przedmiotu). Co dokonuje się, kiedy z tej rozważającej postawy przechodzimy do ostatecznego przeświadczenia? Stajemy przed faktycznym stanem w istniejącym świecie i poznajemy, że przedmiot jest czerwony. Podczas, gdy ten stan rzeczy prezentuje się nam jako pozytywnie oczywisty, ujmujemy niezgodność, w jakiej pozostaje z nim stan rzeczy brany pod rozwagę (bycie tego przedmiotu żółtym), a przez to ten ostatni przybiera zarazem owo swoiste oblicze, które [...] nazwaliśmy negatywną oczywistością. Dopiero teraz powstaje w nas negatywne przekonanie co do tego stanu rzeczy".[12]

Trzecia możliwość to poznawanie negatywnego stanu rzeczy. Polega to na oczywistości „koniecznego powiązania" jakie zachodzi między negatywnym i „kontradyktorycznym wobec niego" pozytywnym stanem rzeczy:

„Ujmując konieczne powiązanie negatywnego stanu rzeczy z pozytywnym, poznajemy również ten negatywny stan rzeczy; i do poznanego stanu negatywnego odnosi się właśnie pozytywne przeświadczenie".[13]

Czwarta możliwość to proste ujęcie niezgodności zachodzącej między domniemanym negatywnym stanem rzeczy i „sprzecznym" z nim pozytywnym stanem rzeczy.

W każdej kombinacji – jak widać – pozytywny lub negatywny, domniemany lub faktyczny stan rzeczy występuje w parze z pozytywnym stanem rzeczy. W tym sensie poznanie negatywnego stanu rzeczy jest zależne od tego, co pozytywne.

Dla Ingardena punktem wyjścia teorii negatywnych stanów rzeczy jest stanowisko Reinacha, podstawowe jest jednak dlań pytanie o sposób istnienia negatywnego stanu rzeczy. Jeżeli istotnie poznanie negatywnego stanu rzeczy jest zależne od poznania odpowiedniego pozytywnego stanu rzeczy, to znaczy – wnosi Ingarden – że musi też zachodzić jakaś zależność między tymi stanami.[14]

[12] [Reinach 1911], s. 77.
[13] [Reinach 1911], s. 78.
[14] Zob. [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 268–275.

4.2. Jak zatem istnieje negatywny stan rzeczy? Zacznijmy od przykładu. Niech przedmiotowi $P$, powiedzmy jabłku, przysługuje własność $a$, powiedzmy zieloność. Przyjmijmy ponadto, że $P$ jest kuliste i słodkie. Własność $a$ istnieje autonomicznie:

sama w sobie ma swój fundament bytowy, sama w sobie jest immanentnie określona.[15]

W szczególności oznacza to, że $a$ istnieje niezależnie od wszelkiego podmiotu poznającego. To samo odnosi się do stanu rzeczy „Przysługiwanie $P$ własności $a$".

Stan rzeczy „To jabłko nie jest czerwone" – „$P$ nie jest $b$" – jest natomiast bardziej złożony. Wyznaczony jest on z jednej strony przez stan rzeczy „$P$ jest $a$", następnie przez różność czystych jakości idealnych $j_a$ (zieleń) oraz $j_b$ (czerwień), a wreszcie przez intencjonalnie zaprojektowany przez podmiot poznający stan rzeczy „To jabłko jest zielone" („$P$ jest $b$").

Nawet w ramach ontologii Ingardena, tak bogatej w egzystencjalne dystynkcje, ten sposób istnienia jest wyjątkowy. Jest to bowiem istnienie częściowo autonomiczne, częściowo heteronomiczne. Autonomiczne jest ono z uwagi na składniki niezależne od podmiotu: (1) „$P$ jest $a$" oraz (2) $j_a$ jest różne od $j_b$.[16] Nieautonomiczne jest z uwagi na intencjonalnie zaprojektowany stan rzeczy „$P$ jest $b$";

„negatywne stany rzeczy istnieją pochodnie przez to, że są wyznaczone z jednej strony przez zachodzące w przedmiocie pozytywne stany rzeczy, z drugiej zaś przez podmiot poznający, który interesuje się pewnym obszarem uposażeń przedmiotu".[17]

4.3. W przedstawionej interpretacji, w czynniku $\neg w_j(P)$ za $w_j(P)$, za to, co *zaprzeczane*, można podstawiać tylko to, co istnieje autonomicznie: w negatywnym stanie rzeczy *zaprzeczany* jest pewien pozytywny stan rzeczy. W związku z tym wyrażenie $\neg(\neg w)$ nie ma sensu, gdyż $\neg w$ nie jest bytem autonomicznym. Aby podkreślić ten aspekt, negatywny stan rzeczy będziemy oznaczać symbolem $non(w)$. Po tej uwadze wzór (2) przyjmie postać:

$$\forall P \forall j[w_j(P) \vee non(w_j(P))]. \tag{3}$$

[15] Zob. [Ingarden 1987], t. I, s. 84.

[16] Ten moment może być uznany za heteronomiczny (subiektywny); zob. [Żegleń 1996], s. 273. Nie widzimy jednak powodów, aby z uwagi na opozycję heteronomiczny–autonomiczny (subiektywny–obiektywny) różność jakości traktować inaczej niż różność liczb, np. $1 \neq 0$.

[17] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 276.

Jest to symboliczny zapis ontologicznej zasady wyłączonego środka zrekonstruowanej w ramach *Sporu o istnienie świata*.

4.4. Jaki jest udział podmiotu w konstytuowaniu negatywnego stanu rzeczy? Rolą podmiotu jest wyróżnienie aspektu przedmiotu, np. barwy, kształtu, smaku, a następnie zaprojektowanie stanu rzeczy, który mógłby wystąpić zamiast aktualnie przysługującej przedmiotowi własności. Ów zaprojektowany, intencjonalny stan rzeczy „$P$ jest $b$" ma swą podstawę bytową

„a) w zespole pozytywnych stanów rzeczy danego przedmiotu, b) w domniemaniu aktu poznawczego, spełnianego przez podmiot, który poznaje przedmiot $P$ i usuwa odpowiednie momenty materialne".[18]

Aby nadać jednoznaczność tym słowom, liczbę mnogą zastąpimy pojedynczą, tak że w odniesieniu do naszego przykładu otrzymamy: intencjonalny stan rzeczy „$P$ jest $b$" ma swą podstawę bytową w (1) pozytywnym stanie rzeczy „$P$ jest $a$" oraz w (2) domniemaniu aktu poznawczego, spełnianego przez podmiot, który poznaje przedmiot $P$ i usuwa odpowiedni moment materialny – w naszym przykładzie jest to $j_a$ – natomiast w jego miejsce wstawia moment jakościowy $j_b$.

„Podmiot poznający – zależnie od swych zainteresowań – niejako intencjonalnie kompletuje negatywne stany rzeczy przez wyznaczenie tego momentu materialnego określenia, w stosunku do którego zachodzi rozdział między nim [przedmiotem intencjonalnie domniemanym – P.B] a przedmiotem".[19]

„To 'coś innego' [intencjonalnie wyznaczona własność – P.B.] nie jest przy tym nigdy całkiem dowolne, 'byle jakie', lecz jest ściśle wyznaczone (jako 'przeciwieństwo') przez pozytywne stany rzeczy występujące w przedmiocie".[20]

Mając na uwadze, to co powiedziane w drugim cytacie będziemy mówili, że negatywny stan rzeczy *odbija się* od pewnego pozytywnego stanu rzeczy.

4.5. Jakie są ontyczne podstawy takiej operacji podmiotu? Po pierwsze, podział sfery czystych jakości idealnych na gatunki, po drugie, występowanie odmian jakościowych w obrębie danego gatunku. To, co po stronie przedmiotu odpowiada gatunkowi będziemy nazywać aspektem.

Warunkiem wyróżnienia aspektu przedmiotu jest podział jakości na gatunki: jedna grupa jakości odpowiada barwie, inna – kształtowi, itd. Gdy

[18] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 276.
[19] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 276.
[20] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 276–277.

wyróżniony jest aspekt, wówczas intencjonalnie może być wytworzonych tyle stanów rzeczy, ile jest jakości („odmian jakościowych") w obrębie danego gatunku. Tak więc gdy wyróżniona jest barwa, to możliwe są takie negatywne stany rzeczy, w których występuje któraś z odmian tego gatunku.

„Nie byłoby jednak tych negatywnych stanów rzeczy, gdyby nie to, że istnieje tak wielkie bogactwo momentów jakościowych (idealnych jakości), że jest ich znacznie więcej niż ich może być ukonkretyzowanych w jednym i tym samym przedmiocie".[21]

„Ponieważ odmiany jakościowe wykluczają się wzajemnie, a istnieje cała ich mnogość, dostarczają niejako wystarczającego materiału na uposażenie wielu przedmiotów indywidualnych".[22]

„To bogactwo zarazem umożliwia, że przy poznawaniu pewnego przedmiotu indywidualnego bierzemy (resp. możemy brać) pod rozwagę różne momenty jakościowe w nim nie zrealizowane; 'proponujemy' je niejako na jego uposażenie własnościowe, a znajdując w nim zrealizowane inne własności, dopełniamy intencjonalnie przedmiot, rozwijając odpowiednie negatywne stany rzeczy".[23]

Uogólniając to, co wyżej powiedziane otrzymujemy:

(wk) Ontycznym warunkiem „$P$ nie jest $w_j$" jest to, że $j_w$ jest jakością z gatunku $J$, w przedmiocie $P$ jest skonkretyzowana pewna jakość $i$, która jest odmianą gatunku $J$ oraz $i$ jest różna od $j_w$;

$$non(w_j(P)) \rightarrow \exists J \exists i[i \in J \wedge j_w \in J \wedge j_w \neq i \wedge w_i(P)].$$

Stąd otrzymujemy, że gdy $P$ oznacza zielone jabłko z naszego przykładu, to autonomiczną stroną negatywnego stanu rzeczy „$P$ nie jest czerwone" nie jest ani stan rzeczy „$P$ jest kuliste", ani „$P$ jest słodkie", lecz jedynie „$P$ jest zielone".

Dodając do warunku (wk) odpowiedni akt podmiotu poznającego otrzymujemy:

(wkw) „$P$ nie jest $w_j$" zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $j_w$ jest jakością z gatunku $J$, w przedmiocie $P$ jest skonkretyzowana pewna jakość $i$, która

[21] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 277.
[22] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 278.
[23] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 278.

jest odmianą gatunku $J$, która jest różna od $j_w$ oraz spełniony jest akt świadomości, w którym jest domniemane $w_j(P)$;

$$non(w_j(P)) \leftrightarrow \exists J \exists i[i \in J \wedge j_w \in J \wedge j_w \neq i \wedge w_i(P) \wedge AKT(w_j(P))].$$

4.6. Omawiana koncepcja negatywnych stanów rzeczy podejmuje tylko jeden, ściśle określony wątek szeroko rozumianego zagadnienia negatywności, a mianowicie: jaki jest ontyczny sens nieprzysługiwania przedmiotowi autonomicznej własności. W ontologii Ingardena samo istnienie przedmiotu nie jest własnością, przeto i nieistnienie przedmiotu nie jest negatywnym stanem rzeczy. Negatywnym stanem rzeczy nie jest też to, że w określonym miejscu nie ma danego przedmiotu. Samo znajdowanie się przedmiotu w jakimś miejscu nie jest własnością w przyjmowanym obecnie znaczeniu. W ontologii Ingardena położenie przedmiotu jest własnością relatywną i jako takie nie jest własnością autonomiczną.

**5.** Przechodzimy do zaprzeczenia zasady wyłączonego środka. Wychodząc od wzoru (3) przyjmie ono postać:

$$\exists P \exists j[\neg(w_j(P) \vee non(w_j(P)))], \tag{4}$$

co czytamy: istnieje przedmiot $P$ oraz jakość $j$ i nie jest tak, że własność $w_j$ przysługuje $P$ lub własność $w_j$ nie przysługuje $P$.

Jaki przedmiot nie podlega zasadzie wyłączonego środka? Zdaniem Ingardena każdy przedmiot intencjonalny. Pokażemy dlaczego tak jest w przypadku tytułowej postaci powieści *Lolita* i jaki to ma związek ze schematycznością przedmiotu intencjonalnego.[24]

**6.** Powtórzmy: o sposobie istnienia przedmiotu intencjonalnego, owej całości wraz z zawartością, decyduje to, że „swój fundament bytowy ma [on – P.B.] nie w sobie samym, lecz w czymś innym". Ów „fundament bytowy" to tekst. Odrębną kwestią jest natomiast „sposób istnienia" przedmiotu, który stanowi zawartość. Otóż na zawartość przedmiotu intencjonalnego składają się określenia jakościowe, formalne oraz – i to jest teraz szczególnie ważne – „charakter bytowy", tzn. wyznaczony wprost lub tylko domniemany sposób istnienia przedmiotu stanowiącego zawartość. Nie jest to istnienie *sensu stricto* i dlatego słowo istnieje Ingarden ujmuje w cudzysłów:

„Albowiem w swej zawartości przedmiot intencjonalny 'jest' dokładnie taki, jakim jest domniemany, i 'istnieje' w ten sposób, jaki jest mu wyznaczony w akcie go określającym".[25]

[24] Zob. rozdz. *O przedmiocie matematycznym. Część I.*

[25] [Ingarden 1987], t. II, cz 1, s. 201; zob. także [Ingarden 1988], §33.

W powieści Nabokova nie ma zdania mówiącego wprost, że Lolita jest realnym przedmiotem. Jej realność jest domniema przez to, że stanowi ona element świata, który jest domniemany jako realny. Pamiętając, że w *Sporze* wyróżnione są trzy zasadnicze sposoby istnienia, zawartość może być domniemana jako przedmiot istniejący realnie, idealnie lub intencjonalnie.

6.1. „Czysto intencjonalny przedmiot nie jest w ścisłym sensie 'określony' co najmniej co do swej zawartości".[26]

Dopowiedzmy: niedookreślony jest ten przedmiot, który występuje w zawartości przedmiotu intencjonalnego, natomiast w uposażeniu materialnym przedmiotu intencjonalnego jako takiego nie ma żadnych „miejsc niedookreślenia":

„w swej strukturze intencjonalnej spełniają one i tę zasadę [ontologiczną zasadę wyłączonego środka – P.B.]; inaczej mówiąc: w strukturze intencjonalnej przedmiotów czysto intencjonalnych nie znajdujemy żadnych miejsc niedookreślenia".[27]

Dla kontrastu, aby uwyraźnić schematyczność przedmiotu intencjonalnego, wskażemy dwa istotne momenty budowy przedmiotu realnego. Otóż do istoty przedmiotu realnego należy to, że jest on (1) wszechstronnie i (2) jednoznacznie określony.

(Ad 1.) Wszechstronnie, czyli „pod każdym możliwym dla niego względem". Jeśli $J_1$, $J_2$, ... są gatunkami jakości, które „mogą występować w przedmiocie realnym", to w przedmiocie tym muszą występować jakieś odmiany $j_1$, $j_2$, ... tych gatunków, gdzie $j_i \in J_i$. Gatunków $J_i$ jest – zdaniem Ingardena – nieskończenie wiele, a ponadto są one parami rozłączne. Przyjmujemy, że *po stronie* przedmiotu $P$ gatunkom $J_1$, $J_2$, ... odpowiadają aspekty $A_1$, $A_2$, ...

Wyjaśnienia domaga się jeszcze zwrot „pod każdym możliwym względem".

(Ad 2) Jakości zrealizowane w przedmiocie występują w „najniższej odmianie gatunkowej", co znaczy, że nie mogą być dalej różnicowane. Gdy przedmiotowi realnemu przysługuje np. zieleń, to jest to zieleń określonego rodzaju (powiedzmy zieleń Veronese'a), o określonej jasności i określonym nasyceniu.

Odpowiednio miejsca niedookreślenia są dwojakiego rodzaju. (1) Przedmiot w ogóle nie jest określony pod pewnym względem. Nic na przykład nie jest powiedziane o uszach Lolity, co jest znamienne o tyle, że spotykając

[26] [Ingarden 1988], s. 186.
[27] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 207.

ją po latach Humbert Humbert notuje: „Nowa, spiętrzona fryzura, nowe uszy".[28] Ale uszy człowieka nie rosną tak bardzo, aby w ciągu trzech lat stały się większe, czy zmieniły kształt. Zmieniła się twarz Lolity i na jej nowym obliczu uwydatniły się uszy, w zasadzie te same uszy sprzed trzech lat. Ale jakie one właściwie są? Małe? Duże? Odstające? Przylegające? Wąskie? Zaokrąglone? Jaki jest ich płatek i czy w ogóle mają jakiś płatek? W powieści nic nie jest na ten temat powiedziane.

(2) Nie każdej przypisanej przedmiotowi „ogólnej" własności przyporządkowana jest odpowiednia konkretna własność. Wiemy, że Lolita ma piegi, lecz nic nie jest powiedziane o ich barwie, możemy jedynie domniemywać, że jest to jakiś odcień brązu (o określonej jasności i nasyceniu).

