

Piotr Błaszczyk Kazimierz Mrówka

EUKLIDES

E L E M E N T Y

Księgi V – VI
tłumaczenie i komentarz



Copernicus Center

P R E S S

KRAKÓW 2013

Recenzent: prof. dr hab. Roman Duda

Na okładce i w ilustracjach wykorzystano motywy graficzne z następujących edycji *Elementów*:

- *Orontii Finaei Delphinatis, Regii Mathematicarum Lutetiae Professoris, In sex priores libros Geometricorum elementorum Euclidis Megaresis demonstrationes, Recens aucte, & emendata unà cum ipsium Euclidis textu græco, & interpretatione latina Bartholamæi Zamberti Venti. Omnia ad fidem geometricam per eunde Orontium recognita*, Parisiorum 1544.
- *Euclidis Elementorum. Libri XV*, Romae 1545.
- *Euclidis Elementorum Geometricorum Libri Sex*, Conversi in Latinum Sermone a Ioach. Camerario, 1549.
- *The Elements of Geometrie of the most ancient Philosopher Euclid of Megara*, Faithfully (now first) translated into the Englishe toung, by H. Billingsley, Citizen of London. Whereunto are annexed certaine Scholies, Annotations, and Inventions, of the best Mathematicians, both of time past, and in this our age. With a very fruitfull Preface made by M. I. Dee, London 1570.

Przedstawienia Euklidesa na podstawie:

- ryciny z książki André Thévet, *Les vrais pourtraits et vies des hommes illustres*, Paris 1584.
- Justus van Gent, *Euklidi Megaren*, tempera na desce, 1474, Urbino.
- Rafael Santi, *Causarum cognitatio*, fresk, 1510, Watykan.

ISBN 978-83-7886-013-6

Copyright©by Piotr Błaszczuk & Kazimierz Mrówka

Copyright©by Copernicus Center Press Sp. z o.o.

Tłumaczenie przygotowane w ramach projektu

Ciągłość i liczby rzeczywiste. Eudoxos-Dedekind-Conway, NN101 287639

www.eudoxos.pl

Kraków 2013

Redakcja językowa, techniczna, korekta: Maria Szumska

Skład, łamanie: Maciej Major

Okładka, opracowanie graficzne, rysunki: Katarzyna Kopańska



Copernicus Center

P R E S S

Drukarnia: Colonel S.A.



figure rectiligne Je
figure rectiligne, qua
de angles d'icelle figure qui s
touchent par chacun costé d'icelle
en la quelle elle est descrite.
FORCADEL.
Certainement si lon prent vn
point en vn chacun costé d'vne
figure rectiligne. & on meine vne

WSTĘP

EUKLIDES I JEGO *Elementy*.

RYS HISTORYCZNY

1 Starożytność wydała co najmniej dwóch wielkich Euklidesów: twórcę szkoły megarejskiej, współczesnego Platonowi, oraz geometrę z Aleksandrii¹. Różnica miejsca i czasu narodzin powinna być dostateczną przesłanką, by nie pomylić dwóch wspomnianych przedstawicieli kultury greckiej. Prawdopodobnie za sprawą rzymskiego pisarza Waleriusza Maksymusa, żyjącego w I wieku p.n.e., w późniejszym czasie rozpowszechniło się mniemanie, jakoby Euklides z Aleksandrii był tym samym myślicielem co Euklides z Megary. Waleriusz Maksymus pomylił zresztą trzy postaci: Euklidesa z Megary, tego z Aleksandrii oraz żyjącego w czasach Platona matematyka i astronoma Eudoksosa z Knidos.

