KARTEZJUSZ
GEOMETRIA

tłumaczenie i komentarz

Piotr Błaszczyk
Kazimierz Mrówka

KARTEZJUSZ GEOMETRIA

tłumaczenie i komentarz

KRAKÓW

Publikacja dofinansowana przez Uniwersytet Pedagogiczny
im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

Tłumaczenie przygotowane w ramach projektu
Ciągłość i liczby rzeczywiste. Eudoxos-Dedekind-Conway
NN101 287639
www.eudoxos.pl

© Copyright for this edition by Towarzystwo Autorów
i Wydawców Prac Naukowych UNIVERSITAS, Kraków 2015

© Copyright for the Polish translation by Piotr Błaszczyk, Kazimierz Mrówka
and Towarzystwo Autorów i Wydawców Prac Naukowych UNIVERSITAS,
Kraków 2015

ISBN 978-83–242–2759–4
TAiWPN UNIVERSITAS

Opracowanie redakcyjne
Piotr Błaszczyk, Kazimierz Mrówka

Skład i łamanie
Maciej Major

Okładka, opracowanie graficzne, rysunki oraz kolaże cyfrowe
Katarzyna Kopańska

Źródła inspiracji ilustracji:
Sztych nieznanego autora powstały ok. 1890 roku na bazie
portretu Kartezjusza Fransa Halsa z 1649 roku, *Śmiejący się kawaler* z 1624 roku
Fransa Halsa, motywy ze stron tytułowych wydań *Geometrii* z 1638 i 1659 roku,
portret Kartezjusza Balthasara Moncorneta oraz drzeworyt ze strony tutułowej dzieła
Christopha Claviusa *Geometria Practica* z 1606 roku

www.universitas.com.pl

WSTĘP

Wstęp

1.1 Edukacja Kartezjusza w zakresie matematyki

Kartezjusz urodził się 31 marca 1596 w La Haye en Touraine, a zmarł 11 lutego 1650 w Sztokholmie. Najważniejsze daty i etapy życia francuskiego filozofa są powszechnie znane. Warto jednak zatrzymać się nad jego edukacją matematyczną. Pierwszym etapem była nauka w kolegium jezuickim La Flèche. W 1603 roku Henryk IV przekazał rodzinny Château-neuf de La Flèche na kolegium edukacyjne dla młodzieży. W ten sposób powstał Le Collège Henri IV, znany później jako Collège royal Henri-le-Grand. Król powierzył edukację jezuitom, którzy objęli prowadzenie kolegium w 1604 roku. Szkoła szybko zyskała opinię prestiżowej placówki edukacyjnej. Potwierdza to sam Kartezjusz, który rozpoczął edukację w La Flèche zaledwie kilka lat po otwarciu: „J'étais en l'une des plus célèbres écoles de l'Europe", „Byłem w jednej z najsławniejszych szkół Europy"[1].

[1] [Descartes 2009, t. 3, s. 83]. Niemniej kontekst, w którym padają te słowa, jest krytyczny: „Byłem bowiem zakłopotany tyloma wątpliwościami i błędami, że wydawało mi się, iż starając się kształcić, nie zdobyłem żadnej innej korzyści prócz tej, że coraz bardziej odkrywałem moją niewiedzę. A przecież byłem w jednej z najsławniejszych szkół Europy, gdzie jak sądziłem, powinni byli znajdować się uczeni ludzie, jeśli tacy istnieją w jakimś miejscu na ziemi", tamże, s. 83. Wszystkie przekłady zawarte w pracy są naszego autorstwa – P. Błaszczyka, K. Mrówki.

Program nauczania w Le Collège Henri IV obejmował języki: hebrajski, grekę, łacinę, a także gramatykę, retorykę, teologię, filozofię i matematykę. Kartezjusz był faworyzowanym uczniem, z uwagi na słabe zdrowie i wcześnie rozwinięte zdolności intelektualne. Niewiele jednak wiadomo o jego pobycie w La Flèche. Z tego czasu zachował się jeden list do babci, ale nie jest pewne, że to właśnie młody Kartezjusz był jego autorem.

Problematyczne są też daty jego pobytu w kolegium. Przyjmujemy, że były to lata 1607–1615 [2]. Wobec tego przyszły autor *Rozprawy o metodzie* spotkał tam ojca Jeana François (1582–1668), wybitnego dydaktyka i autora podręczników matematyki, który pojawił się w La Flèche w 1613 roku. Kartezjusz niedługo później ukończył edukację, ale zachował dla swego nauczyciela matematyki wdzięczność i uznanie, pisząc najprawdopodobniej właśnie o nim: „le R. P. F., mon ancien Maistre" [3]. Skrót można rozwinąć następująco: „le Révérend Père François, mon ancien Maistre", „Wielebny Ojciec François, mój dawny Mistrz".