6.2. Jakie jest źródło wskazanej schematyczności przedmiotu intencjonalnego? Zdaniem Ingardena jest tak, po pierwsze, dlatego, że zawartość przedmiotu intencjonalnego ma tylko te własności, które zostały przypisane jej przez autora i zostały zapisane w tekście:

„Przedmiot czysto intencjonalny wykazuje w swej zawartości te i tylko te własności, resp. momenty, jakie zostały ustalone w projektującym go intencjonalnie tworze intencyjnym (akcie mniemania, w tekście językowym itp.)".[29]

Po drugie, „charakter bytowy" wyznacza aspekty przedmiotu – *miejsca*, w których przedmiot o danym sposobie istnienia powinien być określony:

„Wszędzie tam, gdzie *de iure*, wobec przypisanych mu *explicite* 'ogólnych' albo indywidualnych własności i momentów 'winien by posiadać' pewne własności, ale ich faktycznie nie posiada, występuje w jego zawartości 'miejsce niedookreślenia'".[30]

Co jest punktem odniesienia dla owego „'winien by posiadać' pewne własności"? Otóż przedmiot „powinien" posiadać pewne własności

„jeżeli miałyby one występować w przedmiocie samoistnym";[31]

dodajmy: w odpowiednim (w zależności od domniemanego sposobu istnienia) przedmiocie samoistnym, tj. istniejącym albo realnie, albo idealnie.

Uwzględniając tylko dobór cech przypisanych Lolicie nie ma jeszcze podstaw do wyznaczania jakichkolwiek luk, jakichkolwiek miejsc niedookreśle-

[28] [Nabokov 1991], s. 301.
[29] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 205.
[30] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 205.
[31] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 204.

nia. Dopiero wtedy, gdy uwzględni się „roszczenie" Lolity do bycia przedmiotem realnym można uznać niekompletność jej określenia.[32] Uszy jakiejś realnej Lolity są określone pod każdym względem, bo – powiedzmy to wyraźnie – w ontologii Ingardena uszy każdej realnej postaci są *ex definitione* określone pod każdym względem. Przedmiot realny w ontologii Ingardena jest rozumiany, jako określony pod każdym względem, ale trzeba jeszcze dodać: pod każdym możliwym dla tego przedmiotu względem.

Reasumując: dopiero z uwagi na „charakter bytowy" zawartości można wyznaczać miejsca niedookreślenia przedmiotu intencjonalnego.

**7.** Dlaczego w każdym przedmiocie intencjonalnym muszą wystąpić miejsca niedookreślenia?

Przedmiot realny ma nieskończenie wiele własności i w *Sporze* jest to wyraźnie powiedziane. Przedmiot domniemany jako realny musiałby zatem mieć nieskończenie wiele cech, natomiast w skończonej ilości aktów intencyjnych można ich wyznaczyć tylko skończenie wiele. To są pewniki ontologii Ingardena.

Zawartość przedmiotu intencjonalnego jest wyznaczona w dziele literackim na dwa sposoby: przez pełne zdania oraz przez nazwy. Zdania wyznaczają stany rzeczy, a pośrednio własności przedmiotu. W ten sposób skończenie wiele zdań może wyznaczać tylko skończenie wiele cech.[33] Forma przedmiotu wyznaczonego przez nazwę jest tylko schematem formy przedmiotu indywidualnego i jako schemat „nie może być nigdy w pełni wypełniona przez materialne momenty". Nazwa nigdy nie wyznacza nieskończenie wielu cech, zdecydowana większość jest tylko współdomniemana jako jakaś (nieokreślona) własność z zakresu możliwych własności określonego rodzaju.[34]

Ingarden nie twierdzi, że w ogóle nie jest możliwe intencjonalne wyznaczenie konkretnej jakości. Wręcz przeciwnie, schematyczność rysuje się przez kontrast, w zestawieniu z własnościami, które są wyznaczone jednoznacznie. Miejsca niedookreślenia muszą wystąpić z uwagi na opozycję: nieskończoność zbioru cech przedmiotu samoistnego – skończoność zbioru cech wyznaczonych przez tekst. Jeżeli zawartość przedmiotu intencjonalnego jest domnie-

[32] Zob. „Przedmiot taki [intencjonalny – P.B.] jawi się jako schematyczny właśnie dzięki umieszczeniu go w odpowiedniej relacji dzięki [...] 'niedopowiedzeniu'. Jeśliby nie brało się takiej relacji pod uwagę, należałoby myślenie o przedmiotach intencjonalnych (m.in. przedmiotach przedstawionych) ograniczyć do tego jedynie, co jest w nich dane, nie konstruując w ogóle pojęcia elementu, który nie jest dany, ale mógłby czy powinien być dany" [Bartoszyński 1982], s. 184.

[33] Zob. [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 205–206.

[34] Zob. [Ingarden 1988], s. 319–322.

mana jako przedmiot realny, to muszą tam wystąpić miejsca niedookreślenia pierwszego rodzaju:

$$\exists J \forall j \in J[\neg(w_j(P))];$$

zawartość przedmiotu $P$ w ogóle nie jest określona pod pewnym względem, nie jest określona z uwagi na aspekt $A$, który odpowiada gatunkowi $J$.

**8.** Miejsca niedookreślenia zalicza Ingarden do istoty przedmiotu intencjonalnego i dlatego chce wykazać, że muszą one wystąpić w każdym takim przedmiocie. W jego argumentacji decydujące jest przeciwstawienie: nieskończenie wiele własności przedmiotu samoistnego – skończenie wiele zdań dzieła literackiego. Dychotomii tej nie może przekroczyć żadna, jakkolwiek rozbudowana powieść.

Stanowisko to będzie jednak mniej oczywiste, gdy pójdziemy w przeciwnym kierunku i rozważymy dzieło, w którym charakterystyka przedmiotu występującego w zawartości jest na tyle uboga, że *nieczytelny* staje się „charakter bytowy", lub nawet więcej: gdy intencją autora jest zatarcie, czy wręcz usunięcie owego „charakteru". O przykłady nie jest tu trudno.[35]

W ten sposób nie tyle kwestionujemy ustalenia Ingardena, ile raz jeszcze pokazujemy, niejako od strony negatywnej, że decydującą rolę przy wyznaczaniu miejsc niedookreślenia odgrywa „charakter bytowy" przedmiotu stanowiącego zawartość przedmiotu intencjonalnego.

**9.** W podsumowaniu charakterystyki przedmiotu intencjonalnego podanej w *Sporze* znajdujemy zdanie stanowiące punkt wyjścia tego rozdziału:

„W następstwie tego czujemy się błędnie upoważnieni do rozciągania ważności zasady wyłączonego środka w interpretacji ontologicznej na wszystkie bez wyjątku przedmioty indywidualne. W rzeczywistości jednak zasada wyłączonego środka obowiązuje jedynie w odniesieniu do indywidualnych przedmiotów samoistnych, a przedmioty intencjonalne w swej zawartości nie podpadają pod jej zakres. Natomiast w swej strukturze intencjonalnej spełniają one i tę zasadę".[36]

[35] Zob. „Często przeciwstawia się [...] przedmioty przedstawione – bogato wyposażone w różne cechy, a więc poniekąd ubogie w miejsca niedookreślenia, przedmiotom zaledwie naszkicowanym, a więc jawnie schematycznym. Ale przeciwstawienie takie wydaje się o tyle wątpliwe, że bogate wyposażenie jakościowe aktywizuje jakby miejsca niedookreślenia – nie rzucające się w oczy w wypadku szkicowego ubóstwa cech przedmiotu. Tak więc ilość miejsc niedookreślenia dostrzeganych w dziele literackim zdaje się zależeć nie tylko od konfrontacji schematu ze wzorcem, lecz i od absolutnej ilości elementów danych w tym dziele jako wypełnione. Ilość 'luk' zdaje się rosnąć wraz z bogactwem nacechowania" [Bartoszyński 1982], s. 187.

[36] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 207.

9.1. Przedmiot intencjonalny ma – jak pamiętamy – dwustronną budowę, z tym zaś wiąże się podział przysługujących mu własności na dwie grupy: własności charakteryzujące przedmiot intencjonalny jako taki oraz własności przypisane przedmiotowi stanowiącego zawartość. Przyjmujemy za Ingardenem, że przedmiot intencjonalny jako taki („w swej strukturze intencjonalnej") „spełnia" ontologiczną zasadę wyłączonego środka.[37] Natomiast przedmiot stanowiący zawartość „nie podpada pod jej zakres". Dlaczego?

Nie jest tak, że uszy Lolity są wąskie lub uszy Lolity nie są wąskie. Weźmy bowiem pierwszy człon alternatywy: „uszy Lolity są wąskie". W powieści nie jest to powiedziane, a Lolita ma tylko te cechy, które są jej przypisane w tekście.

Weźmy drugi składnik: „uszy Lolity nie są wąskie". Jest to negatywny stan rzeczy. Jego warunkiem koniecznym jest – przypomnijmy – że w danym przedmiocie zachodzi jakiś pozytywny stan rzeczy, od którego ten negatywny mógłby się *odbić*.[38] Aby mógł zajść ten negatywny stan rzeczy, to uszy Lolity musiałyby być jakoś określone pod względem kształtu, co znaczy, że w powieści musiałoby być powiedziane, że ze względu na kształt są one takie lub inne. Ale niczego takiego w tekście nie ma, dlatego nie zachodzi warunek konieczny negatywnego stanu rzeczy „uszy Lolity nie są wąskie".[39]

9.2. Zdawać by się mogło, że zostosowany tu pomysł mógł być użyty w dużo prostszej sytuacji. Weźmy indywidualny przedmiot idealny, np. trójkąt równoboczny o ustalonym boku. Ingarden z pewnością by przyznał, że temu trójkątowi nie przysługuje żadna barwa. Dla uzasadnienia wzoru (4) można by zatem podać taki przykład: „nie jest tak, że trójkąt równoboczny o ustalonym boku jest czerwony lub nie jest czerwony". Pierwszy człon alternatywy jest oczywisty (w ramach ontologii Ingardena). Ale nie jest też tak, że zachodzi negatywny stan rzeczy „trójkąt równoboczny o ustalonym boku nie jest czerwony", a to dlatego, że przedmiot idealny nie jest w ogóle określony co do koloru i nie zachodzi warunek konieczny tego negatywnego stanu rzeczy.

Dlaczego zatem Ingarden nie podaje takiego prostego, zdawałoby się, kontrprzykładu? Co więcej, w *Sporze* jest wyraźnie powiedziane, że ontologiczna zasada wyłączonego środka zachowuje ważność w odniesieniu do indywidualnych przedmiotów idealnych.[40] Odpowiadając zwrócimy uwagę

[37] Zob. wyżej pkt. 6.1.

[38] Zob. wyżej pkt. 3.5.

[39] Inna, bardziej prostolinijna odpowiedź mogłaby być taka, że dla żadnej własności $w$ nie zachodzi – tj. w tekście nic na ten temat nie jest powiedziane – $non(w(P))$.

[40] Zob. „zasada wyłączonego środka obowiązuje jedynie w odniesieniu do indywidualnych przedmiotów samoistnych" [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 207.

na wcześniej zaznaczony już moment: przedmiot realny jest określony „pod każdym możliwym dla niego względem".[41] Trop ten znajduje potwierdzenie w innym fragmencie *O dziele literackim*:

„bytowo autonomiczne stany rzeczy [...] muszą podlegać prawom istotnościowym panującym w dziedzinie przedmiotowej, do której należy materia danego stanu rzeczy".[42]

Przyjmujemy następującą wykładnię tych słów: sfera czystych jakości idealnych jest podzielona na dziedziny odpowiadające dziedzinom bytowym: temu, co istnieje realnie, idealnie i ewentualnie temu, co istnieje intencjonalnie (chodziłoby tu o jakości określające przedmiot intencjonalny jako taki). Gdy każdej dziedzinie bytowej odpowiada inna klasa jakości, to wówczas otrzymujemy dwa prawa wyłączonego środka obowiązujące odpowiednio w dziedzinie przedmiotów realnych ($Real$) oraz idealnych ($Ideal$):

$$\forall P \in Real \forall j \in J_{Real}[w_j(P) \vee non(w_j(P))], \tag{5}$$

$$\forall P \in Ideal \forall j \in J_{Ideal}[w_j(P) \vee non(w_j(P))], \tag{6}$$

gdzie $J_{Real}$ oraz $J_{Ideal}$ oznaczają odpowiednio dziedzinę jakości specyficznych dla przedmiotów realnych i dziedzinę jakości specyficznych dla przedmiotów idealnych.

Następnie, w zależności od „charakteru bytowego" zawartości przedmiotu intencjonalnego zaprzeczenie prawa wyłączonego środka przyjmie postać:

$$\exists P \in Int \exists j \in J_{Real}[\neg(w_j(P) \vee non(w_j(P)))], \tag{7}$$

$$\exists P \in Int \exists j \in J_{Ideal}[\neg(w_j(P) \vee non(w_j(P)))], \tag{8}$$

gdzie $Int$ oznacza dziedzinę przedmiotów intencjonalnych, zaś $w(P)$ może oznaczać własność zarówno przedmiotu intencjonalnego jako takiego, jak własność przedmiotu stanowiącego zawartość przedmiotu intencjonalnego.

Powyższe wzory można jeszcze uzupełnić rozpatrując przypadek, w którym do zawartości przedmiotu intencjonalnego należy przedmiot, któremu przypisane jest istnienie intencjonalne.[43] Można wówczas przyjąć, że w zawartości tego drugiego przedmiotu intencjonalnego musi wystąpić przedmiot realny lub idealny i taki *podwójnie złożony* przedmiot intencjonalny podlega prawu (7) lub (8). Taki sam wynik otrzymamy także wtedy, gdy dopuścimy iterowanie operacji zawierania się jednego przedmiotu intencjonalnego w drugim.

[41] [Ingarden 1988], s. 317.
[42] [Ingarden 1988], s. 409.
[43] Zob. [Inagrden 1987], t. II, cz. 1, s. 202–203.

Zupełnie nowa sytuacja powstanie natomiast wtedy, gdy w zawartości przedmiotu intencjonalnego wystąpi przedmiot, którego charakter bytowy nie jest ustalony, a tak właśnie jest, gdy pytamy o sposób istnienia przedmiotu matematycznego.

**10.** Podsumowując, możemy podać następującą definicję miejsca niedookreślenia pierwszego rodzaju.[44] Niech $P$ będzie przedmiotem intencjonalnym. Gdy „charakterem bytowym" zawartości przedmiotu $P$ jest istnienie realne, to:

Aspekt $A$ jest miejscem niedokreślenia przedmiotu $P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists J \subset J_{Real} \forall j \in J[\neg(w_j(P))]$ i $A$ odpowiada gatunkowi $J$.

Gdy „charakterem bytowym" zawartości przedmiotu $P$ jest istnienie idealne, to:

Aspekt $A$ jest miejscem niedokreślenia przedmiotu $P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists J \subset J_{Ideal} \forall j \in J[\neg(w_j(P))]$ i $A$ odpowiada gatunkowi $J$.

Chcąc zdefiniować miejsca niedookreślenia drugiego rodzaju musielibyśmy doprecyzować kategorię „jakość najniższej odmiany gatunkowej".

10.1. Z przedstawionej analizy nie wynika, jak należy potraktować taki – hipotetyczny – przypadek, gdy w tekście, który wyznacza pewien przedmiot intencjonalny $P$ jest wprost powiedziane, że przedmiotowi $P$ nie przysługuje pewna własność, tj. że zachodzi $non(w_j(P))$, gdzie $j \in J$ i gatunek $J$ jest wyznaczone przez „charakter bytowy" przedmiotu $P$. Przyjmując, że gatunkowi $J$ odpowiada aspekt $A$ przyjmujemy, że $A$ nie jest wówczas miejscem niedookreślenia przedmiotu $P$.

10.2. W literaturze przedmiotu pojęcie miejsce niedookreślenia jest interpretowane na kilka sposobów; pogrupujemy i opiszemy je za pomocą przyjętych przez nas pojęć i oznaczeń symbolicznych.

(1) Niedopowiedzenie: charakter bytowy przedmiotu intencjonalnego to istnienie realne, przedmiot realny ma nieskończenie wiele własności, a tekst może wyznaczać tylko skończenie wiele własności.[45]

Nie jest to właściwie interpretacja, a streszczenie odpowiednich wypowiedzi Ingardena, zaznaczamy to jednak jako odrębne stanowisko, bo są

[44] Zob. wyżej pkt. 6.1.

[45] Zob. [Markiewicz 1974], [Mitscherling 1997], [Mitscherling 2001], [Strelka 1990], [Thomasson 2003].

też i takie komentarze, które w charakterystyce przedmiotu intencjonalnego w ogóle pomijają miejsca niedookreślenia.[46]

(2) „Prosty brak":

„miejsce niedookreślenia jest brakiem pewnych aktualnie występujących momentów przedmiotowych".[47]

Jest to właściwie powtórzenie uwagi Ingardena, w której miejsce niedookreślenia przedmiotu pierwotnie intencjonalnego, i co więcej: *in statu nascendi*, porównywane jest ze zmienną zawartości idei:

„'Zmienna' nie jest prostym brakiem pewnych momentów przedmiotowych, jak to właśnie zachodzi w wypadku miejsca niedookreślenia".[48]

Ingarden pisze wówczas, że miejsce niedookreślenia w odróżnieniu od zmiennej zawartości idei „może być wypełnione".[49] Otóż wskazana tu potencjonalność – „może być wypełnione" – nie jest w naszej interpretacji charakterystyką ani miejsca niedookreślenia, ani przedmiotu (pochodnie) intencjonalnego. Miejsce niedookreślenia nie może być wypełnione w tym sensie, że zestawiając przedmiot intencjonalny, w którym pewne miejsce jest niedookreślone i przedmiot intencjonalny, w którym to miejsce zostało wypełnione, otrzymujemy dwa różne przedmioty – na tym właśnie polega ontologiczna zasada tożsamości przedmiotu intencjonalnego; na tym też polega różnica między dziełem literackim i jego konkretyzacją.[50]

(3) Brak własności i odpowiedniej własności negatywnej:

$$\exists w[\neg(w(P)) \wedge \neg(non(w(P)))].$$

[46] Zob. [Biłat 2003], [Gierulanka 1962], [Smith 1975], [Smith 1976].