O samym autorze *Elementów* wiemy niewiele. Nie można z całą pewnością stwierdzić, że Aleksandria była miejscem narodzin matematyka, za to na pewno była najważniejszym miejscem jego działalności. Być może jeszcze przed przybyciem do Aleksandrii Euklides kształcił się w Atenach. Żyjący w V wieku neoplatonczyk Proklos z Lycji, który dostarcza ważnych informacji na temat życia i dzieła Euklidesa, w ogóle nie wspomina o miejscu narodzin autora *Elementów*. Z kolei Pappus z Aleksandrii, matematyk działający na przełomie III i IV wieku, pisze wprawdzie o „Euklidesie z Aleksandrii”, ale jak słusznie zauważa Bernard Vitrac, nie jest to jednoznaczne wskazanie miejsca narodzin, lecz miejsca pobytu². Wspomniany neoplatonczyk okres działalności Euklidesa umieszcza między czasem aktywności uczniów Platona a dokonaniami Archimedesza. Na podstawie neoplatonickiego źródła można stwierdzić, że Euklides urodził się w pierwszej połowie IV wieku p.n.e., a jego twórcze życie zbiegło się z czasem panowania Ptolemeusza I Sotera, generała Aleksandra Wielkiego. Zmarł natomiast w drugiej połowie III wieku p.n.e. Żył więc około 80 lat.

Pappus wspomina o Euklidesie w kontekście wzmianki o Apoloniuszu, który miał być jednym z uczniów geometry w Aleksandrii. Możliwe więc, że duchowe życie Euklidesa rozwijało się według następującego scenariusza: najpierw pobyt w szkołach filozoficznych w Atenach, następnie, na zaproszenie Ptolemeusza, przybycie do Aleksandrii, rozwój

¹ Można tu wspomnieć również archonta Euklidesa z Aten, żyjącego w V wieku p.n.e.

² Zob. [Vitrac 1990, s. 15].

działalności naukowo-dydaktycznej w Muzejonie oraz w Bibliotece. To prawdopodobnie właśnie Euklides zapoczątkował tradycję szkoły matematycznej w Aleksandrii.

Starożytni autorzy przytaczają moralizatorskie opowieści związane z Euklidesem. Pierwszą cytuje Proklos: Ptolemeusz zapytał kiedyś matematyka, czy nie ma krótszej drogi do geometrii niż ta wyznaczona w *Elementach*. Euklides odpowiedział: „Do Geometrii nie ma prostej drogi zarezerwowanej dla królów”³. Inną opowiastkę przytacza Stobajos: pewien początkujący uczeń chciał wiedzieć, jakie korzyści mógłby wyciągnąć z matematyki. Na to Euklides zamiast do ucznia zwrócił się do niewolnika: „Daj mu trzy obole [...], ponieważ on również powinien czerpać korzyść z nauki!”⁴.

2 Euklides był autorem wielu traktatów, z których część wykracza poza zagadnienia matematyczne. Wszystkie inne jego dzieła pozostały jednak w cieniu najważniejszego – *Elementów*.

Powszechne jest przekonanie, że *Elementy* są sumą wiedzy z zakresu matematyki. Vitrac odrzuca tę klasyczną opinię. Według francuskiego wydawcy najważniejsze dzieło Euklidesa nie zawiera „całości wiedzy”, nie jest nawet „skrótem całości wiedzy”⁵. Nie jest również pewne, czy *Elementy* były traktatem przeznaczonym wyłącznie na użytek szkoły, chociaż z czasem rzeczywiście stały się podręcznikiem geometrii. Można przypuścić, że wykraczały poza ramy nauczania w Muzejonie, będąc dziełem matematycznym – powiedzielibyśmy dziś – naukowym i zarazem dydaktycznym.

Tytuł dzieła, Στοιχεῖα, odsyła do pojęcia στοιχος, „rząd”, „szereg”, „porządek”, oraz στοιχεῖον, „jeden z szeregu”, „jeden z serii”. Ukryte jest tu odwołanie do:

1. Alfabetu greckiego, którego litery tworzą również „elementy” słów i całego języka, a także języka złożonego „z prostego dźwięku mowy”.

2. Fizyki. W tym sensie „element” oznacza cząstkę, na którą dzieli się materia, ale ona sama jest już niepodzielna. Jako pierwszy o czterech podstawowych elementach mówił Empedokles, z tą różnicą, że nie używał pojęcia στοιχεῖα, lecz ῥιζώματα – „korzenie”. Cztery elementy konstytuujące świat: ogień, powietrze, wodę i ziemię wymienia natomiast Platon w *Timajosie*.

³ [Proclus 68, 13–16].

⁴ [Stobaeus II, 228, 25–29].

⁵ Zob. [Vitrac 1990, s. 84].