Inną niezwykle ważną postacią, z którą zetknął się Kartezjusz w kolegium, już nie osobiście, ale za sprawą metody i treści nauczania, był matematyk i astronom Christophorus Clavius. Clavius urodził 25 marca 1538 w Bambergu, a zmarł 6 lutego 1612 w Rzymie. Do zakonu jezuitów wstąpił w 1555 roku w Rzymie. W 1565

[2] Wyczerpujące omówienie tego problemu znaleźć można w [Sasaki 2003, s. 13–19, 84–89]. Saski podaje trzy możliwe daty pobytu młodego Kartezjusza w La Flèche: 1), według biografa filozofa, A. Baillet'a, były to lata 1604–1612; 2) 1606–1614; 3) hipoteza Rodisa-Lewisa, 1607–1615, zob. tamże, s. 84–85. Saski przyjmuje za zasadną trzecią hipotezę. Podaje również, że Ojciec François interesował się dalszym rozwojem Kartezjusza, czego dowodem jest list do Mersenne'a z 28 września 1647 roku, w którym prosi uczonego o przekazanie serdecznych pozdrowień Kartezjuszowi, zob. tamże, s. 85.

[3] „Descarte au P. [Bourdin]". List datowany w październiku 1644 r., w: [Adam, Tannery 1897–1913, t. IV, s. 144].

roku ukończył studia w Coimbrze w Portugalii i od tego czasu aż do śmierci kierował katedrą matematyki w rzymskim kolegium jezuickim Collegium Romanum. W latach 1577–1582 na polecenie papieża Grzegorza XIII brał udział w pracach nad reformą kalendarza. Był jednym z głównych twórców kalendarza gregoriańskiego i jednocześnie jego obrońcą przed atakami przeciwników. Wydał wiele dzieł, między innymi w 1581 dedykowane królowi Stefanowi Batoremu *Gnomonices libri octo*, w którym omawiał zegary słoneczne, w 1612 pięciotomowe *Opera mathematica*. Opublikował także *Elementy* Euklidesa ze swoimi komentarzami. Jest to o tyle ważne, że Kartezjusz korzystał właśnie z wydania *Elementów* Claviusa. Dzięki pracom matematycznym oraz działalności dydaktycznej, w tym za udział w tworzeniu *Ratio Studiorum*, Clavius zyskał przydomek „Euklidesa XVI wieku".

Ratio Studiorum, czyli Plan Studiów[4], zatwierdzony w 1599 roku, był oficjalnym dokumentem potwierdzającym system i program studiów w kolegiach prowadzonych przez jezuitów. Praca była dziełem wielu autorów różnych narodowości, a zarazem wyrosła z dużego doświadczenia edukacyjnego twórców i nauczycieli. Wersja próbna dokumentu powstała w 1586 w kręgu sześciu wyznaczonych do tego jezuitów, a następnie rozesłana została do oceny nauczycielom w szkołach jezuickich. Dokument ten miał ogromny wpływ na edukację. Clavius odegrał kluczową rolę w tworzeniu projektu kształcenia matematycznego zawartego w *Ratio Studiorum*, a jednocześnie był punktem odniesienia dla matematycznej lektury Kartezjusza, przede wszystkim wspomnianych już *Elementów* Euklidesa.

W 1618 roku Kartezjusz wstąpił w szeregi armii Maurycego z Nassau. W październiku tego samego roku spotkał w Bredzie Isaaca Beeckmana (1588–1637), i jak pisze Ferdinand Alquié, zawarł

[4] Pełny tytuł dokumentu: *Ratio atque Institutio Studiorum Societatis Iesu.*

„z nim znajomość, która wywrze największy wpływ na jego intelektualną ewolucję”[5]. Nie była to jednak korzyść jednostronna. Kilkumiesięczne spotkania dwóch młodych uczonych oraz wymienione listy potwierdzają, że wpływ był inspirujący obustronnie[6]. Holender prowadził również dziennik utrwalający dyskusje z Kartezjuszem, z których szczególnie ważne dotyczyły matematyki i fizyki. Z kart dziennika, jak i z korespondencji między uczonymi wyłania się obraz francuskiego filozofa wykształconego w kolegium jezuickim. Dopiero spotkanie z Beeckmanem miało na dobre przebudzić Kartezjusza ze scholastycznej drzemki, w jaką popadł w swej edukacji w La Flèche: „W 1619 roku – pisze Sasaki – Kartezjusz zaczyna wyznawać, że jego starszy przyjaciel naprawdę obudził jego dotąd śpiący umysł i pobudził go do wyrażenia jego własnego programu reformy całej dziedziny matematyki”[7].

1.2 Historia wydania *Geometrii*

22 czerwca 1633 roku Święte Oficjum wydało ostateczny, potępiający wyrok w sprawie Galileusza. W jego następstwie Kartezjusz zrezygnował z wydania *Świata albo Traktatu o świetle*, dzieła, w którym bronił hipotezy heliocentryzmu[8]. Traktat został opublikowany dopiero w 1664 roku, a więc już po śmierci filozofa. Pełny tytuł tego wydania brzmiał: *Świat Pana Kartezjusza albo Traktat*

[5] [Alquié 1989, s. 18].