[47] [Rygalski 2001], s. 96; zob. także [Sosnowski 2001], [Tyszczyk 2007], s. 52–53.

[48] [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 230. Jest jednak różnica między „brakiem pewnych aktualnie występujących momentów" i „brakiem pewnych momentów".

[49] Zob. [Ingarden 1987], t. II, cz. 1, s. 231.

[50] K woli jasności dopowiedzmy, że także w konkretyzacji muszą wystąpić miejsca niedookreślenia. Ingarden pisze wprost: „przedmioty przedstawione występują w konkretyzacji nieraz w o wiele pełniejszej postaci niż ta, którą posiadają *de facto* w samym dziele. Ich ukonstytuowanie się jest tu doprowadzone jakby o krok dalej. Zasadniczo jednak w żadnej konkretyzacji nie może dojść do ukończenia ich ukonstytuowania w tym sensie, by nie pozostawało już w przedmiotach przedstawionych żadnego miejsca niedookreślenia. Do istoty czysto intencjonalnych przedmiotów bowiem należy [...] to, że w żadnym skończonym szeregu poszczególnych ukonstytuowań nie mogą one dojść do pełnego ukonstytuowania" [Ingarden 1988], s. 421–422. Por. [Tyszczyk 2007], s. 52.

„W przypadku przedmiotów samoistnych jest tak, że dla każdej własności orzekalnej o przedmiocie, przedmiot ów posiada tę własność lub jej nie posiada. Z kolei w przypadku przedmiotów czysto intencjonalnych jest tak, że nie o każdej takiej jakości da się powiedzieć, czy przynależy czy też nie przynależy do zawartości treściowej danego przedmiotu intencjonalnego. Miejsca niedookreślenia w zawartości treściowej danego przedmiotu intencjonlanego byłyby kategorią zrelatywizowaną zawsze do pewnej jakości".[51]

Stanowisko to ma istotne komponenty epistemologiczne; gdy wypreparujemy zeń część ontologiczną, to otrzymamy: własności, jakie mogą przysługiwać przedmiotowi („własności orzekalne") nie zależą od „charakteru bytowego", wśród nich jest taka, która nie przysługuje przedmiotowi i – acz w tej kwestii stanowisko cytowanego autora nie jest jasne – odpowiednia własność negatywna też nie przysługuje przedmiotowi.[52]

(4) Brak własności realnej i odpowiedniej własności negatywnej:

$$\exists j \in J_{Real}[\neg(w_j(P)) \wedge \neg(non(w_j(P)))].$$

„Polega ona [niezupełność zawartości – P.B.] na tym, że liczba własności przypisanych przedmiotowi fikcyjnemu jest zasadniczo skończona, a co za tym idzie, przedmiot ten pozostaje niedookreślony w wielu miejscach – dla pewnych własności, ani ta własność, ani własność dopełniająca nie są jemu przypisane. [...] Inaczej sprawa przedstawia się z przedmiotami realnymi – każdy z nich jest zupełny w swoim uposażeniu, a więc dla każdej własności, albo ona, albo własność dopełniająca jest posiadana przez przedmiot realny".[53]

Przedmiot jest domniemany jako realny, dzięki czemu ustalony jest zakres własności, jakie mogą wystąpić w zawartości; symbol $non(w_j(P))$ oznacza tu „własność dopełniającą".

[51] [Krysztofiak 1999], s. 58–59; zob. także [Szczepańska 1989], s. 62. W innym miejscu, autor ten relatywizuje pojęcie miejsce niedokreślenia także do „teorii i jej modelu": „kategoria miejsca niedookreślenia służyłaby do wyrażenia informacji, że obiekt na gruncie pewnej teorii i jej modelu posiada taką własność, że pewne jego cechy w obrębie danego modelu są niewyrażalne logicznie (tzn. nie da się udowodnić na gruncie danej teorii ani tego, że obiekt posiada daną własność, ani tego, że jej nie posiada)" [Krysztofiak 2002], s. 144.

[52] Przyjmujemy, że „jakość" to synonim „własności orzekalnej" – z książki [Krysztofiak 1999] nie wynika, że autor odróżnia te kategorie.

[53] [Paśniczek 1984], s. 29; zob. także [Gurczyński 2004].

(5) „Nie wypełnione miejsce":

„Tylko te jego [przedmiotu intencjonalnego – P.B.] momenty są określone, które zostały intencjonalnie wyznaczone przez odpowiednie treści przynależnego aktu. Owe nie wypełnione miejsca nazywa Ingarden 'miejscami niedookreślenia'".[54]

Zakres „nie wypełnionych miejsc" nie zależy tu od „charakteru bytowego". Z drugiej strony, miejsce niedookreślenia, to jednak „miejsce" – w naszej interpretacji: aspekt – a nie własność, jak w interpretacji (3) i (4).

(6) Brak własności z dziedziny własności wyznaczonej przez domniemany sposób istnienia:

$$\exists j \in J_{Real}[\neg(w_j(P))],$$

$$\exists j \in J_{Ideal}[\neg(w_j(P))].$$

„Odróżniając przedmioty indywidualne od przedstawionych w dziele, elementy tych ostatnich, które nie zostały pozytywnie wyznaczone [...] nazwał Ingarden miejscami niedookreślenia";[55]

„chodzi tu o opis różnicy strukturalnej (czy relacji) zachodzącej między przedmiotami realnymi a przedmiotami czysto intencjonalnymi [...]. Wydaje się wszakże, że (i tu wybiegamy dość wyraźnie poza tezy Ingardena) skoro pojęcie miejsc niedookreślenia powstaje na skutek konfrontacji obu przedmiotów, to jedynie usytuowanie przedmiotu intencjonalnego na tle przedstawienia odpowiednio dobranego przedmiotu realnego (a w każdym razie nie-intencjonalnego) rodzi przeświadczenie o istnieniu tzw. 'luk' w przedmiocie intencjonalnym".[56]

W zapisie symbolicznym jest tak, że „elementy tych ostatnich" to własności, ale można również przyjąć, że są to aspekty w ustalonym przez nas rozumieniu, chodzi tu bowiem o to, czy przez „usytuowanie przedmiotu intencjonalnego na tle przedstawienia odpowiednio dobranego przedmiotu realnego" uchwycimy aspekt, czy własność przedmiotu. Po drugie, miejsce niedookreślenia wiązane jest tu jedynie z własnością *pozytywną* $w_j(P)$.

W przyjętej przez nas interpretacji, odróżniając miejsca niedookreślenia pierwszego i drugiego rodzaju, własność negatywna $non(w_j(P))$ wyznacza już aspekt przedmiotu; interpretacje (3), (4) i (6) próbują uchwycić miejsce niedookreślenia drugiego rodzaju.

[54] [Poczobut 2000], s. 228.
[55] [Bartoszyński 2001(b)], s. 248.
[56] [Bartoszyński 1982], s. 184.

10.3. Wróćmy teraz do stawianej na początku tego rozdziału kwestii: czy grupa krwi stanowi miejsce niedookreślenia tytułowej postaci poematu *Pan Tadeusz*? Po pierwsze, w przyjętej przez nas interpretacji miejscem niedookreślenia nie jest własność – konkretna grupa krwi: *0*, *A*, *B*, *AB*, $Rh^+$, $Rh^-$ – ale aspekt: grupa krwi. Po drugie, zważywszy, że utwór *Pan Tadeusz* powstawał w określonym czasie historycznym, trudno przy ustalaniu miejsc niedookreślenia nie podjąć pytania, czy Adam Mickiewicz w ogóle mógł uwzględnić taki aspekt. Tej kwestii nie będzie jednak ostatecznie rozstrzygać, bo w przypadku przedmiotu matematycznego natrafiamy na zupełnie inny problem.

# Ontologia bez czystych jakości idealnych

**11.** Ingardena teoria przedmiotu intencjonalnego jest związana z koncepcją czystych jakości idealnych w trzech punktach.

(1) Intersubiektywność przedmiotu intencjonalnego gwarantują – zdaniem Ingardena – z jednej strony podstawa materialna przedmiotu intencjonalnego, tj. konkretne egzemplarze książki, z drugiej – intersubiektywność języka: znaczenia słów, sensy zdań, czy zespołów zdań. Ale w swoich ustaleniach Ingarden poszedł jeszcze dalej i za pomocą czystych jakości idealnych oraz tajemniczej kategorii pojęć idealnych próbował wyjaśnić intersubiektywność języka. Z tej kontrowersyjnej części argumentacji można zrezygnować, wystarczy uznać fakt intersubiektywności języka, a zawiesić pytanie dlaczego tak jest.

W istocie stanowisko Ingardena dotyczące podstaw intersubiektywności języka zmieniało się. W roku 1930, w przedmowie do *Das literarische Kunstwerk* pisał:

„Wywody moje są zgodne z wypowiedzianym przez Husserla poglądem w *Formale und transcendentale Logik*, że znaczenia słów, zdania i twory znaczeniowe wyższego rzędu wypływają z subiektywnych operacji świadomościowych. Nie są więc żadnymi przedmiotami idealnymi w tym sensie, w jakim pojmował je Husserl w *Logische Untersuchungen*. [...] Husserl uważa teraz [tj. w *Formale und transcendentale Logik* – P.B.] wszystkie przedmioty, które poprzednio uznawał za idealne (w tradycyjnym sensie) – za szczególnego rodzaju twory intencjonalne [...] ja natomiast i dziś utrzymuję w mocy ścisłą idealność rozmaitych przedmiotów idealnych (idealnych pojęć, idealnych przedmiotów indywidualnych, idei i jakości idealnych) i widzę nawet w idealnych pojęciach bytowy fundament, który umożliwia przedmiotom tylko intencjonalnym intersubiektywną identyczność i bytowo hetoronomiczny sposób istnienia".[57]

[57] Zob. [Ingarden 1988], s. 9–10.

A w roku 1958, w przedmowie do pierwszego wydania *O dziele literackim*, w związku z wprowadzonymi zmianami pisał tak:

„Zachowałem jednak i tam dawną redakcję, gdzie rozwiązanie niegdyś przeze mnie podane nie jest dla mnie w tej chwili przekonywające, ale gdzie nie zdołałem znaleźć bardziej zadowalającego rozwiązania. Tak np. wątpliwości budzi we mnie §66, omawiający obiektywne podstawy identyczności sensu zdań w dziełach literackich. W szczególności nie byłbym teraz skłonny przyjmować istnienia 'idealnych pojęć'. Nie widzę jednak innej koncepcji, która zdołałaby tamtą zastąpić, nie budząc ze swej strony istotnych wątpliwości".[58]

Powtórzmy, można pominąć uzasadnienia i poprzestać na uznaniu faktu intersubiektywności języka.[59]

(2) Własność przedmiotu indywidualnego, czy to realnego, czy idealnego jest rozumiana *via* kategoria konkretyzacji.[60] Aby takie rozumienie przetransponować na własność przedmiotu intencjonalnego jako takiego, należy przyjąć odrębną dziedzinę czystych jakości idealnych, specyficzną dla przedmiotów intencjonalnych, $J_{Int}$. W przypadku dzieła literackiego własnościami przedmiotu intencjonalnego jako takiego są – zdaniem Ingardena – własności takie jak to, że dane dzieło jest dziełem określonego autora, że powstało w takiej, a nie innej aurze literackiej i historycznej, że pierwowzorem głównego bohatera jest taka to a taka realna postać. Trudno przyznać, że są to konkretyzacje, jakkolwiek rozumianych, jakości idealnych. W istocie Ingarden stosuje tu schemat: zdaniu odpowiada stan rzeczy, a więc przysługiwanie pewnej własności. Stąd zdaniom odnoszącym się do przedmiotu intencjonalnego jako takiego po stronie przedmiotu winny odpowiadać pewne własności.

Ingarden wymienia też dwa typy własności, które występują w każdym przedmiocie intencjonalnym jako takim, są to: posiadanie określonej zawartości oraz przynależenie do siebie zawartości i struktury intencjonalnej. „Własności" te można jednak równie dobrze uznać – i w istocie tak postąpiliśmy opisując przedmiot intencjonalny – za charakterystykę formy

[58] Zob. [Ingarden 1988], s. 14.

[59] Zob. „Wszelako Ingarden odrzucił także koncepcję Edmunda Husserla, w myśl której znaczenia są przedmiotami idealnymi lub tak czy inaczej rozumianymi ideami. Ingarden podkreślał, że główny argument przeciwko tej teorii znaczenia polega na wskazaniu na zmienność znaczeń, a jest to nie ich przypadłość, lecz atrybut konieczny" [Woleński 2001], s. 135.

[60] Zob. [Rygalski 1993].

przedmiotu intencjonalnego, a forma, w rozumieniu Ingardena, to coś, co jest radykalnie niejakościowe.

W przypadku zawartości przedmiotu intencjonalnego nie ma miejsca żadna konkretyzacja – na tym wszak polega niesamoistność – tym niemniej Ingarden stosuje ten sam schemat: jeśli pewne zdania wyznaczają, konstytuują zawartość, to po stronie zawartości (przedmiotu stanowiącego zawartość) odpowiadają im pewne własności.

(3) Zakres jakości jakie mogą być przypisane zawartości zależy od „domniemanego sposobu istnienia", od „charakteru bytowego". W tym sensie miejsca niedookreślenia przedmiotu intencjonalnego związane są, po pierwsze, z podziałem sfery czystych jakości idealnych na dziedzinę jakości specyficznych dla przedmiotów realnych i dziedzinę jakości specyficznych dla przedmiotów idealnych, po drugie, z podziałem każdej z tych dziedzin na gatunki.

11.1. W rozprawie *Stetigkeit und irrationale Zahlen* są owszem zdania mówiące o sposobie istnienia. Czytamy:

„Za każdym więc razem, gdy dany jest przekrój $(A_1, A_2)$, który nie jest wyznaczony przez żadną liczbę wymierną, stwarzamy nową liczbę, liczbę niewymierną $\alpha$, którą traktować będziemy jako całkowicie wyznaczoną przez ten przekrój".[61]

„Podczas gdy obie te operacje [dodawanie i mnożenie liczb naturalnych – P.B.] są zawsze wykonalne, to operacje do nich odwrotne, odejmowanie i dzielenie, wykonalne są tylko w ograniczonym zakresie. Nierozstrzygniętym pozostaje, jakie mogły być tego powody, jakie porównania czy analogie z doświadczeniem czy oglądem zmysłowym mogły do tego doprowadzić; pozostaje jednak faktem, że to ograniczenie w wykonalności tych niebezpośrednich operacji jest za każdym razem powodem pewnego nowego aktu twórczego; umysł ludzki stworzył więc liczby ujemne i ułamki i przez to osiągnął w systemie liczb wymiernych pewien instrument nieskończenie większej doskonałości".[62]

Gdyby literalnie potraktować rozstrzygnięcie Ingardena, to musielibyśmy przyjąć, że każda liczba niewymierna jest „stworzona" oraz, że „system liczb wymiernych" został stworzony przez człowieka. Ale podobnie, jak wcześniej przyjęliśmy, że nie jest cechą porządku ciągłego to, iż został on wymyślony

[61] [Dedekind 1872], s. 143.
[62] [Dedekind 1872], s. 139.

przez Dedekinda 24 listopada 1858 roku,[63] tak też i w tym miejscu przyjmujemy, że do zawartości bynajmniej nie należy to, co na temat istnienia liczb rzeczywistych sądził Dedekind. Jest tak już chociażby dlatego, że to, co zdaniem Dedekinda jest „stwarzane", nie jest przedmiotem w przyjętym przez nas rozumieniu – za przedmiot uznaliśmy nie liczbę rzeczywistą, ale ciało liczb rzeczywistych.

W istocie jest tak, że o tym jakie własności można przypisywać liczbom rzeczywistym decyduje nie domniemany sposób istnienia, ale odpowiednia teoria matematyczna: o liczbach rzeczywistych, można orzekać to, na co pozwalają teorie matematyczne. W ten sposób własność przedmiotu matematycznego nie jest w ogóle związana z jakkolwiek rozumianymi czystymi jakościami idealnymi.