3. Geometrii. Arystoteles w elementach dostrzega twierdzenia zawarte w dowodach innych twierdzeń. Proklos w swym komentarzu do *Elementów* Euklidesa odróżnia twierdzenia będące „elementami” od tych „elementarnych”. Elementami są twierdzenia, które warunkują poznanie i zrozumienie innych twierdzeń, twierdzenia niezbędne do zbudowania wiedzy, podobnie jak wspomniane w punkcie 1 litery alfabetu potrzebne do zbudowania mowy oraz w punkcie 2 elementy niezbędne do zbudowania świata. Twierdzenia elementarne nie odgrywają roli fundamentalnych twierdzeń naukowych, wykorzystywanych w dowodach innych twierdzeń.

3 Pierwszym wydawcą dzieła Euklidesa był matematyk Teon z Aleksandrii, „człowiek z Muzejonu”, jak go nazywa Suda, żyjący w IV wieku, a zmarły na początku V wieku. Jego córką była słynna Hypatia. Data wydania *Elementów* przypada w przybliżeniu na rok 364.

W swym komentarzu do *Almagest* Ptolemeusza Teon potwierdza, że jest wydawcą Στοιχεῖα, jednocześnie wspominając o zmianach, jakie wprowadził do twierdzenia VI.33⁶. Aż do końca XVIII wieku wydanie Teona było uznawane za najstarsze i stanowiło główny punkt odniesienia. Dopiero w 1808 roku François Peyrard odkrył manuskrypt dzieła Euklidesa pozbawiony wspomnianej poprawki Teona, z czego wywnioskował, że znaleziony tekst jest starszy od wydania scholarchy z Aleksandrii. W latach 1883–1888 duński uczony Johan Ludvig Heiberg opublikował edycję, która do dziś uznawana jest za klasyczną i z której korzystają niemal wszyscy badacze i wydawcy Euklidesa. Heiberg w swym wydaniu wykorzystał zarówno manuskrypt odkryty przez Peyrarda, oznaczony *P = Codex Vaticanus, Gr. 190*, jak i manuskrypty oparte na wydaniu Teona.

Najcenniejsze dwa manuskrypty zawierające 13 ksiąg *Elementów* pochodzą z IX wieku. Znajdują się w Bibliotece Watykańskiej oraz w Bodleian Library w Oksfordzie. W sumie można wymienić około 80 rękopisów zawierających całość lub poszczególne części dzieła Euklidesa.

Grecki tekst *Elementów*, który przez Bizancjum dotarł do Arabów, został przetłumaczony na język arabski za czasów panowania kalifa Haruna ar-Raszida około 800 roku. W roku 1120 angielski mnich Adelard z Bath przełożył arabską wersję na język łaciński. Kolejny łaciński przekład pojawił się w 1260 roku za sprawą Campanusa z Novary, który prawdopodobnie korzystał także z przekładu Adelarda z Bath. Dzieło Euklidesa w wersji Campanusa było pierwszym drukowanym wydaniem

⁶ Zob. [Vitrac 1990, s. 45].

Elementów. Ukazało się w roku 1482 w Wenecji pt. *Preclarissimus liber elementorum Euclidis*. W Wenecji ukazała się jeszcze jedna ważna edycja, przygotowana przez Nicolla Tartaglię w 1543 roku. Do dziś *Elementy* ukazały się ponad 1000 razy. Jedynie Biblia może się poszczycić większą liczbą wydań.

Pierwszy polski – chociaż niepełny – przekład pt. *Euklidesa początków geometryi ksiąg ośmiuro*, wydany w Wilnie w 1807 roku, wyszedł spod pióra Józefa Czecha. Wydanie to jest oparte na dwujęzycznej wersji, łacińskiej i angielskiej, autorstwa Roberta Simsona z roku 1756. Podobnie jak w XIX wieku Czech korzystał z angielskiego wydania, nowy projekt polski odwołuje się do anglojęzycznej, popularnej w XX wieku edycji sir Thomasa Heatha. Autorem zbiorowym przekładu opartego na wersji angielskiej jest młodzież gimnazjalna i licealna skupiona wokół „Projektu Badawczego *Księgi Euklidesa*” pod patronatem Oddziału Krakowskiego Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki oraz Grupy Roboczej SNM „Geometria CABRI”⁷. Warto w tym miejscu podkreślić, że mimo iż Heath jest wielkim autorytetem w dziedzinie historii matematyki starożytnej, dosyć swobodnie traktuje on tekst grecki *Elementów*. Naszym zdaniem najlepszą obecnie anglojęzyczną wersją tego dzieła jest *Euclid’s Elements of Geometry* autorstwa Richarda Fitzpatricka z roku 2007⁸. Drugim niezwykle ważnym współczesnym wydaniem jest czterotomowe *Euclide. Les Éléments* Bernarda Vitrac’a, które ukazało się w Paryżu w latach 1990–2001. Dzieło Vitrac’a jest też najważniejszym źródłem, z którego czerpaliśmy, przygotowując niniejszy rys historyczny.

NOTA EDYTORSKA

1 *Euclidis Opera Omnia* zostały wydane przez Johana Ludviga Heiberga i Heinricha Mengera w latach 1883–1916. Od czasu ukazania się pozycja ta stanowi kanoniczną postać dzieł Euklidesa. W latach 1883–1888 jako jej pierwsze tomy wydano *Euclidis Elementa*. W czterech pierwszych zamieszczono Księgi I–XIII *Elementów*, w piątym – scholia oraz Księgi XIV–XV, których autorstwo niegdyś przypisywano Euklidesowi⁹. Obok

⁷ Pracę można śledzić na stronie internetowej: www.matematycy.interklasa.pl/euklides/index.html.

⁸ Całe wydanie zamieszczone jest w Internecie pod adresem: www.farside.ph.utexas.edu/euclid.html.

⁹ „W pewnych manuskryptach greckich przekazujących *Elementy* Euklidesa znajdujemy nie tylko 13 ksiąg uznanych w całości za autentyczne, lecz także dwie dodat-

tekstu greckiego wydanie to zawiera także łacińskie tłumaczenie dokonane przez Heiberga. Podstawę prezentowanego przekładu Ksiąg V–VI stanowi tekst grecki zamieszczony w drugim tomie *Euclidis Elementa*¹⁰.

Zgodnie z tradycją współczesnych tłumaczeń *Elementów* interpolacje w wydaniu Heiberga podajemy w nawiasach kwadratowych. Nie odbiegając też od współczesnych wersji przekładów, nasz przekład uzupełniamy, dodając pojedyncze słowa czy wyrażenia. Ingerencje te sprawdzają się w zasadzie do dodania czasownika „jest” wszędzie tam, gdzie jego użycia wymaga składnia. Wspomniane dodatki zapisujemy w nawiasach okrągłych.

Podmiot domyślny często występujący w tłumaczeniu Księgi V oznacza „wielkość” lub „wielkości”. Księga VI jest pod tym względem bardziej zróżnicowana i nierzadko w domyśle pozostaje rodzaj figury geometrycznej. Tłumacze w takich okolicznościach zwykle wspomagają czytelnika, stosując dopowiedzenia, traci jednak na tym charakterystyczna dla stylu Euklidesa lapidarność. W naszym wydaniu wszystkie dopowiedzenia zostały przeniesione do komentarzy. W schematach twierdzeń, stosując odpowiednie symbole, zaznaczamy, czy w danym zdaniu podmiotem jest kąt, trójkąt czy odcinek.

Do tradycji XX-wiecznych tłumaczeń *Elementów* należy wskazywanie twierdzeń, na które Euklides powołuje się w dowodach. Jest to zaznaczane albo na marginesach, albo w samym tekście, a wówczas w nawiasie kwadratowym podawany jest numer księgi (zapisany cyframi rzymskimi) oraz numer twierdzenia (zapisany cyframi arabskimi). Tak postępują Heiberg (w tłumaczeniu łacińskim), Heath, Vitrac oraz Fitzpatrick¹¹. Zabieg ten ma charakter dydaktyczny i świadomie z niego rezygnujemy. W *Elementach* twierdzenia i definicje są wprawdzie przywoływane, ale przez dosłowne cytowanie tez albo charakterystycznych fraz i ten zabieg językowy oddajemy w tłumaczeniu. Odniesienia do definicji i twierdzeń zaznaczamy natomiast w schematach zamieszczonych w komentarzu. Odnotowujemy przy tym tylko te, które znajdujemy w tekście, dlatego nasze opisy twierdzeń różnią się czasami od tych zaproponowanych przez Heatha, Vitraca czy Fitzpatricka.