Takie rozwiązanie przyjęliśmy już wcześniej, teraz musimy jeszcze powiązać je z przyjętym rozumieniem miejsca niedookreślenia. Tak więc aspekt $A$ przedmiotu $P$ wiążemy teraz nie z gatunkiem $J$, ale z klasą możliwych własności $\{w_t^A\}_{t\in T}$, przez własności zaś rozumiemy własności, które mogą być przypisywane przedmiotowi w pewnej teorii. Ostatecznie:

Aspekt $A$ jest miejscem niedookreślenia przedmiotu $P$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej własności $w_t^A$ z zakresu $\{w_t^A\}_{t\in T}$ nie jest tak, że $w_t^A$ przysługuje $P$, symbolicznie:

$$(\forall w \in \{w_t^A\}_{t\in T})[\neg w(P)].$$

Wróćmy zatem do dwóch przykładów podanych w rozdziale *O przedmiocie matematycznym. Część I*,[64] aby zilustrować to zmodyfikowane rozumienie własności, aspektu oraz miejsca niedookreślenia.

**12.** Przechodzimy teraz z liczbami rzeczywistymi na grunt teorii mnogości.[65] W teorii mnogości każdemu zbiorowi $X$ przypisuje się pewien obiekt: liczbę kardynalną (moc) $\overline{\overline{X}}$. Moc zbioru $\mathbb{N}$ oznacza się jako $\aleph_0$. Każda liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$ jest liczbą kardynalną. Pokazuje się, że $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0$.

W teorii definiowana jest równość liczb kardynalnych i relacja mniejszy-większy oraz pokazuje się, że spełnione jest prawo trychotomii: dla do-

[63] Zob. rozdz. *O przedmiocie matematycznym. Część I*, pkt. 4.1.

[64] Zob. *O przedmiocie matematycznym. Część I*, pkt. 4.3.

[65] Teorię mocy, liczb porządkowych i alefów referujemy na podstawie monografii [Kuratowski, Mostowski 1978]. Jest ona oparta na trochę innym układzie aksjomatów niż ZFC, ale nie ma to znaczenia dla podstawowych w tym miejscu faktów, jakimi są niezależność hipotezy kontinuum i hipotezy Suslina; zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], s. 70. Istotne jest natomiast to, że dzięki aksjomatowi typów relacyjnych wykład Kazimierza Kuratowskiego i Andrzeja Mostowskiego jest bliski oryginalnej teorii mnogości Georga Cantora.

wolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ zachodzi dokładnie jeden ze składników alternatywy:

$$\mathfrak{m} < \mathfrak{n} \vee \mathfrak{m} = \mathfrak{n} \vee \mathfrak{m} > \mathfrak{n}.$$

Gdy $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m}$, to $\mathfrak{m}$ jest nieskończoną liczbą kardynalną.

W teorii definiowane jest dodawanie, mnożenie i potęgowanie liczb kardynalnych, w szczególności dowodzone są prawa:

$$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}}, \qquad (\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}}, \qquad \mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}},$$

gdzie $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ są liczbami kardynalnymi. Pokazuje się, że dla liczb kardynalnych nie zachodzi zgodność porządku z dodawaniem:

$$\mathfrak{m} < \mathfrak{n} \to \mathfrak{m} + \mathfrak{p} < \mathfrak{n} + \mathfrak{p},$$

w szczególności, gdy $\mathfrak{m}$ jest nieskończoną liczbą kardynalną, zaś $n \in \mathbb{N}$, to

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + n = \mathfrak{m} + \aleph_0 = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}.$$

Z operacją zbioru potęgowego związana jest zależność $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$: na mocy aksjomatu przyjmuje się, że dla każdego zbioru $X$ istnieje taki zbiór $\mathcal{P}(X)$, że

$$z \in \mathcal{P}(X) \leftrightarrow z \subset X,$$

następnie pokazuje się, że

$$\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(X)}} = 2^{\overline{\overline{X}}}.$$

12.1. Na mocy aksjomatu wyboru dla każdego zbioru $X$ istnieje co najmniej jedna relacja dobrego porządku $\prec_X$. Parze $(X, \prec_X)$ przypisuje się pewien obiekt: liczbę porządkową $\overline{(X, \prec_X)}$. „Naturalny porządek" $<_N$ w zbiorze $\mathbb{N}$ jest dobrym porządkiem: liczbę porządkową $\overline{(\mathbb{N}, <_N)}$ oznacza się jako $\omega$. Każda liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$ jest liczbą porządkową.

W teorii definiowana jest równość liczb porządkowych i relacja mniejszy-większy oraz pokazuje się, że spełnione jest prawo trychotomii: dla dowolnych liczb porządkowych $\alpha$, $\beta$ zachodzi dokładnie jeden ze składników alternatywy:

$$\alpha \prec \beta \vee \alpha = \beta \vee \alpha \succ \beta.$$

Definiowane jest dodawanie i mnożenie liczb porządkowych. Pokazuje się, że dodawanie nie jest przemienne, np.

$$\omega = 1 + \omega \prec \omega + 1.$$

Pokazuje się, że porządek $\prec$ jest zgodny z dodawaniem:

$$\alpha \prec \beta \to \alpha + \gamma \prec \beta + \gamma,$$

w szczególności dla dowolnej liczby porządkowej $\alpha$ jest $\alpha \prec \alpha + 1$.

Liczba $\omega$ jest najmniejszą liczbą porządkową, która jest większa od każdej skończonej liczby porządkowej, tj. dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest $n \prec \omega$ i dla dowolnej liczby porządkowej $\alpha$ jest: jeżeli $\forall n \in \mathbb{N}[n \prec \alpha]$, to $\omega \preceq \alpha$. Gdy $\omega \preceq \alpha$, to $\alpha$ jest nieskończoną liczbą porządkową.

Pokazuje się, że zachodzą zależności:

$$n \prec \omega = 2 \cdot \omega \prec \omega + 1 \prec \omega + \omega = \omega \cdot 2.$$

12.2. Każdy zbiór liczb porządkowych jest dobrze uporządkowany przez relację $\prec$, w szczególności jest $\xi = \overline{(W(\xi), \prec)}$, gdzie $W(\xi)$ to zbiór liczb porządkowych mniejszych od liczby $\xi$.

Moc liczby porządkowej $\xi$, gdzie $\xi = \overline{(X, \prec_X)}$, to moc zbioru $X$; moc $\xi$ oznacza się jako $\overline{\xi}$, zatem $\overline{\xi} = \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{W(\xi)}}$.

Korzystając z aksjomatu zastępowania pokazuje się, że dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ istnieje zbiór $Z(\mathfrak{m})$ wszystkich liczb porządkowych $\xi$ o mocy nie większej niż $\mathfrak{m}$, tj. $Z(\mathfrak{m}) = \{\xi : \overline{\xi} \leqslant \mathfrak{m}\}$. Pokazuje się, że dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ zachodzi:

$$\mathfrak{m} < \overline{\overline{Z(\mathfrak{m})}}.$$

Przyjmuje się oznaczenie $\Omega = \overline{(Z(\aleph_0), \prec)}$. Pokazuje się, że dla dowolnej liczby porządkowej $\alpha$ zachodzi:

$$\alpha \prec \Omega \leftrightarrow \overline{\alpha} \leqslant \aleph_0,$$

innymi słowy, $\Omega$ jest najmniejszą liczbą porządkową większą od każdej liczby porządkowej mocy nie większej niż $\aleph_0$.

12.3. Liczba początkowa to nieskończona liczba porządkowa $\xi$, która spełnia warunek:

$$\gamma \prec \xi \to \overline{\gamma} < \overline{\xi}.$$

Pokazuje się, że gdy $\mathfrak{m}$ jest nieskończoną liczbą kardynalną, to liczba $\varphi = \overline{(Z(\mathfrak{m}), \prec)}$ jest liczbą początkową i zachodzi $Z(\mathfrak{m}) = W(\varphi)$.

Gdy $\xi$ jest liczbą początkową, to $P(\xi)$ oznacza zbiór takich liczb początkowych $\varphi$, że $\varphi \prec \xi$. Przyjmuje się oznaczenie $\iota(\xi) = \overline{(P(\xi), \prec)}$, a liczbę $\iota(\xi)$ nazywa się indeksem liczby początkowej $\xi$. Jest więc $\iota(\omega) = 0$, $\iota(\Omega) = 1$.

Pokazuje się, że każda liczba porządkowa jest indeksem pewnej liczby początkowej. Przyjmuje się, że $\omega_\alpha$ oznacza liczbę początkową, której indeksem jest $\alpha$, tj. $\iota(\omega_\alpha) = \alpha$. Pokazuje się, że dla dowolnych liczb porządkowych $\alpha,\ \beta$ zachodzi:

$$\alpha \prec \beta \leftrightarrow \omega_\alpha \prec \omega_\beta \leftrightarrow \overline{\omega_\alpha} < \overline{\omega_\beta}.$$

Na mocy definicji dla każdej liczby porządkowej $\alpha$ przyjmuje się:

$$\aleph_\alpha = \overline{\omega_\alpha}.$$

Tak więc $\aleph_0 = \overline{\omega_0} = \overline{\omega}$, $\aleph_1 = \overline{\omega_1} = \overline{\Omega}$. Liczby kardynalne $\aleph_\alpha$ nazywane są alefami.

Dowodzone są twierdzenia:

$$\alpha \prec \beta \to \aleph_\alpha < \aleph_\beta.$$

Nie istnieje taka liczba kardynalna $\mathfrak{m},\ \text{że } \aleph_\alpha < \mathfrak{m} < \aleph_{\alpha+1}$.

Obok zwykłych praw związanych z działaniami na mocach, dla alefów dowodzone są w sposób szczególny pewne dodatkowe prawa, np.:

$$\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha, \qquad \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}.$$

Pokazuje się też, że zachodzi:

$$\aleph_\omega \neq 2^{\aleph_0}.$$

12.4. Na mocy aksjomatu wyboru każda liczba kardynalna jest pewnym alefem, innymi słowy dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ istnieje taka liczba porządkowa $\alpha$, że

$$\mathfrak{m} = \aleph_\alpha.$$

Hipoteza

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

nazywa się hipotezą kontinuum (CH). CH formułowana jest też w postaci równoważnej: nie istnieje taka liczba kardynalna $\mathfrak{m}$, że

$$\aleph_0 < \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}.$$[66]

Uogólniona hipoteza kontinuum (GCH), to hipoteza, że dla dowolnej liczby porządkowej $\alpha$ zachodzi:

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

[66] Hipotezę kontinuum w obydwu postaciach jako pierwszy badał Georg Cantor; zob. [Dauben 1990], s. 194 oraz s. 99–100. Sama nazwa zaś pochodzi stąd, że Cantor wyznaczył moc zbioru liczb rzeczywistych z przedziału $[0, 1]$, a przedział ten nazywał kontinuum.

Pokazuje się, że CH jest zdaniem niezależnym teorii mnogości Zermelo-Fraenkla z aksjomatem wyboru i z językiem pierwszego rzędu (ZFC).[67] Oznacza to, że w teorii ZFC ani nie można udowodnić tezy $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ani nie można udowodnić tezy $2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$, w konsekwencji nie można udowodnić tezy $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$, gdzie $\alpha$ jest liczbą porządkową.

12.5. CH można traktować jako hipotezę dotyczącą zbiorów, jako hipotezę dotyczącą dwóch liczb kardynalnych, mianowicie $2^{\aleph_0}$ oraz $\aleph_1$, a wreszcie jako hipotezę dotyczącą związku, jaki zachodzi między dwoma skalami liczb kardynalnych: skalą, jaka powstaje w związku z operacją zbioru potęgowego

$$\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0 < \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}} = 2^{\aleph_0} < \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))}} = 2^{2^{\aleph_0}} < \dots \ ,$$

oraz skalą, jaka powstaje w związku z definicją zbioru $Z(\mathfrak{m})$, mianowicie

$$\aleph_0 < \overline{\overline{Z(\aleph_0)}} = \aleph_1 < \overline{\overline{Z(\aleph_1)}} = \aleph_2 < \dots \ .$$

Przyjmując GCH skale te sprowadzone są do jednej, mianowicie:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph_1 < 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2 < \dots \ .$$

CH można potraktować też jako pewną hipotezę dotyczącą liczb rzeczywistych. Otóż na mocy aksjomatu ciągłości, a więc charakterystyki porządku w ciele uporządkowanym $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$, pokazuje się, że każdą liczbę rzeczywistą, dla przykładu niech to będzie $23\frac{1}{3}$, można zapisać w systemie dziesiętnym:

$$23,333... = 23,(3) = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \dots,$$

lub dwójkowym:

$$10111,0101... = 1011,(01) = 1{\cdot}2^4 + 0{\cdot}2^3 + 1{\cdot}2^2 + 1{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0 + 0{\cdot}2^{-1} + 1{\cdot}2^{-2} + \dots \ .$$

Korzystając z przedstawienia dwójkowego pokazuje się, że zachodzi równość:[68]

$$\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0},$$

[67] Zob. [Kunen 1980]. Ten sam wynik odnosi się do teorii mnogości wyłożonej w monografii [Kuratowski, Mostowski 1978]; zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], s. 297.

[68] Zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], s. 194–195. Dowód tego twierdzenia opatrzony jest znakiem $^*$, którego znaczenie jest tak objaśnione: „Staraliśmy się konsekwentnie zrealizować zasadę, że wszystkie twierdzenia, nawet bardzo oczywiste, są wyprowadzane z samych aksjomatów, bez wykorzystywania wiadomości z innych działów matematyki. Od zasady tej odstąpiliśmy tylko w niektórych przypadkach, zaznaczonych w tekście znakiem $^*$" [Kuratowski, Mostowski 1978], s. 12.

oraz to, że zachodzi nierówność:[69]

$$\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}.$$

Autorzy monografii *Teoria mnogości* piszą:

„Hipoteza GCH, a nawet jej szczególny przypadek $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ma wiele konsekwencji w różnych działach matematyki, a zwłaszcza w teorii funkcji rzeczywistych. Podamy tu tylko jeden przykład"[70]

i dalej dowodzą twierdzenie Łuzina:

W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ istnieje zbiór nieprzeliczalny $Z$, którego iloczyn z każdym zbiorem nigdziegęstym jest mocy $\leqslant \aleph_0$.[71]

12.6. Georg Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*.[72] §10 pracy *Grundlagen ...* poświęcony jest definicji „arytmetycznego kontinuum". Na wstępie Cantor przypisuje temu pojęciu filozoficzne znaczenie i kojarzy je z uwagami Arystotelesa, Demokryta, Epikura i św. Tomasza na temat ciągłości.[73]

Cantor chce – jak pisze – „badać pojęcie kontinuum trzeźwo, logicznie i zwięźle jak to tylko możliwe i z uwagi na matematyczną teorią zbiorów", a dalej dodaje, że nie jest to łatwe, bo „wśród matematyków, których tu powinienem przywołać nikt nie zajmował się kontinuum w sensie ścisłym".[74] W rezultacie dochodzi do definicji, którą dzisiaj można by nazwać definicją kontinuum topologicznego.

Otóż w omawianym artykule charakteryzowane są podzbiory przestrzeni metrycznej $\mathbb{R}^n$ z metryką euklidesową.[75] To, że zbiór $T$ jest doskonały

[69] Zob. [Sierpiński 1958], s. 370–371.

[70] [Kuratowski, Mostowski 1978], s. 301.

[71] Zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], s. 301–302.

[72] Zob. [Cantor 1883].

[73] W niniejszej pracy przyjęliśmy zasadę, że szukając odniesień dla pojęć matematycznych wskazujemy konkretne teksty, stąd ewentualnym odniesieniem dla pojęcia kontinuum w matematyce greckiej będą nie wyimki z dzieł Arystotelesa czy Demokryta, ale struktura wielkości $\mathfrak{M} = (M, +, <)$, którą zidentyfikowaliśmy w *Elementach* Euklidesa; zob. rozdz. *Eudoxos versus Dedekinda*, pkt. 1–6. Natomiast w związku z definicją podaną przez Cantora powiemy, że przez kontinuum rozumie on pewne aspekty ciała liczb rzeczywistych: raz – tak jak w omawianym artykule – będzie to topologiczna charakterystyka odcinka $[0, 1]$, innym razem będzie to charakterystyka zbioru uporządkowanego $(\mathbb{R}, <)$; zob. niżej pkt. 13.1.

[74] Zob. [Cantor 1883], s. 191.

[75] W miejsce obecnie używanego symbolu $\mathbb{R}^n$ w pracy Cantora występuje $G_n$.

oznacza, że $T = T^d$, gdzie $T^d$ to zbiór punktów skupienia; to, że zbiór $T$ jest spójny (zusammenhänged) oznacza:

$$\forall x, y \in T \forall \varepsilon > 0 \exists x_1, ..., x_n \in T[|x - x_1| < \varepsilon, |x_1 - x_2| < \varepsilon, \ldots, |x_n - y| < \varepsilon].$$

Po tych ustaleniach Cantor pisze:

„Wszystkie znane kontinua podpadają, co łatwo widać, pod pojęcie zbioru spójnego. Sądzę jednak, że warunek konieczny i wystarczający ujmuję w dwóch pojęciach: doskonałości i spójności, dlatego też punktowe kontinuum zawarte w $\mathbb{R}^n$ definiuję jako zbiór doskonało-spójny".[76]

Porównując swoją „zupełną definicję kontinuum punktowego" z definicją Bolzano i Dedekinda, Cantor pisze:

„Podobnie sądzę, że Dedekind (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*) podkreśla tylko jedną własność kontinuum, tę mianowicie, która jest wspólna wszystkim zbiorom 'doskonałym'".[77]

To zdanie kończy §10 *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*.