kowe księgi tradycyjnie określane jako XIV i XV. Odnajdujemy je również w wielu arabskich i łacińskich manuskryptach, w średniowiecznych wersjach traktatu oraz we wszystkich pełnych wydaniach i przekładach w renesansie. W ten oto sposób wielu dawnych czytelników znało Euklidesa w 15 księgach. [...] Nie ma wątpliwości, że chodzi o części nieautentyczne, dołączone do traktatu Euklidesa w procesie przekazu” [Vitrac, Djebbar 2011, s. 31].

¹⁰ Zob. [Heiberg 1884].

¹¹ Vitrac stosuje w tym celu okrągłe nawiasy.

W edycji Heiberga tekst grecki wraz z oznaczeniami „wielkości” oraz figur geometrycznych pisany jest kursywą. W przekładzie łacińskim zasadniczy tekst podany jest antykwą, zaś oznaczenia, podobnie jak wzory matematyczne, które Heiberg wprowadza do tłumaczenia w miejsce stale powtarzanych fraz, takich jak trójkąt, kąt itp., pisane są wielkimi literami i kursywą. W niniejszym przekładzie dla oznaczenia „wielkości” w Księdze V, a później obiektów geometrycznych w Księdze VI, używamy wielkich liter pisanych antykwą. To świadome odstępstwo od zwyczaju przyjętego w nowożytnych przekładach, jak i od funkcjonującego w samej matematyce, mniej więcej od XVI wieku, zwyczaju zapisywania znaków matematycznych kursywą. Podobne rozwiązanie przyjął też Vitrac.

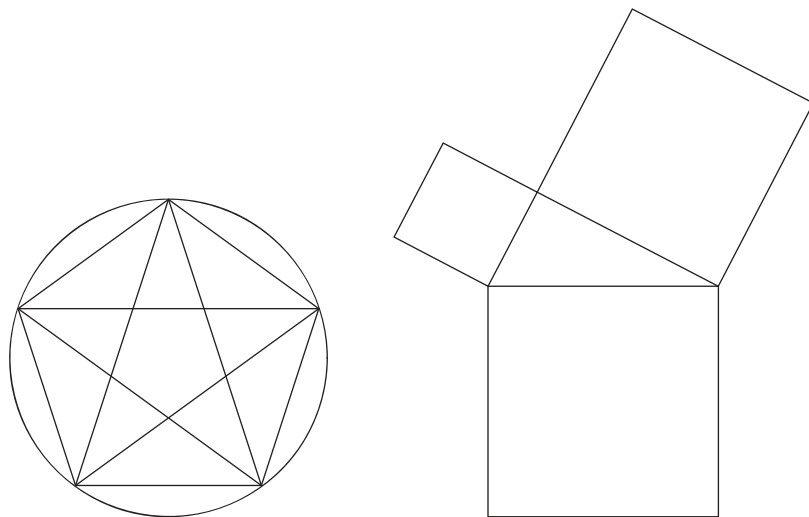
Podział na akapity powtarzamy za tekstem greckim. W XX-wiecznych tłumaczeniach różnie to rozwiązywano. Heath dość swobodnie traktuje tekst grecki w tym zakresie, z kolei Vitrac i Fitzpatrick podążają wprost za edycją Heiberga.

W komentarzach porównujemy czasami nasze rozstrzygnięcia z przekładami Heatha, Vitraca i Fitzpatricka, czynimy to jednak tylko wtedy, kiedy zestawienia te poszerzają znaczenie tłumaczonych pojęć.