Jakkolwiek Dedekind – przypomnijmy[78] – pisze o „istocie ciągłości", to jednak wyraźnie zdaje sobie sprawę z tego, że zasada ciągłości jest charakterystyką porządku. Opisując odcinek $[0, 1]$ pojęciami topologicznymi Cantor nie zauważa, że zostały one zdefiniowane właśnie za pomocą porządku, chodzi mianowicie o definicję metryki, która jest wprowadzana *via* pojęcie wartości bezwzględnej.[79]

12.6. W monografii [Bar-Hilell et al. 1973], w związku z CH czytamy:

„Teraz, gdy wiemy, że w ZFC nie można udowodnić ani hipotezy kontinuum, ani jej negacji, ma sens pytanie czy w związku z hipotezą kontinuum nie dojdzie do rozdwojenia (lub wielowątkowości) teorii mnogości i analizy, tak jak doszło do rozdwojenia geometrii płaskiej (na geometrię euklidesową i hiperboliczną) w związku z niezależnością aksjomatu o prostych równoległych od pozostałych aksjomatów geometrii absolutnej".[80]

W jaki sposób – spytajmy – hipoteza kontinuum wiąże się z analizą? Oczywiście w taki, że moc $2^{\aleph_0}$ jest uznawana za moc zbioru $\mathbb{R}$, chociaż

[76] Zob. [Cantor 1883], s. 194. Zob. też [Błaszczyk 2005(b)], §9.
[77] [Cantor 1883], s. 194.
[78] Zob. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 15.
[79] Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 1.
[80] [Bar-Hilell et al. 1973], s. 106.

równość $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$ nie jest twierdzeniem teorii ZFC, bo aksjomatu ciągłości nie można wyrazić w języku pierwszego rzędu. Tej jednej kwestii poświęcimy następny punkt.

12.7. O rekonstrukcji analizy w teorii mnogości.[81] Potraktujemy teraz $\mathbb{R}$ jako zbiór, którego elementy są urelementami, tj. zbiorami, które nie mają elementów. Indukcyjnie definiowana jest struktura:

(1) $V_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
(2) $V_{n+1}(\mathbb{R}) = V_n(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}(V_n(\mathbb{R}))$, gdzie $n \in \mathbb{N}$,
(3) $V(\mathbb{R}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n(\mathbb{R})$.

Parę $(V(\mathbb{R}), \in)$ nazywa się superstrukturą nad $\mathbb{R}$.

„Rozwijając w zwykły sposób matematykę w ramach teorii mnogości wszystkie obiekty omawiane w tej książce znajdują się w $V(\mathbb{R})$.

Gdy $a, b \in V_n(\mathbb{R})$, to para uporządkowana $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ należy do $V_{n+2}(\mathbb{R})$. Dla dowolnych zbiorów $A, B \in V_n(\mathbb{R})$ iloczyn kartezjański $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \subseteq V_{n+1}(\mathbb{R})$, stąd $A \times B$ należy do $V_{n+2}(\mathbb{R})$, a funkcja z $A$ do $B$ (rozumiana jako podzbiór $A \times B$) należy do $V_{n+3}(\mathbb{R})$.

Stąd jest jasne, że wszystkie standardowe obiekty omawiane w tej książce należą do $V(\mathbb{R})$, a każdym poszczególnym przypadku w standardowy sposób można ustalić poziom $V_n(\mathbb{R})$, do którego dany przedmiot należy".[82]

Tak jak w rozdziale *Niestandardowe liczby rzeczywiste*, niech $F$ będzie ultrafiltrem na zbiorze $\mathbb{N}$ zawierającym filtr Frecheta.[83] Przypomnijmy, że dla $(a_n),\ (b_n) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ relacja

$$(a_n) \equiv (b_n) \leftrightarrow_{df} \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in F,$$

jest relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, zaś zbiór ilorazowy $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\equiv}$ nazywamy zbiorem niestandardowych liczb rzeczywistych i oznaczamy jako $\mathbb{R}^*$. W tym punkcie, w celu skrócenia zapisów, zamiast $\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in F$ będziemy pisać $a_i = b_i$ a.c. (prawie wszędzie).

Podobnie jak superstruktura $(V(\mathbb{R}), \in)$ definiowana jest superstruktura $(V(\mathbb{R}^*), \in)$. Opiszemy teraz konstrukjcę pewnego podzbioru zbioru $V(\mathbb{R}^*)$.

Niech będzie $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i)$. Indukcyjnie definiowana jest rodzina $\{W_n\}$:

$$W_n = \{\mathbf{a} \in (V(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}} :\ \{i \in \mathbb{N} : a_i \in V_n(\mathbb{R})\} \in F\},$$

[81] Referujemy na podstawie [Capiński, Cutland 1995], *Appendix*; zob. także [Lindstrøm 1988], rozdz. IV.

[82] [Capiński, Cutland 1995], s. 207.

[83] W istocie poniższe rozumowanie odnosi się do dowolnego niegłównego ultrafiltru.

lub zgodnie z przyjętą wyżej konwencją:

$$W_n = \{\mathbf{a} \in (V(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}} : \ a_i \in V_n(\mathbb{R}) \text{ a.c.}\}.$$

Przyjmujemy:

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n.$$

Indukcyjnie definiowane jest odwzorowanie $[\cdot] : W \mapsto V(\mathbb{R}^*)$:

(1) gdy $\mathbf{a} \in W_0$, wtedy $a_i \in \mathbb{R}$ a.c. i przyjmuje się $[\mathbf{a}] = [(a_i)]_{\equiv} \in \mathbb{R}^*$,

(2) gdy $[\cdot]$ jest zdefiniowane na $W_n$, zaś $\mathbf{a} \in W_{n+1}\backslash W_n$, gdy $\mathbf{b} \in W$ oraz $b_i \in a_i$ a.c., wtedy $\mathbf{b} \in W_n$ i przyjmuje się:

$$[\mathbf{a}] = \{[\mathbf{b}] : \mathbf{b} \in W, \ b_i \in a_i \text{ a.c.}\}.$$

Na mocy definicji przyjmuje się:

$${}^*V(\mathbb{R}) = \{[\mathbf{a}] : \ \mathbf{a} \in W\}.$$

Elementy zbioru ${}^*V(\mathbb{R})$ nazywane są wewnętrznymi, zaś elementy zbioru $V(\mathbb{R}^*)\backslash{}^*V(\mathbb{R})$ – zewnętrznymi. Niestandardowe uniwersum teoriomnogościowe to struktura

$$({}^*V(\mathbb{R}), \in).$$

Dla $a \in V(\mathbb{R})$ przyjmuje się:

$$\mathbf{a}^* = [(a, a, a, \dots)].$$

Do języka $\mathfrak{L}$ teorii mnogości, w której opisywana jest struktura ${}^*V(\mathbb{R})$ należą: (1) $=$, $\in$, (2) zmienne $v_1, \ v_2, \dots$, (3) stała $c_a$, dla każdego $a \in V(\mathbb{R})$, (4) spójniki zdaniowe, kwantyfikatory, nawiasy.

Zbiór termów języka $\mathfrak{L}$ tworzą stałe i zmienne. Zbiór formuł $\mathfrak{S}$ jest definiowany indukcyjnie: (1) gdy $s$ oraz $t$ są termami, to $s \in t$ oraz $s = t$ należą do $\mathfrak{S}$, (2) gdy $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}$, to $\neg\varphi, \ \varphi \wedge \psi, \ \varphi \vee \psi, \ \varphi \to \psi$ należą do $\mathfrak{S}$, (3) gdy $t$ jest termem, zmienna $v$ nie występuje w $t$, $\varphi \in \mathfrak{S}$, to $\forall v \in t[\varphi]$ oraz $\exists v \in t[\varphi]$ należą do $\mathfrak{S}$.[84]

Wartościowanie $\alpha$ w strukturze $V(\mathbb{R})$ definiowane jest tradycyjnie. Pokażemy tylko jak to jest w przypadku stałych oraz formuł z kwantyfikatorami. Tak więc gdy term $t$ jest stałą $c_a$, to $\alpha(t) = a$. Natomiast formuła (1) $\forall v \in t[\varphi]$ oraz (2) $\exists v \in t[\varphi]$ jest prawdziwa w $V(\mathbb{R})$ przy wartościowaniu $\alpha$, symbolicznie

$$(V(\mathbb{R}), \alpha) \models \forall v \in t[\varphi], \quad (V(\mathbb{R}), \alpha) \models \exists v \in t[\varphi],$$

[84] Gdy $v_1, \dots, v_n$ są wszystkimi zmiennymi wolnymi, które występują w formule $\varphi$, to piszemy $\varphi(v_1, \dots, v_n)$.

wtedy i tylko wtedy, gdy

(ad 1) dla każdego $a \in \alpha(t)$, $\varphi$ jest prawdziwe w $V(\mathbb{R})$ przy każdym takim wartościowaniu $\alpha'$, które różni się od $\alpha$ tylko tym, że $\alpha'(v) = a$,
(ad 2) istnieje takie $a \in \alpha(t)$, że $\varphi$ jest prawdziwe w $V(\mathbb{R})$ przy każdym takim wartościowaniu $\alpha'$, które różni się od $\alpha$ tylko tym, że $\alpha'(v) = a$.

W przypadku wartościowania $\alpha$ w strukturze ${}^*V(\mathbb{R})$ różnica jest tylko taka, że gdy term $t$ jest stałą $c_a$, to $\alpha(t) = \mathbf{a}^*$.

Twierdzenie Łosia. Niech $\varphi(v_1, \ldots, v_n) \in \mathfrak{S}$, niech $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n} \in W$, tj. dla pewnego $m$ jest tak, że $\mathbf{a_k} = (a_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$ należy do $W_m$ oraz $a_i^k \in V_m(\mathbb{R})$ a.c. Zależność między wartościowaniami $\alpha_i$ w systemie $V(\mathbb{R})$ oraz wartościowaniem $\alpha$ w systemie ${}^*V(\mathbb{R})$ jest dana definicją:

$$\alpha(v_k) =_{df} [\mathbf{a_k}], \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{a_k} = (a_i^k)_{i\in\mathbb{N}}, \quad \alpha_i(v_k) = a_i^k, \quad \text{dla } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) $(V(\mathbb{R}); \alpha_i) \models \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ a.c.,
(2) $({}^*V(\mathbb{R}); \alpha) \models \varphi(v_1, \ldots, v_n)$.

Wprost z twierdzenia Łosia wynika

Zasada Transferu: gdy $\varphi$ jest zdaniem, to $V(\mathbb{R}) \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy ${}^*V(\mathbb{R}) \models \varphi$.

Jakkolwiek w zapisach $V(\mathbb{R}) \models \varphi$ oraz ${}^*V(\mathbb{R}) \models \varphi$ występuje ta sama litera $\varphi$, to z uwagi na wartościowanie stałych będą to *różne* zdania w takim oto sensie, np. aksjomat Archimedsa w $V(\mathbb{R})$ ma postać

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}[0 < a < b \to n \cdot a > b],$$

zaś w ${}^*V(\mathbb{R})$ ma postać

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^* \exists n \in \mathbb{N}^*[0^* < a < b \to n \cdot a > b].^{85}$$

Zbiór $(\mathbb{R}, <)$ jest ciągły w sensie Dedekinda. Pokazaliśmy, że $(\mathbb{R}^*, <)$ nie jest ciągły w sensie Dedekinda. Oznacza to, że ciągłość w sensie Dedekinda nie jest wyrażalna w języku $\mathfrak{L}$. Mając to na uwadze mówimy, że ciągłość liczb rzeczywistych nie jest wyrażalna w teorii mnogości ZFC z językiem pierwszego rzędu. Podobnie, przestrzeń topologiczna $(\mathbb{R}, \tau_<)$ jest ośrodkowa, zaś $(\mathfrak{R}^*, \tau_<)$ – jak pokazaliśmy – nie jest ośrodkowa. Oznacza to, że

[85] Zob. rozdz. *Niestandardowe liczby rzeczywiste*, pkt. 1.1.

ośrodkowość nie jest wyrażalna w języku $\mathfrak{L}$. Mając to na uwadze mówimy, że ośrodkowość liczb rzeczywistych nie jest wyrażalna w teorii mnogości ZFC z językiem pierwszego rzędu.

12.8. W teorii ZFC rekonstrukcja analizy rozpoczyna się od tego, że na mocy aksjomatu nieskończoności definiowany jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$, a następnie, jako zbiory ilorazowe, w standardowy sposób definiowane są zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ i liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Zbiór liczb rzeczywistych definiowany np. metodą przekrojów Dedekinda:

$$\mathbb{R} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) : X \neq \emptyset \wedge X \neq \mathbb{Q} \wedge \forall x \in X \forall y \in \mathbb{Q}(y < x \rightarrow y \in X\}.$$

„Tak więc $\mathbb{R}$ jest zbiorem klas dolnych przekrojów Dedekinda. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, z operacjami w ciele algebraicznym definiowanymi w zwykły sposób”.[86]

12.9. Przejdźmy teraz na teren ontologii. Z ontologicznego punktu widzenia moc jest aspektem zbioru. Podobnie liczba porządkowa – to też aspekt zbioru. Ale z ontologicznego punktu widzenia już samo wyróżnienie $\mathbb{R}$ – dziedziny ciała uporządkowanego $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest wyróżnieniem pewnego aspektu ciała $\mathfrak{R}$.

W teorii mnogości liczba porządkowa jest traktowana jako pewien obiekt przypisany parze $(X, \prec_X)$, chociaż wyróżnioną rolę spełnia tu para $(W(\xi), \prec)$. W ten sposób liczba porządkowa $\xi$ jest związana z konkretnym zbiorem, mianowicie z $W(\xi)$. Mając na uwadze parę $(W(\xi), \prec)$ można rozważać tylko zbiór $W(\xi)$ i jego moc $\overline{\overline{W(\xi)}}$. Stąd liczba $\xi$ może być potraktowana jako zbiór i można jej przypisać moc.

Porządek (skala) liczb porządkowych jest *subtelniejszy* niż porządek liczb kardynalnych – przede wszystkim dlatego, że dla dowolnej liczby $\alpha$ jest $\alpha \prec \alpha + 1$, zaś różne liczby porządkowe mogą mieć tę samą moc. Rozpatrując liczby porządkowe z uwagi na ich moc otrzymuje się liczby początkowe i w rezultacie hierachię alefów.

Gdy zbiór $\mathbb{R}$ jest traktowany jako element pary $(\mathbb{R}, <)$, a porządek $<$ jest porządkiem w ciele $\mathfrak{R}$, to można pokazać, że $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$. Gdy zbiór $\mathbb{R}$ jest traktowany jako element pary $(\mathbb{R}, \prec_R)$, gdzie porządek $\prec_R$ jest pewnym dobrym porządkiem na $\mathbb{R}$, to można pokazać, że moc $2^{\aleph_o}$ jest pewnym alefem. Powstaje zatem pytanie: gdzie na skali alefów lokuje się moc zbioru $\mathbb{R}$, innymi słowy, dla jakiej liczby porządkowej $\alpha$ zachodzi równość $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$.

Ten aspekt – lokalizacja $2^{\aleph_0}$ na skali alefów – jest miejscem niedookreślenia ciała $\mathfrak{R}$ w myśl definicji podanej wyżej w punkcie 11.1: z niezależności hipotezy kontinuum wynika, że w teorii ZFC żadna z możliwych własności $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ nie przysługuje ciału $\mathfrak{R}$.

[86] [Kunen 1980], s. 35; $\mathbb{C}$ oznacza oczywiście zbiór liczb zespolonych.

Jednocześnie jest tak, że charakteryzując onotologicznie przedmiot matematyczny nie posługujemy się pojęciem jakości, stąd też nie ma tu zastosowania cała teoria negatywnych stanów rzeczy. W rezultacie nierówności $\aleph_\omega \neq 2^{\aleph_0}$, czy $\aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}$ nie są negatywnymi stanami rzeczy: w przyjętej interpretacji możliwą własnością jest równość $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$, nie zaś nierówność $\aleph_\alpha \neq 2^{\aleph_0}$.

12.10. W związku z CH pojawiały się koncepcje, aby do teorii ZFC dołączyć taki aksjomat, że na gruncie tej rozszerzonej teorii można rozstrzygnąć CH. Z punktu widzenia ontologii, gdy własność wiąże się ze ściśle określoną teorią, ewentualna odpowiedź na pytanie dla jakiego $\alpha$ zachodzi $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ będzie w takiej rozszerzonej teorii już inną własnością. Można na przykład rozważać liczby rzeczywiste w teorii ZFC+CH, lub w teorii ZFC+$2^{\aleph_0} = \aleph_\beta$, gdzie $\beta$ jest różną od 0 „rozsądnie zdefiniowaną" liczbą porządkową, a wówczas uznamy, że właśnie omawiane miejsce niedookreślenia jest w tych teoriach *wypełnione*.[87]

**13.** Wracamy do teorii mnogości. Omówimy drugi przykład miejsca niedookreślenia podany w rozdziale *O przedmiocie matematycznym. Część I.* Tym razem zajmuje nas nie sam zbiór $\mathbb{R}$, ale zbiór uporządkowany $(\mathbb{R}, <)$. Zaczniemy od historii.