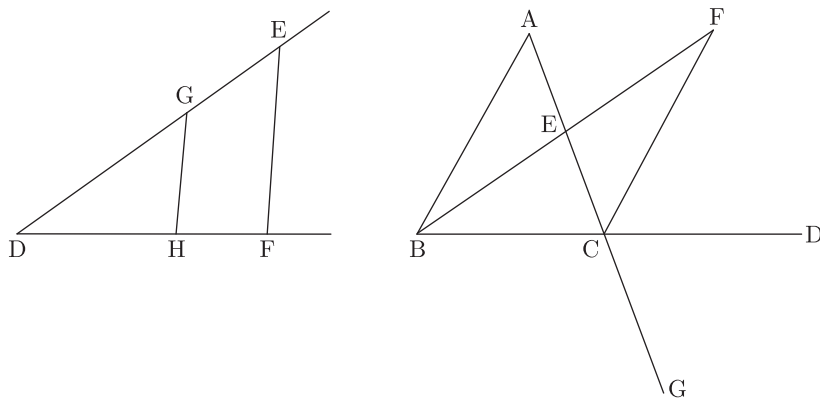
2 Jedną z cech charakterystycznych nowożytnej matematyki jest stosowanie symboli. Oto na przykład stała ze wzoru Eulera, liczba rzeczywista zapisana w systemie dziesiętnym, suma szeregu, całka względem miary, pochodna cząstkowa, macierz odwrotna:

$$e^{\pi i}, \quad 1.41\dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \int f d\mu, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad [a_{ij}]^{-1}.$$

Symbol matematyczny, ten utrwalony i powszechnie stosowany, to znak graficzny, w którym skumulowana jest wiedza pokoleń. Symbolom nowożytnej matematyki odpowiadają w *Elementach* diagramy oraz oznaczenia literowe. W niewielkim stopniu zmodyfikowane i uproszczone diagramy, jak chociażby pięciokąt wpisany w koło czy kwadraty zbudowane na bokach trójkąta towarzyszące twierdzeniu Pitagorasa, stały się dobrem kultury powszechnej.



Inne, jak na przykład te poniżej, zaczerpnięte z Księgi VI oraz I, odnajdujemy w *La Géométrie* Kartezjusza, *Arithmetica Universalis* Isaaca Newtona, *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta czy *Podstawach geometrii* Karola Borsuka i Wandy Szmielew. Występują one tam jako bezimienne obiekty, które w odróżnieniu od ważniejszych twierdzeń czy aksjomatów nie mają ani autora, ani historii. W komentarzach zwracamy baczną uwagę na diagramy i oznaczenia literowe, gdyż zawierają one istotną, chociaż niezwerbalizowaną wiedzę matematyczną.



W logice matematycznej i metamatematyce przyjmuje się, że dowód jest ciągiem formuł. Diagram, wykres czy rysunek odgrywa w takim ujęciu co najwyżej pomocniczą rolę i nie jest niezbywalnym składnikiem

dowodu. W *Elementach* wszystkim twierdzeniom towarzyszą diagramy. Pierwsza i oczywista funkcja, jaką pełnią, to ustalenie oznaczeń. Ale ponadto wiele dowodów wprost lub *implicite* odwołuje się do układu linii oraz punktów przedstawionych na diagramach. Nie podejmujemy się rozstrzygać, czy jest to tylko pewien brak w warstwie dedukcyjnej, czy też odmienny od współczesnego sposób prowadzenia dowodu. Przyjmujemy jako fakt, że diagramy stanowią integralny składnik twierdzeń Euklidesa.

W tradycji wydań *Elementów* nie wypracowano ani jednoznacznego kształtu diagramów, ani ich położenia względem tekstu. Tłumaczenia dwudziestowieczne nawiązują do rozwiązań przyjętych przez Heiberga. W *Euclidis Elementa* kolejne twierdzenia podawane są najpierw po grecku, a następnie w przekładzie na łacinę. Diagramy zamieszczane są obok tłumaczeń, po tezie twierdzenia, przed, obok lub bezpośrednio za częścią, w której ustalane są oznaczenia. Podobnie jest w wydaniach Heatha i Vittraca. W edycji Fitzpatricka tekst grecki i angielski ułożone są w dwóch kolumnach, a diagramy położone są w każdej z nich tak, że wyraźnie oddzielają tezę od reszty twierdzenia.