13.1. W pracy *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* Cantor rozwinął teorię zbiorów liniowo uporządkowanych.[88] Wprowadził tam pojęcie podobieństwa zbiorów oraz typu porządkowego. W zbiorze $(X,<)$, *via* przedziały otwarte $(a,b) = \{x \in X : a<x<b\}$, definiuje Cantor granicę ciągu, gęstość porządku, gęstość jednego zbioru w drugim. Ciągi jakie rozważa są albo rosnące, albo malejące, a granica jest kresem, odpowiednio górnym, lub dolnym. W ten sposób dla dowolnego zbioru $A \subset X$ definiowana jest pochodna $A^d$, czyli zbiór punktów skupienia, a za pomocą pochodnej definiowany jest zbiór domknięty, tj. taki, że $A^d \subset A$, zbiór gęsty w sobie, tj. taki, że $A \subset A^d$, oraz zbiór doskonały, tj. taki, że $A = A^d$. Powyższe własności są przenoszone przez izomorfizm porządkowy, stąd także i typ porządkowy może być gęsty, domknięty, gęsty w sobie, lub doskonały.

Cantor pokazuje, że zbiór $(X, <)$ ma typ porządkowy $\eta$, gdy $\overline{\overline{X}} = \aleph_0$, porządek $<$ jest gęsty i w $X$ i nie ma ani elementu najmniejszego, ani największego. Jako przykład podaje liczby wymierne, które są „większe od 0 i mniejsze od 1" wzięte z „'naturalnym' porządkiem względem wielkości".[89]

[87] Zob. [Bar-Hilell et al. 1973], §6.1–6.3.
[88] Zob. [Cantor 1895].
[89] Zob. [Cantor 1895], §7, 9.

Następnie dowodzi, że zbiór $(X, <)$ ma typ porządkowy $\theta$, gdy jest doskonały, zawiera zbiór typu $\eta$, który jest gęsty w $X$ oraz w $(X, <)$ jest element najmniejszy i największy. Przykładem zbioru typu $\theta$ jest przedział osi liczb rzeczywistych $[0, 1]$ z „naturalnym" – jak pisze – porządkiem. Przedział $[0, 1]$ nazywa Cantor „liniowym kontinuum".[90]

Od Cantora więc pochodzi kategoryczna (jednoznaczna z dokładnością do izomorfizmu) charakterystyka zbioru uporządkowanego $(\mathbb{R}, <)$. Nie zauważył on jednak, że rozważa pewien wyróżniony porządek, nie potrafił też powiedzieć, co to znaczy, że ów wyróżniony porządek jest „naturalny".

13.2. Twierdzenia o typach porządkowych należą dziś do teorii zbiorów uporządkowanych, ale w ślad za Cantorem są też wyrażane w języku topologicznym. I tak w zbiorze liniowo uporządkowanym $(X, <)$ definiowana jest topologia porządkowa $\tau_<$. Pokazuje się, że przestrzeń topologiczna $(X, \tau_<)$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy porządek jest ciągły w sensie Dedekinda.[91] Ośrodkowość topologii $\tau_<$ oznacza, że istnieje taki przeliczalny zbiór $Y \subset X$, że zachodzi:

$$\forall x, z \in X \exists y \in Y [x < z \to x < y < z].$$

Pokazuje się, że następująca charakterystyka zbioru liniowo uporządkowanego $(X, <)$ jest kategoryczna: (1) $\overline{\overline{X}} = \aleph_0$, (2) porządek $<_X$ jest gęsty, (3) w $X$ nie ma elementu najmniejszego, ani największego. Na tej podstawie wyróżnia się typ porządkowy $\eta$, a przykładem zbioru tego typu są liczby wymierne $(\mathbb{Q}, <)$.[92]

Pokazuje się też, że następująca charakterystyka zbioru uporządkowanego $(X, <)$ jest kategoryczna: (1) w $X$ nie ma elementu najmniejszego, ani największego, (2) przestrzeń $(X, \tau_<)$ jest spójna, (3) przestrzeń $(X, \tau_<)$ jest ośrodkowa.[93] Na tej podstawie wyróżnia się typ porządkowy $\lambda$, a przykładem zbioru tego typu są liczby rzeczywiste $(\mathbb{R}, <)$ z „naturalnym" porządkiem.[94] Dzisiaj możemy powiedzieć, że ów „naturalny" porządek, to jedyny porządek zgodny z działaniami w ciele uporządkowanym liczb rzeczywistych $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$.[95]

Obecnie rozważania dotyczące typów porządkowych są całkowicie pozbawione sugestii, że odnoszą się do jakiegoś tajemniczego kontinuum, „które

[90] Zob. [Cantor 1895], §10–11.

[91] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 4.1.

[92] Zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], rozdz. III, §3.

[93] Zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], rozdz. III, §3, zob. także rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 5.

[94] Zob. [Kuratowski, Mostowski 1978], rozdz. III, §3.

[95] Zob. rozdz. *Archimedes, Archimedes*, pkt. 4–7.

nie tylko odgrywało bardzo ważną rolę w rozwoju wszelkich nauk, ale wywoływało też krańcowo różne opinie, a nawet gwałtowne spory".[96] W dzisiejszej matematyce są to czysto techniczne kwestie.

13.3. W związku z charakterystyką porządku definiowana jest też następująca własność: nie istnieje nieprzeliczalna rodzina przedziałów parami rozłącznych, w skrócie c.c.c.[97]

Pokazuje się, że ośrodkowość przestrzeni $(X, \tau_<)$ implikuje własność c.c.c. Niech bowiem $(X, \tau_<)$ będzie przestrzenią ośrodkową, niech $D \subset X$ będzie zbiorem przeliczalnym i gęstym w $(X, <)$, niech $\{U_t\}_{t\in T}$, gdzie $\overline{\overline{T}} > \aleph_0$, będzie nieprzeliczalną rodziną przedziałów parami rozłącznych. Wówczas rodzina $\{U_t \cap D : t \in T\}$ jest nieprzeliczalną rodziną zbiorów niepustych i parami rozłacznych, co jest sprzeczne z założeniem $\overline{\overline{D}} = \aleph_0$.[98]

Naturalne jest pytanie, czy z własności c.c.c. wynika ośrodkowość przestrzeni $(X, \tau_<)$. Zwykle jest ono formułowane za pomocą pojęcia prostej Suslina. Otóż prosta Suslina to na mocy definicji taki zbiór liniowo uporządkowany $(X, <)$, który (1) ma własność c.c.c. oraz (2) $(X, \tau_<)$ nie jest przestrzenią ośrodkową. Hipoteza Suslina (SH) to zdanie: nie istnieje prosta Suslina. Innymi słowy, SH to hipoteza, że z warunku c.c.c. wynika ośrodkowość przestrzeni $(X, \tau_<)$. Tak więc z SH wynika, że ze zbiorem $(\mathbb{R}, <)$ jest izomorficzny każdy zbiór liniowo uporządkowany $(X, <)$ taki, że (1) w $X$ nie ma pierwszego, ani ostatniego elementu, (2) $(X, \tau_<)$ jest przestrzenią spójną, (3) $(X, \tau_<)$ ma własność c.c.c.

13.4. W związku z SH Kenneth Kunen pisze:

„SH powstała w naturalny sposób przy próbie scharakteryzowania typu porządkowego liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, <)$. Wiadomo, że zbiór liniowo uporządkowany $(X, <)$ spełniający warunki:

(a) w $X$ nie ma ani pierwszego, ani ostatniego elementu,

(b) $X$ jest zbiorem spójnym w topologii porządkowej,

(c) $X$ jest ośrodkowy w topologii porządkowej

jest izomorficzny z $(\mathbb{R}, <)$. [Suslin 1920] postawił pytanie, czy (c) można zastąpić warunkiem

(c') $X$ w topologii porządkowej ma własność c.c.c.

---

[96] [Cantor 1883], s. 190.

[97] Litery c.c.c. to powszechnie przyjęty skrót nazwy „countable chain condition". Zwracamy uwagę, że w niżej przedstawianych rozważaniach przyjmuje się za Cantorem szczególne rozumienie przedziału w zbiorze liniowo uporządkowanym $(X, <)$, mianowicie: $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$. Przypomnijmy, że w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* Dedekind podaje inną definicję przedziału; zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 16.3.

[98] Zob. [Kunen 1980], s. 50.

Oczywiście przyjmując SH, warunki (c) i (c') są równoważne i można pokazać, że jeżeli istnieje prosta Suslina, to istnieje też prosta o własnościach (a) oraz (b). W ten sposób SH jest równoważna temu, że warunki (a), (b) oraz (c') charakteryzują porządek $(\mathbb{R}, <)$.

Okazało się, że SH jest zdaniem niezależnym teorii ZFC ".[99]

Pokażemy teraz zasadnicze kroki dowodu twierdzenia:

Gdy istnieje prosta Suslina $(Y, <_Y)$, to istnieje taki zbiór liniowo uporządkowany $(Z, <)$, że (1) w $Z$ nie ma elementu najmniejszego, ani największego, (2) przestrzeń $(Z, \tau_<)$ jest spójna, (3) $(Z, \tau_<)$ ma własność c.c.c. oraz (4) $(Z, \tau_<)$ nie jest ośrodkowa.

Niech $(Y, <_Y)$ będzie prostą Suslina. W zbiorze $Y$ definiowana jest relacja: $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x <_Y y$, to odcinek $(x, y)$ jest przestrzenią ośrodkową, lub gdy $y <_Y x$, to odcinek $(y, x)$ jest przestrzenią ośrodkową, lub $x = y$. Pokazuje się, że $\sim$ jest relacją równoważności.

(1) W zbiorze ilorazowym $X = Y/_\sim$ definiowany jest porządek liniowy:

$$I \prec J \leftrightarrow_{df} \exists x \in I \exists y \in J[x <_Y y].$$

(2) Porządek $\prec$ jest gęsty.

(3) Na podstawie założenia, że $(Y, <_Y)$ ma własność c.c.c. pokazuje się, że każda klasa równoważności $I \in X$ wzięta z porządkiem $<_Y$ jest przestrzenią ośrodkową. Stąd wynika, że

(4) przestrzeń $(X, \tau_\prec)$ nie jest ośrodkowa oraz to, że żaden niepusty przedział $(I, J) \subset X$ nie jest przestrzenią ośrodkową.

(5) Przestrzeń $(X, \tau_\prec)$ ma własność c.c.c. Albowiem, gdy $\{(I_t, J_t) : t \in T\}$, gdzie $\overline{\overline{T}} > \aleph_0$, jest rodziną przedziałów parami rozłącznych, to rodzina $\{(x_t, y_t) : t \in T\}$, gdzie $x_t \in I_t,\ y_t \in J_t$, jest nieprzeliczalną rodziną przedziałów parami rozłącznych w $(Y, <_Y)$, co jest sprzeczne z założeniem, że $(Y, <_Y)$ jest prostą Suslina.

(6) Stosując metodę przekrojów, zbiór $(X, \prec)$ jest rozszerzany do zbioru ciągłego w sensie Dedekinda $(Z, <_Z)$.[100] Przestrzeń $(Z, \tau_{<_Z})$ jest zatem spójna, a jako rozszerzenie $(X, \prec)$ nie jest ośrodkowa, posiada też własność c.c.c. Ten ostatni fakt można tak wykazać: z uwagi na sposób rozszerzenia, zbiór $X$ jest gęsty w $(Z, \tau_{<_Z})$, stąd wynika, że dla każdego przedziału $(a, b) \subset Z$ istnieje taki przedział $(x, y) \subset X$, gdzie $x, y \in X$, że $(x, y) \subset (a, b)$. Tak więc, jeżeli $(X, \tau_\prec)$ ma własność c.c.c., to i $(Z, \tau_{<_Z})$ ma tę własność.[101]

[99] [Kunen 1980], s. 66.

[100] Zob. rozdz. *Konstrukcja Dedekinda*, pkt. 18.

[101] Zob. [Kunen 1980], s. 67–68, 90.

W ten sposób z zaprzeczenia SH wynika, że istnieje zbiór liniowo uporządkowany $(X, <)$ taki, że (1) w $X$ nie ma ani pierwszego, ani ostatniego elementu, (2) $(X, \tau_<)$ jest przestrzenią spójną, (3) $(X, \tau_<)$ ma własność c.c.c. i który – z uwagi na to, że nie jest przestrzenią ośrodkową – nie jest izomorficzny ze zbiorem $(\mathbb{R}, <)$.

13.5. Wróćmy do ontologii. Z punktu widzenia ontologii charakterystyka zbioru uporządkowanego $(\mathbb{R}, <)$ jest aspektem ciała uporządkowanego $\mathfrak{R}$, nie chodzi tu przecież o jakiś porządek liniowy na zbiorze $\mathbb{R}$, ale o ten jedyny porządek zgodny z działaniami w ciele $\mathfrak{R}$. W związku z tym istnienie prostej Suslina można uznać na aspekt ciała $\mathfrak{R}$, który wiąże się ze specyficzną charakterystyką owego „naturalnego" porządku. W teorii ZFC (z językiem pierwszego rzędu) są tylko dwie własności odpowiadające temu aspektowi: prosta Suslina istnieje, prosta Suslina nie istnieje. Z niezależności SH wynika, że żadna z nich nie przysługuje $\mathfrak{R}$, co znaczy, że jest to miejsce niedookreślenia w myśl definicji podanej wyżej w punkcie 11.1.

**14.** W ten sposób pokazaliśmy, że liczby rzeczywiste są przedmiotem intencjonalnym w sensie określonym przez Romana Ingardena w pracach *Das literarische Kunstwerk* oraz *Spór o istnienie świata.*

# *Zurück zum Text selbst*

**15.** W proponowanej modyfikacji ontologii Ingardena aspekty przedmiotu matematycznego wiążemy nie ze sferą czystych jakości idealnych, ale z faktycznymi teoriami matematycznymi. W konsekwencji, tak jak powstają teorie matematyczne, tak też *stwarzane* są nowe aspekty przedmiotu. Przypomnijmy: przedmiot wyznaczony przez *Stetigkeit und irrationale Zahlen* może być ujęty jako ciało uporządkowane, rzeczywiście domknięte, unormowane, topologiczne, może być ujęty jako rozszerzenie uporządkowanego lub unormowanego ciała liczb wymiernych. Wybierając pewien aspekt ciała $\mathfrak{R}$, liczby rzeczywiste mogą być ujęte jako izometryczne z linią prostą, mogą być porównywane z alefami, charakteryzowane przez ciągłość i ośrodkowość, lub przez ciągłość i własność c.c.c.

W klasycznej ontologii już sama zmienność przedmiotu rodzi problem związany z ustaleniem jego tożsamości. Może się więc wydawać, że przyjmując powyższe rozumienie własności stajemy przed jeszcze większym wyzwaniem: czym – ze względu na swoje własności – jest to coś, co w różnych teoriach tak różnie może być ujmowane? Czym – można powtórzyć za Hilbertem – są te „zwykłe" liczby rzeczywiste? Na to pytanie odpowiedzieliśmy już w ten sposób: jest to zawartość przedmiotu intencjonalnego wyznaczonego przez rozprawę *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Ale – jak zauważyliśmy – zawartość przedmiotu intencjonalnego zależy od tego, które zdania uznamy za te, które wyznaczają ową zawartość. Dlatego doszedłszy do tego miejsca należy postąpić jeszcze o krok dalej.

15.1. Jak dotąd posługiwaliśmy się kategorią przedmiotu. Jeżeli zawartość przedmiotu intencjonalnego może być ujęta i jako ciało uporządkowane, i jako ciało unormowane, i jako ciało topologiczne, to jest tak dlatego, że kategoria przedmiotu służy opisowi tego, co można wyodrębnić w tekście rozprawy. Nie jest jednak konieczne, aby zawartość tekstu matematycznego opisywać za pomocą tej kategorii. Co więcej, jak zobaczyliśmy, sama zawartość jest zrelatywizowana do ustalonego, np. z perspektywy pewnej teorii, zestawu zdań: w teorii ciał uporządkowanych ciągłość jest zreduko-

wana do charakterystyki porządku, w teorii ciał topologicznych zarówno ciągłość porządku jak i ciągłość funkcji są charakteryzowane w ramach jednej teorii. Dlatego bardziej adekwatną niż przedmiot będzie kategoria tekstu matematycznego. Na pytanie o „zwykłe liczby rzeczywiste" odpowiedzią będzie wskazanie nie przedmiotu wyznaczonego przez tekst, ale samego tekstu. W ten sposób filozofia matematyki zamiast o przedmiotach będzie traktować o tekstach i o tym, co jest w nich wyodrębniane i jak to coś jest ujmowane.

Konstrukcja opisana w *Stetigkeit und irrationale Zahlen* w zależności od tego, które partie tekstu zostaną wyróżnione, może być ujęta albo jako szczególne ciało uporządkowane, albo jako szczególne ciało topologiczne. Ale podobnie jest z dowolnym przedmiotem intencjonalnym rozumianym jako obiekt schematyczny o dwustronnej budowie. Jest on wyznaczony przez pewne partie tekstu, ale w samym tekście nie jest dane w sposób jednoznaczny i konieczny przez które to partie. W przypadku liczb rzeczywistych jednoznacznie wskazujemy tylko tekst, nie zaś zdania, które miałyby wyznaczać liczby rzeczywiste rozumiane jako przedmiot. Jest tak, bo w samej matematyce nie ma jednoznacznej odpowiedzi na pytanie czym, w myśl definicji, są liczby rzeczywiste: szczególnym ciałem uporządkowanym, czy szczególnym ciałem topologicznym.