Diagramy zamieszczone w niniejszym tłumaczeniu nawiązują kształtem do edycji Heiberga, ale są umieszczane zawsze pod tezą twierdzenia. Punkty na diagramach oznaczamy wielkimi literami i czcionką prostą.



THE ELEMENTS
 OF GEOMETRIE
 of the most ancient
 Philosopher
EVCLIDE
 of Megara.

*Faithfully (now first) trans-
 lated into the Englishe tongue, by
 H. Billingsley, Citizen of London,
 Whereunto are annexed certaine
 Scholes, Annotations, and Inven-
 tions, of the best Mathematici-
 cians, both of time past, and
 in this our age.*

*With a very fruitfull Preface made by M. I. Dee,
 specifying the chiefe Mathematicall Sciēces, what
 they are, and wherunto commodious: where, also, are
 disclosed certaine new Secreti Mathematicall
 and Mechanicall, untill these our daies, greatly missed.*

Printed at London by John Daye.

Rozdział 1

EUKLIDES
ELEMENTY

Księga V

DEFINICJE

1. Wielkość jest częścią wielkości, mniejsza większej, gdy mierzy większą.
2. I większa jest wielokrotnością mniejszej, gdy jest mierzona przez mniejszą.
3. Stosunek jest pewną relacją w odniesieniu do miary dwóch wielkości tego samego rodzaju.
4. Mówi się o wielkościach, że jedna jest w stosunku do drugiej, gdy zwielokrotniona, jedna może przekroczyć drugą.
5. Mówi się, że w tym samym stosunku są wielkości pierwsza do drugiej i trzecia do czwartej, gdy te same wielokrotności pierwszej i trzeciej jednocześnie przekraczają, są jednocześnie równe lub jednocześnie mniejsze od tych samych wielokrotności drugiej i czwartej, wziętych w odpowiedniej kolejności, zgodnie z dowolnym mnożeniem każda z dwóch każdej z dwóch.
6. I niech wielkości, które są w tym samym stosunku, nazwane będą proporcjonalnymi.
7. Przy tych samych zaś wielokrotnościach, gdy wielokrotność pierwszej przekracza wielokrotność drugiej, a wielokrotność trzeciej nie przekracza wielokrotności czwartej, wtedy mówi się, że pierwsza jest w większym stosunku do drugiej niż trzecia do czwartej.
8. Proporcja zaś jest co najmniej w trzech wyrazach.
9. Gdy trzy wielkości są proporcjonalne, to mówi się, że stosunek pierwszej do trzeciej jest podwojony, w jakim ta jest do drugiej.
10. Gdy cztery wielkości są proporcjonalne, to mówi się, że stosunek pierwszej do czwartej jest potrojony, w jakim ta jest do drugiej i podobnie dalej, kolejno, dla dowolnej proporcji.

11. Te wielkości nazywane są odpowiadającymi: poprzedniki z poprzednikami, następniki zaś z następnikami.
12. Przemienny stosunek oznacza wzięcie poprzednika do poprzednika i następnika do następnika.
13. Odwrócony stosunek oznacza wzięcie następnika jako poprzednika do poprzednika jako następnika.
14. Złożenie stosunku oznacza wzięcie poprzednika wraz z następnikiem jako jednej do samego następnika.
15. Rozdzielenie stosunku oznacza wzięcie nadwyżki, o jaką poprzednik przewyższa następnik, do samego następnika.
16. Konwersja stosunku oznacza wzięcie poprzednika do nadwyżki, o jaką poprzednik przewyższa następnik.
17. Gdy jest kilka wielkości oraz inne, równe im co do ilości, a wzięte parami, są także w tym samym stosunku, to stosunek w równej (odległości) powstaje wtedy, gdy pierwsza do ostatniej pośród pierwszych wielkości jest jak pierwsza do ostatniej pośród drugich wielkości. Inaczej, wzięcie skrajnych z pominięciem pośrednich.
18. Gdy dane są trzy wielkości oraz inne, równe im co do ilości, to przemieszana proporcja powstaje wtedy, gdy jak poprzednik jest do następnika pośród pierwszych wielkości, tak poprzednik do następnika pośród drugich wielkości, i jak następnik do innej pośród pierwszych wielkości, tak inna do poprzednika pośród drugich wielkości.