15.2. Wiemy, że liczby rzeczywiste można przedstawić jako pewien zbiór. Ujęcie to pozwala pokonać trudności, w jakie była uwikłana oryginalna konstrukcja Cantora. Przystając na to, że liczby są przede wszystkim pewnym zbiorem, nie potrafimy jednak odpowiedzieć na pytanie czym jest to coś, co jest „redukowane", co jest przedstawiane jako zbiór, czy jest to szczególne ciało uporządkowane, czy szczególne ciało topologiczne. Sens redukcji teoriomnogościowej jest wyznaczony przez problem, jaki rozwiązuje. Powrót do tekstu pozwala odzyskać sens zagubiony w takim *redukcyjnym* nastawieniu.

Podobnie jest z ujęciem aksjomatycznym. Przyjmując aksjomaty ciała uporządkowanego w sposób ciągły, nie szukamy idealnego, istniejącego poza czasem i przestrzenią przedmiotu, który miałyby *odpowiadać* tym aksjomatom, który miałby być przez nie *opisywany*. Aksjomaty traktujemy jako sposób ujęcia zawartości tekstu matematycznego. Sens ujęcia aksjomatycznego pochodzi nie z odniesienia do idealnego przedmiotu, ale z odniesienia do warstwy dedukcyjnej *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

Zwracając uwagę na sam tekst, widzimy genezę oraz problem lub rozwiązanie problemu. Zamiast podstawowych pojęć – zbiór, struktura matematyczna – *via* problemy znajdujemy podstawowe teksty. Stąd zamiast o przedmiotach matematycznych należy mówić o tekstach matematycznych.

# BIBLIOGRAFIA

# Bibliografia


Acerbi Fabio (2000), *Plato: Parmenides 149a7-c3. A Proof by Complete Induction?*, „Archive for History of Exact Sciences" 55, 2000, s. 57–76.

Acerbi Fabio (2003), *Drowning by Multiples. Remarks on the Fifth Book of Euclid's Elements, with Special Emphasis on Prop. 8*, „Archive for History of Exact Sciences" 57, 2003, s. 175–242.

Artmann Benno (1991), *Euclid's Elements and its Prehistory*, „Apeiron", t. XXIV (4), 1991, s. 1–47.

Artmann Benno (2001), *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, New York 2001.

Arystoteles, *Kategorie*, [w:] Arystoteles, *Dzieła wszystkie*, t. I, tł. K. Leśniak, PWN, Warszawa 1990.

Bar-Hillel Yehoshusa, Fraenkel Abraham, Levy Azriel (1973), *Foundations of Set Theory*, NHPC, Amsterdam 1973.

Barker Stephen F. (1969), *Realism as a Philosophy of Mathematics*, [w:] J.J. Bulloff (ed.), *Foundations of Mathematics. Symposium Papers Commemorating the Sixtieth Birthday of Kurt Gödel*, Springer, Berlin 1969, s. 1–9.

Baron Margaret (1969), *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press, Oxford 1969.

Bartoszyński Kazimierz (1982), *Teoria miejsc niedookreślenia na tle ingardenowskiego systemu filozoficznego*, [w:] M. Głowiński, J. Sławiński (red.), *Wypowiedź literacka i filozoficzna*, Osolinenum, Wrocław 1982, s. 183–197.

Bartoszyński Kazimierz (2001(a)), *Dzieło sztuki – literackie*, [w:] [Nowak, Sosnowski 2001], s. 42–51.

Bartoszyński Kazimierz (2001(b)), *Schematyczność II*, [w:] [Nowak, Sosnowski 2001], s. 248–249.

Baszmakowa G.M. (1975(a)), *Grecja starożytna*, [w:] A.P. Juszkiewicz (red.), *Historia matematyki*, t. I, tł. S. Dobrzycki, PWN, Warszawa 1975, s. 64–115.

Baszmakowa G.M., (1975(b)), *Kraje hellenistyczne i imperium rzymskie*,

[w:] A.P. Juszkiewicz (red.), *Historia matematyki*, t. I, tł. S. Dobrzycki, PWN, Warszawa 1975, s. 116–167.

Batóg Tadeusz (1997), *Weyl Klaus Hugo Herman, Philosophy of Mathematics and Natural Science*, [w:] B. Skarga (red.) *Przewodnik po literaturze filozoficznej XX wieku*, t. I, PWN, Warszawa 1997, s. 448–452.

Batóg Tadeusz (2000), *Dwa paradygmaty matematyki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2000.

Bell John L. (2005), *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*, Polimetrica, Milano 2005.

Benacerraf Paul (1965), *What numbers could not be?* „Philosophical Review" 74, 1965, s. 47–73; cytowane za P. Benacerraf, *What numbers could not be?* [w:] P. Benacerraf, H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge 1983, s. 272–294.

Berggren J. L. (1984), *History of Greek Mathematics: A Survey of Recent Research*, „Historia Mathematica" 11, 1984, s. 394–410.

Białynicki-Birula Andrzej (1991), *Algebra*, PWN, Warszawa 1971.

Biłat Andrzej (2004), *Ontologiczna interpretacja logiki*, Wydawnictwo UMCS, Lublin 2004.

Birkhoff Garrett, Mac Lane Saunders (1957), *A Survey of Modern Algebra*, The Macmillan Company, New York 1957; cytowane za: G. Birkhoff, S. Mac Lane, *Przegląd algebry współczesnej*, tł. A. Ehrenfeutcht, A.W. Mostowski, PWN, Warszawa 1960.

Błaszczyk Piotr (1999), *Związek przyczynowy w „Sporze o istnienie świata"*, „Kwartalnik Filozoficzny", t. XXVII (2), 1999, s. 69–118.

Błaszczyk Piotr (2003), *Odrzucenie „Tertium non datur"*, „Kwartalnik Filozoficzny", t. XXXI (1), 2003, s. 16–37.

Błaszczyk Piotr (2004), *O przedmiocie matematycznym*, „Filozofia Nauki" 2, 2004, s. 5–19; w nieznacznie zmienionej wersji i pod tym samym tytułem [w:] „Przegląd Filozoficzny" 1, 2003, s. 45–59.

Błaszczyk Piotr (2005(a)), *On the Mode of Existence of the Mathematical Object*, „Analecta Husserliana", t. LXXXVIII, 2005, s. 137–155.

Błaszczyk Piotr (2005(b)), *Ciągłość i liczby rzeczywiste*, „Logika" 23, 2005, s. 7–26.

Błaszczyk Piotr (2006(a)), *Fragmenty ontologii Ingardena. System i zmiana*, „Kwartalnik Filozoficzny", t. XXXIV (1), 2006, s. 61–83.

Błaszczyk Piotr (2006(b)), *O definicji 5 z Księgi V Elementów Euklidesa*, „Investigationes Linguisticae", t. XIV, 2006, s. 120–146; http://www.inveling.amu.edu.pl.

Borsuk Karol, Szmielew Wanda (1972), *Podstawy geometrii*, wydanie trzecie poprawione, PWN, Warszawa 1972; wyd. pierwsze: 1955; wyd. dru-

gie: 1966; wydanie angielskie: *Foundations of Geometry*, NHPC, Amsterdam 1960.

Borzaccihini Luigi (2007), *Incommensurability, Music and Continuum: A Cognitive Approach*, „Archive for History of Exact Sciences" 61, 2007, s. 273–302.

Bourbaki Nicolas (1966(a)), *Elements of Mathematics. General Topology*, t. I–II, Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachussetts 1966.

Bourbaki Nicolas (1966(b)), *Historical Note*, [w:] [Bourbaki 1966(a)], Part 1, s. 406–416.

Boyer Carl B. (1949), *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications, New York 1949; cytowane za: *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, tł. S. Dobrzycki, PWN, Warszawa 1964.

Bridges Douglas S. (1998), *Foundations of Real and Abstract Analysis*, Springer, New York 1998.

Browkin Jerzy (1978), *Teoria ciał*, PWN, Warszawa 1978.

Bukovský Lev (1979), *Štruktúra realnej osi*, VEDA, Bratislava 1979.

Bunn Robert (2000), *Developments in the Foundations of Mathematics, 1870–1910*, [w:] I. Grattan-Guiness (ed.), *From the Calculus to Set Theory, 1630–1910*, Princeton University Press, Princeton 2000, s. 220–255.

Burn R.P. (1992), *Irrational Numbers in English Language Textbooks, 1890-1915: Constructions and Postulates for the Completeness of the Real Numbers*, „Historia Mathematica" 19, 1992, s. 158–176.

Cantor Georg (1872), *Über die Ausdehnung eines Satz aus der Theorie der trigonometrische Reihen*, „Mathematische Annalen" 5, 1872, s. 123–132.

Cantor Georg (1883), *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, [w:] [Cantor 1932], s. 165–208.

Cantor Georg (1895), *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, [w:] [Cantor 1932], s. 282–311.

Cantor Georg (1932), *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin 1932.

Capiński Marek, Cutland Neigl J. (1995), *Nonstandard Methods for Stochastic Fluid Mechanics*, World Scientific, Singapore 1995.

Carathéodory Constatin (1917), *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Teubner, Leipzig 1917; cytowane za: C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Chalsea Publishing Company, New York 1948.

Cesaro Ernesto (1904), *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Ifinitesimalrechnung*, Teubner, Leipzig 1904.

Cichoń Jacek, Kharazishvili Aleksander, Węglorz Bogdan (1995), *Subsets of the Real Line*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1995.

Claphan Christopfer, Nicholson James (2005), *Eudoxus of Cnidus*, [w:]

Ch. Claphan, J. Nicholson, *The Concise Dictionary of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford 2005, s. 157.

Coxeter H.S.M. (1967), *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, tł. R. Krasnodębski, PWN, Warszawa 1967.

Cohen Leon W., Ehrlich Gertrude (1963), *The Structure of the Real Number System*, Van Nonstrand, Princeton, New Jersey 1963.

Conway John (1994), *The Surreals and The Reals*, [w:] [Ehrlich 1994(a)], s. 93–103.

Conway John (2001), *On Numbers and Games*, AK Peters, Natick, Massachusetts 2001.

Cutland Neigl J. (2000), *Loeb Measures in Practice: Recent Advances*, Springer, Berlin 2000.

Czech Józef (1817), *Euklidesa początków geometryi ksiąg ośmioro, toiest sześć pierwszych, iedenasta i dwunasta z dodanemi przypisami dla pożytku młodzi akademickiej wytłumaczone przez Józefa Czecha. Po śmierci autora wydanie drugie z przydaną Trygonometryą Roberta Simsona przełożoną z angielskiego i figurami na miedzi rzniętymi tablic 10*, nakładem i drukiem Iózefa Zawadzkiego Typografa Imperatorskiego Wileńskiego Uniwer., Wilno 1817; reprint: Wydawnictwo Artystyczne i Filmowe, Warszawa 1981.

Dadaczyński Jerzy (2006), *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, BIBLOS, Tarnów 2006.

Dauben Joseph (1990), *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1990.

Dedekind Richard (1872), *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, wydanie szóste niezmienione, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1960; wydanie pierwsze: Braunschweig 1872; cytowane za: R. Dedekind, *Ciągłość i liczby niewymierne*, tł. R. Murawski, [w:] *Filozofia matematyki*, opr. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994, s. 136–149.

Dedekind Richard (1888), *Was sind und was sollen die Zahlen?*, wydanie dziewiąte niezmienione, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1961; wydanie pierwsze: Braunschweig 1888.

Dedekind Richard (1932), *Aus Briefen an R. Lipschitz*, [w:] R. Dedekind *Gesammelte mathematische Werke*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1932, t. III, s. 464–482; cytowane za: R. Dedekind, *Z korespondencji z Rudolfem Lipschitzem*, tł. R. Murawski, [w:] *Filozofia matematyki*, opr. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994, s. 149–156.

Dedekind Richard (1964), *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1964.

Dummett Michael (1991), *Frege. Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge Massachusetts 1991.

Ebbinghaus Heinz-Dieter, Hermes Hans, Hirzebruch Friedrich, Koecher Max, Mainzer Klaus, Neukirch Jüregen, Prestel Alexander, Remmert Reinhold (1995), *Numbers*, translated by H.L.S. Orde, Springer, New York 1995.

Edwards Charles H. (1979), *The Historical Development of the Calculus*, Springer, New York 1979.

Ehrlich Philip (ed.) (1994(a)), *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Kluwer, Dordrecht 1994.

Ehrlich Philip (1994(b)), *General Introduction*, [w:] [Ehrlich ed. 1994(a)], s. vii–xxxii.

Ehrlich Philip (1995), *Hahn's Über die Nichtarchimedischen Grössensysteme and the Development of the Modern Theory of Magnitudes and Numbers to Measure Them*, [w:] J. Hintikka (ed.), *From Dedekind to Gödel. Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1995, s. 165–213.

Ehrlich Philip (2006), *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes*, „Archive for History of Exact Sciences" 60, 2006, s. 1–121.

Engelking Ryszard (1989), *Topologia ogólna*, t. I–II, PWN, Warszawa 1989.

Euklides, *Elementy*, [w:] [Heath 1956].

Faltin F., Metropolis M., Rota G.-C. (1975), *The Real Numbers as a Wreath Product*, „Advances in Mathematics" 16, 1975, s. 278–304.

Fichtenholtz G.M (1985), *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, 1985.

Field Hartry H. (1980), *Science without Numbers*, Basil Blackwell, Oxford 1980.

Fisher Gordon (1994), *Veronese's Non-Archimedean Linear Continuum*, [w:] [Ehrlich 1994(a)], s. 107–145.

Fowler David (1999), *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*, Clarendon Press, Oxford 1999.

Fuchs L. (1963), *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press, Oxford 1963.

Gierulanka Danuta (1962), *Zagadnienie swoistości poznania matematycznego*, PWN, Warszawa 1962.

Goldstein Joel A. (2000), *A Matter of Great Magnitude: The Conflict over Arithmetization in 16th-, 17th- and 18th-Century English Editions of Euclid's Elements Books I Through VI (1561–1795)*, „Historia Mathematica" 27, 2000, s. 36–53.

Goldblatt Robert (1998), *Lectures on the Hyperreals*, Springer, New York 1998.

Gouvêa Fernando Q. (2000), *p-adic Numbers*, Springer, Berlin 2000.

Gödel Kurt (1964), *What is Cantor's continuum problem?*, [w:] P. Benacerraf, H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge 1983, s. 258–273.

Göksel Ağargün, Özkan Mehmet (2001), *A Historical Survey of the Fundamental Theorem of Arithmetic*, „Historia Mathematica" 28, 2001, s. 207–214.

Grattan-Guiness Ivor (1996), *Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them*, „Historia Mathematica" 23, 1996, s. 355–375.

Gurczyński Jacek (2004), *Alexius Meinong i Roman Ingarden o intencjonalności i przedmiotach fikcyjnych*, [w:] [Muszyński, Paśniczek 2004], s. 67–83.

Hale Bob (2000), *Reals by Abstraction*, „Philosophia Mathematica", t. 8 (3), 2000, s. 100–123.

Hale Bob (2002), *Real Numbers, Quantities, and Measurement*, „Philosophia Mathematica", t. 10 (3), 2002, s. 304–323.

Hartshorne Robin (2000), *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, 2000.

Hausdorff Felix (1937), *Grundzüge der Mengenlehre*, von Veit, Leipzig 1914; wydanie drugie: F. Hausdorff *Mengenlehre*, Leipzig 1937; cytowane za: F. Hausdorff, *Set Theory*, translated from the German by J.R. Aumann, et al., Chelsea Publishing Company, New York 1991.

Heath Thomas L. (1956), *Euclid. The Thirteen Books of The Elements*, t. I–III, translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Dover, New York 1956 (reprint wydania z roku 1926); wydanie pierwsze: Cambridge University Press, Cambridge 1908; wydanie drugie („poprawione i rozszerzone"): Cambridge 1926.

Hilbert David (1900), *Über den Zahlbegriff*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinignung" 8, 1900, s. 180–184; cytowane za: D. Hilbert, *Über den Zahlbegrieff*, [w:] [Hilbert 1930], s. 241–246.

Hilbert David (1930), *Grundlagen der Geometrie*, wydanie siódme, Teubner, Leipzig 1930; wydanie pierwsze: Leipzig 1899.

Hilbert David (1980), *Foundations of Geometry*, translated by Leo Unger from the Tenth German Edition, Open Court, La Salle, Illinois 1980.

Hobson Ernest W. (1921), *The Theory of Functions of a Real Variable and The Theory of Fourier's Series*, t. I, wydanie drugie, Cambridge University Press, Cambridge 1921; wydanie pierwsze: Cambridge 1907.

Horsten Leon (2007), *Philosophy of Mathematics*, http://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics.

Huntington Edward V. (1905), *The Continuum as a Type of Order: an*

*Exposition of the Modern Theory*, „The Annals of Mathematics", Second Series, t. 6 (4), 1905, s. 151–184, t. 7 (1), 1905, s. 15–43.

Ingarden Roman (1931), *Das literarische Kunstwerk. Eine Untersuchung aus dem Grenzgebiet der Ontologie, Logik und Literaturwissenschaft*, Max Niemeyer, Halle 1931.

Ingarden Roman (1987), *Spór o istnienie świata*, t. I, *Ontologia egzystencjalna*, t. II, cz. 1 i 2, *Ontologia formalna*, wydanie trzecie, zmienione, przygotowała i partie tekstu z języka niemieckiego przetłumaczyła D. Gierulanka, PWN, Warszawa 1987; wydanie pierwsze: PAU, Kraków, 1947/48; wydanie drugie: PWN, Warszawa 1960/61; wydanie niemieckie: *Der Streit um die Existenz der Welt*, Max Niemeyer, Tübingen 1964/65.

Ingarden Roman (1988), *O dziele literackim*, tł. M. Turowicz, wydanie drugie, PWN, Warszawa 1988; wydanie pierwsze: Warszawa 1960; podstawa tłumaczenia: [Ingarden 1931].

Ingarden Roman (2000), *Szkice z filozofii literatury*, wydanie drugie, Znak, Kraków 2000; wydanie pierwsze: Spółdzielnia Wydawnicza „Polonista", Łódź 1947.

Jacobson Nathan (1969), *Lectures in Abstract Algebra*, t. III, Von Nostrad, Toronto 1969.

Jeagerman M. (1965), *The Axiom of Choice and Two Definitions of Continuity*, „Bulletin de L'Acadèmie Polonaise des Sciences. Sèrie des science math., astr., et phys.", t. XIII (10), s. 699–704.

Joyce David E. (1997), *Euclid's Elements*, http://aleph0.clarku.edu/˜djoyce/java/elements/elements.html.

Keisler Jerome H. (1994), *The Hyperreal Line*, [w:] [Ehrlich 1994(a)], s. 207–237.

Kitcher Philip (1984), *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, New York 1984.

Kline Moris (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York 1972.

Knorr Wilbur R. (1975), *The Evolution of the Euclidean Elements*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1975.

Knorr Wilbur R. (1996), *The Wrong Text of Euclid: On Heiberg's Text and its Alternative*, „Centaurus" 38, s. 208–276.

Koecher Max, Remmert Reinhold (1995), *The Isomorphism Theorems of Frobenius, Hopf and Gelfand-Mazur*, [w:] [Ebbinghaus et al. 1995], s. 221–247.

Kołodziejczyk Leszek A., Szczepkowski Rafał (2005(a)), *Euklides, Elementy, Księga I*, „Zagadnienia Naukoznawstwa" 2(164), 2005, s. 274–312.

Kołodziejczyk Leszek A., Szczepkowski Rafał (2005(b)), *Komentarz*, „Zagadnienia Naukoznawstwa" 2(164), 2005, s. 313–323.

Kordos Marek (1994), *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.

Kostin W. (1952), *Podstawy geometrii*, tł. J. Turkowska, PZWS, Warszawa 1952.

Kowalewski G. (1923), *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*, tł. I. Roliński, E. Wende i S-ka, Warszawa 1923.

Król Zbigniew (2007), *Wstęp do starożytnych teorii proporcji*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki", t. LII (1), 2007, s. 77–96.

Krysztofiak Wojciech (1999), *Problem opozycji realizmu i idealizmu filozoficznego*, Wydawnictwo UMCS, Lublin 1999.

Krysztofiak Wojciech (2002), *Matematyka i intensjonalność*, „Filozofia Nauki" 3–4, 2002, s. 123–148.

Kulczycki Stefan (1973), *Z dziejów matematyki greckiej*, PWN, Warszawa 1973.

Kunen Kenneth (1980), *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, NHPC, Amsterdam 1980.

Kuratowski Kazimierz (1971), *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1971.

Kuratowski Kazimierz (1973), *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1973.

Kuratowski Kazimierz, Mostowski Andrzej (1978), *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa 1978.

Kurosz A.G. (1965), *Algebra ogólna*, tł. W. Holsztyński, PWN, Warszawa 1965.

Landau Edmund (1930), *Grundlagen der Analysis*, Teubner, Leipzig 1930; cytowane za: E. Landau, *Foundations of Analysis*, translated by F. Steinhard, Chelsea, New York 1966.

Leja Franciszek (1979), *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1979.

Levy Azriel (1979), *Basic Set Theory*, Springer, Berlin 1979.

Lindstrøm Tom (1988), *An Invitation to Nonstandard Analysis*, [w:] N. Cutland, *Nonstandard Analysis and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge 1988, s. 1–105.

Maddy Penelope (1992), *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford 1992.

Mainzer Klaus (1995(a)), *Natural Numbers, Integers, and Rational Numbers*, [w:] [Ebbinghaus et al. 1995], s. 9–26.

Mainzer Klaus (1995(b)), *Real Numbers*, [w:] [Ebbinghaus et al. 1995], s. 27–53.

Markiewicz Henryk (1974), *Problem miejsc nieookreślenia w dziele literackim*, [w:] H. Markiewicz, *Nowe przekroje i zbliżenia*, PIW, Warszawa 1974, s. 239–258.

Maurin Krzysztof (1991), *Analiza*, t. I–II, PWN, Warszawa 1991.

McCarty David Ch. (1995), *The Mysteries of Richard Dedekind*, [w:] J. Hintikka (ed.), *From Dedekind to Gödel. Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1995, s. 53–96.

Mendell Henry (2007), *Two Traces of Two-Step Eudoxan Proportion Theory in Aristotle: a Tale of Definitions in Aristotle with a Moral*, „Archive for History of Exact Sciences" 61, 2007, s. 3–37.

Mioduszewski Jerzy (1996), *Ciągłość. Szkice z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1996.

Mioduszewski Jerzy (2003), *Wykłady z topologii. Zbiory spójne i kontinua*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2003.

Mitscherling Jeff (1997), *Roman Ingarden's Ontology and Aesthetics*, University of Ottawa Press, Ottawa 1997

Mitscherling Jeff (2001), *Schematyczność*, [w:] [Nowak, Sosnowski 2001], s. 246–248.

Muszyński Zbysław, Paśniczek Jacek (red.) (2004), *Intencjonalność jako kategoria filozofii umysłu i filozofii języka*, Wydawnictwo UMCS, Lublin 2004.

Mostowski Andrzej (1969), *Constructible Sets with Applications*, NHPC--PWN, Amsterdam–Warszawa 1969.

Mycielski J., Świerczkowski S. (1964), *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness*, „Fundamenta Mathematicae" LIV, 1964, s. 67–71.

Nabokov Vladimir (1991), *Lolita*, tł. R. Stiller, PIW, Warszawa 1991.

Narkiewicz Witold (1977), *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 1977.

Neukrich Jürgen (1995), *The p-Adic Numbers*, [w:] [Ebbinghaus et al. 1995], s. 155–178.

Nikolić Milenko (1974), *The relation between Eudoxos' theory of proportions and Dedekind's theory of cuts*, [w:] R.S. Cohn, J.J. Stachel, M.W. Wartofsky (eds.), *For Dirk Sturik*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1974, s. 225–243.

Niven Ivan (1956), *Irrational Numbers*, John Wiley and Sons, Rahway, New Jersey 1956.

Niven Ivan (1969), *Formal Power Series*, „American Mathematical Monthly" 76, 1969, s. 871–889.

Nowak Andrzej J., Sosnowski Leszek (red.) (2001), *Słownik pojęć filozoficznych Romana Ingardena*, Universitas, Kraków 2001.

Paśniczek Jacek (1984), *Struktura ontologiczna przedmiotów nieistniejących: Meinong a Ingarden*, „Studia Filozoficzne" 4, 1984, s. 27–41.

Perzanowski Jerzy, Pietruszczak Andrzej (red.) (2003), *Od teorii literatury do ontologii świata*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2003.

Poczobut Robert (2000), *Spór o zasadę niesprzeczności*, Towarzystwo Naukowe KUL, Lublin 2000.

Poczobut Robert (2001), *Idea III – Pojęcie idealne*, [w:] [Nowak, Sosnowski 2001], s. 90–92.

Pogorzelski Witold (1951), *Analiza matematyczna*, Czytelnik, Warszawa 1951.

Poincaré Henri (1902), *Review of Hilbert's Foundations of Geometry*, translated for the American Mathematical Society by E.V. Huntington (1903), [w:] [Ehrlich 1994(a)], s. 147–168.

Pontriagin Lew S. (1961), *Grupy topologiczne*, tł. R. Molski, P. Szeptycki, PWN, Warszawa 1961.

Prestel Alexander (1995), *Nonstandard Analysis*, [w:] [Ebbinghaus et al. 1995], s. 305–327.

Priest Graham (2003), *Meinongianism and the Philosophy of Mathematics*, „Philosophia Mathematica", t. XI(1), 2003, s. 3–15.

Quine Wilard (1951), *Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1951; cytowane za: *Logika matematyczna*, tł. L. Koj, PWN, Warszawa 1974.

Rasiowa Helena (1979), *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa 1979.

Reck Erich H. (2003), *Dedekind's structuralism: an interpretation and partial defence*, „Synthese" 137, 2003, s. 369–419.

Reinach Adolf (1911), *Zur Theorie des negativen Urteils*, [w:] A. Pfänder (ed.), *Münchener Philosophische Abhandlungen. Festschrift für Theodor Lipps*, J.A. Barth, Leipzig 1911, s. 196–254; cytowane za: A. Reinach, *Przyczynek do teorii sądu negatywnego*, tł. W. Galewicz, [w:] W. Stróżewski (red.), *Od Husserla do Levinasa. Wybór tekstów z ontologii fenomenologicznej*, Kraków 1989, s. 64–79.

Remmert Reinhold 1995, *The Fundamental Theorem of Algebra*, [w:] [Ebbinghaus et al. 1995], s. 97–122.

Robert Alain M. (2000), *A Course in p-adic Analysis*, Springer, New York 2000.

Robinson Abraham (1966), *Non-standard Analysis*, NHPC, Amsterdam 1966.

Rosner Katarzyna (1997), *Ingarden Roman Witold, Das literarische Kunstwerk. Eine Untersuchung aus dem Grenzgebiet der Ontologie, Logik und Literaturwissenschaft*, [w:] B. Skarga (red.) *Przewodnik po literaturze filozoficznej XX wieku*, t. I, PWN, Warszawa 1997, s. 177–185.

Rota Gian-Carlo (1997), *The Phenomenology of Mathematical Proof*, „Synthese" 111, 1997, s. 183–196.

Rudin Walter (1982), *Podstawy analizy matematycznej*, tł. W. Wojtyński, PWN, Warszawa 1982.

Russell Bertrand (1919), *Introduction to Mathematical Philosophy*, Allen & Unwin, London 1919; cytowane za: *Wstęp do filozofii matematyki*, tł. C. Znamierowski, PWN, Warszawa 1958.

Russo Lucio (1998), *The Definitions of Fundamental Geometric Entities Contained in Book I of Euclid's Elements*, „Archive for History of Exact Sciences" 52, 1998, s. 195–219.

Rygalski Andrzej (1993), *Zmienna zawartości idei – koncepcja zmiennej w ontologii Romana Ingardena*, „Kwartalnik Filozoficzny", t. XXI (3), 1993, s. 45–64.

Rygalski Andrzej (2001), *Idea IV – Znaczenia, zmienna*, [w:] [Nowak, Sosnowski 2001], s. 93–96.

Schechter Eric (1997), *Handbook of Analysis and Its Foundations*, Academic Press, San Diego 1997.

Schlimm Dirk (2000), *Richard Dedekind: Axiomatic Foundations of Mathematics*, Master's thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh 2000; http://www.phil.cmu.edu/dschlimm/schlimm-dedekind-masters.pdf.

Schuster Peter, Berger Ulrich, Osswald Horst (eds.) (2001), *Reuniting Antipodies – Constructive and Nonstandard Views of the Continuum*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2001.

Shapiro Stewart (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, New York 1997.

Shapiro Stewart (2000(a)), *Thinking about mathematics*, Oxford University Press, New York 2000.

Shapiro Stewart (2000(b)), *Frege Meets Dedekind: A Neologistic Treatment of Real Analysis*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", t. 41 (4), 2000, s. 335–364.

Sieklucki Karol (1978), *Geometria i topologia. Część I Geometria*, PWN, Warszawa 1978.

Sierpiński Wacław (1958), *Cardinal and Ordinal Numbers*, PWN, Warszawa 1958.

Sierpiński Wacław (1966), *Arytmetyka teoretyczna*, PWN, Warszawa 1966.

Simons Peter M. (1987), *Frege's Theory of Real Numbers*, „History and Philosophy of Logic" 8, 1987, s. 25–44.

Sinaceur Hourya (1994), *Calculation, Order and Continuity*, [w:] [Ehrlich 1994(a)], s. 191–206.

Smith Barry (1975), *The Ontogenesis of Mathematical Objects*, „Journal of the British Society for Phenomenology", t. 6 (2), 1975, s. 91–101.

Smith Barry (1976), *Historicity, Value and Mathematics*, „Analecta Husserliana", t. IV, 1976, s. 219–239.

Snow Joanne E. (2003), *Views on the Real Numbers and the Continuum*, „The Review of Modern Logic", t. 9 (1–2), 2001–2003, s. 95–113.

Sosnowski Leszek (2001), *Przedmiot intencjonalny*, [w:] [Nowak, Sosnowski 2001], s. 218–223.

Stein Howard (1990), *Eudoxos and Dedekind: on the Ancient Greek Theory of Ratios and its Relation to Modern Mathematics*, „Synthese" 84, 1990, s. 163–211.

Strelka Joseph P. (1990), *Roman Ingarden's 'Points of Indeterminatness': A Consideration of Their Practical Application to Literary Critisism*, „Analecta Husserliana", t. XXX, 1990, s. 157–169.

Struik Dirk J. (1960), *Krótki zarys historii matematyki. Do końca XIX w.*, tł. P. Szeptycki, PWN, Warszawa 1960.

Stróżewski Władysław (1992), *Wykłady o Platonie. Ontologia*, nakładem Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1992.

Stróżewski Władysław, Węgrzecki Adam (red.) (1995), *W kręgu filozofii Romana Ingardena*, PWN, Warszawa 1995.

Sylvan Richard (2003), *The Importance of Nonexistent Objects and of Intensionality in Mathematics*, „Philosophia Mathematica" XI (1), 2003, s. 20–52.

Szczepańska Anita (1989), *Estetyka Romana Ingardena*, PWN, Warszawa 1989.

Tarski Alfred (1936), *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*, Książnica Atlas, Lwów–Warszawa 1936.

Tarski Alfred (1951), *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, University of California Press, Berkeley, California 1951.

Tarski Alfred (1956), *What is Elementary Geometry?* [w:] L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski (eds.), *The Axiomatic Method*, NHPC, Amsterdam 1956, s. 16–29.

Taschner Rudolf (2005), *The Continuum*, Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden 2005.

Thomas Robert S.D. (2000), *Mathematics and Fiction I: Identification*, „Logique & Analyse" 171–172, 2000, s. 301–340.

Thomas Robert S.D. (2002), *Mathematics and Fiction II: Analogy*, „Logique & Analyse" 177–178, 2002, s. 185–228.

Thomasson Amie (2003), *Roman Inagrden*, http://plato.stanford.edu/entries/ingarden.

Tyszczyk Andrzej (2007), *Od strony wartości. Studia z pogranicza teorii literatury i estetyki*, Wydawnictwo KUL, Lublin 2007.

Veblen Oswald (1905), *Definition in terms of order alone in the linear continuum and in well-ordered sets*, „Transactions of the American Mathematical Society" 6, 1905, s. 165–171.

Weber Heinrich (1895), *Lehrbuch der Algebra*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1895; wydanie drugie: Braunschweig 1898; cytowane za: H. Weber, *Podręcznik algebry wyższej*, tł. S. Dickstein, Wydawnictwo Kasy im. Mianowskiego, Warszawa 1925.

Weyl Herman (1949), *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, Princeton 1949.

Węgrzecki Adam (red.) (1995), *Roman Ingarden a filozofia naszego czasu*, Polskie Towarzystwo Filozoficzne, Kraków 1995.

Widomski Jacek (1996), *Ontologia liczby. Wybrane zagadnienie z ontologii liczby w starożytności i średniowieczu*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1996.

Więsław Witold (1995), *Powstanie liczb niewymiernych*, „Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej", seria: Matematyka–Fizyka, z. 76, 1995, s. 339–361.

Więsław Witold (1997), *Matematyka i jej historia*, Nowik, Opole 1997.

Wilder Reymond L. (1956), *Foundations of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1956.

Woleński Jan (2001), *Język*, [w:] [Nowak, Sosnowski 2001], s. 134–138.

Wójcik Wiesław (2000), *Nowożytne wizje nauki uniwersalnej a powstanie teorii kontinuów*, Wydawnictwa IHN PAN, Studia Copernicana XXXVIII, Warszawa 2000.

Wójtowicz Krzysztof (2003), *Spór o istnienie w matematyce*, Semper, Warszawa 2003.

Wygodski M.J. (1956), *„Elementy" Euklidesa*, [w:] *O Elementach Euklidesa. Zbiór artykułów*, tł. J. Turkowska, PWN, Warszawa 1956, s. 7–105.

Zaremba Stanisław (1912), *Arytmetyka teoretyczna*, Skład Główny w Księgarni Spółki Wydawniczej Polskiej, Akademia Umiejętności, Kraków 1912.

Żegleń Urszula (1996), *Meinong and Ingarden on Negative Judgements*, „Axiomathes", t. VII (1–2), 1996, s. 267–277.