[6] Zob. [Sasaki 2003, s. 96]. Beeckman przyjaźnił się również z Pierre'em Gassendim, który twierdził, że Holender był „najlepszym filozofem”, jakiego spotkał. Cyt. za [Sasaki 2003].

[7] [Sasaki 2003, s. 99].

[8] Nie należy jednak sądzić, iż był to jedyny powód rezygnacji z publikacji *Świata*. Na ten temat Kartezjusz wypowiada się dosyć obszernie i nieco zawile w *Rozprawie o metodzie*.

o świetle i inne główne przedmioty Zmysłów[9]. Traktat był pierwszą częścią większego dzieła, z którego zachowała się jeszcze ostatnia część, *Traktat o człowieku*[10]. Innym ważnym dziełem, które należy wymienić w kontekście późniejszej *Rozprawy o metodzie*, były *Reguły kierowania rozumem*[11]. Dzieło to również nie zostało wydane za życia Kartezjusza, jednak w odróżnieniu od *Świata* nie wiemy, dlaczego filozof zdecydował się pozostawić *Reguły* w manuskrypcie.

W 1637 roku, bez nazwiska autora, w drukarni Jana Maire w Lejdzie, ukazała się w języku francuskim *Rozprawa o Metodzie, w celu prawidłowego kierowania swym rozumem i poszukiwania prawdy w naukach oraz Dioptryka, Meteory i Geometria, które są esejami tej Metody*[12].

Pierwsze oddzielenie *Geometrii* od całości dzieła dokonało się bardzo szybko, esej bowiem, jako jedyny z trzech, nie został włączony do łacińskiego przekładu *Rozprawy o metodzie*, przygotowanego przez Etienne'a de Courcelles'a i wydanego w 1644 roku. Publikacja *Geometrii* w języku łacińskim, w tłumaczeniu van Schootena, ukazała się w 1649 roku. Całość dzieła zredagowanego w języku francuskim nie osiągnęła sukcesu wydawniczego. Za życia Kartezjusza publikacji nie wznowiono i – co warto w tym miejscu podkreślić – *Geometria* była jedynym traktatem matematycznym opublikowanym za życia filozofa. Niestety, sam tekst został wydany niestarannie i z wieloma błędami drukarskimi. Jednakże tuż po ukazaniu się *Geometria* spotkała się wśród naukowców z głośnym odzewem, mimo iż opóźniony przekład na język łaciński znacząco zawężał możliwość jej

[9] Tytuł oryginału *Le monde de Mr Descartes ou le Traité de la Lumière et des autres principaux objets des Sens.*

[10] Tytuł oryginału *Traité de l'homme.*

[11] Tytuł oryginału *Regulae ad directionem ingenii.*

[12] Tytuł oryginału *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette Méthode.*

oddziaływania. Sam zaś Kartezjusz, w krótkiej przedmowie do eseju pisał: „Aż do tego miejsca starałem się być zrozumiały dla wszystkich, ale obawiam się, że ten traktat może być czytany tylko przez tych, którzy znają już to, co jest w księgach Geometrii". Nie chodzi przy tym o znajomość samego dzieła Kartezjusza, lecz o ogólną wiedzę z zakresu geometrii.

Wśród tych wybrańców, którzy wiedzieli, byli głównie przeciwnicy Kartezjusza. Wydanie eseju stało się więc okazją do ożywionej dyskusji, zwłaszcza z niechętnie nastawionymi do jego dzieła Fermatem, Robervalem i Etienne'em Pascalem. Autor *Geometrii* deklarował wręcz – a przypomnijmy, że chodzi o tego samego filozofa, który nawiązując do myśli Montaigne'a i stoików, twierdził, że należy zmieniać raczej siebie niż świat – nienawiść do tych, którzy nie zrozumieli jego eseju.

Z biegiem czasu, w znacznym stopniu dzięki łacińskiemu wydaniu, dzieło zyskało większą sławę, a sięgali do niego tak znamienici autorzy, jak Desargues, Huygens, Newton, Leibniz, d'Alembert czy Comte. Od samego początku *Geometria* Kartezjusza funkcjonowała jako odrębne dzieło, ale pamiętano o jej źródłowym związku z *Rozprawą o Metodzie*. Dopiero w XIX wieku traktat matematyczny oddzielony został na dobre od *Discours de la Méthode* i pozostałych esejów. *Rozprawa o Metodzie* potraktowana została jako dzieło z zakresu filozofii, natomiast *Geometria* wraz z *Dioptryką* oraz *Meteorami* zyskała status traktatu naukowego.

Część francuskich wydawców dzieła Kartezjusza próbuje przełamać obowiązujący po dziś dziewiętnastowieczny paradygmat. Warto tu wspomnieć o najnowszym wydaniu dzieł zebranych francuskiego filozofa nakładem wydawnictwa Gallimard, pod redakcją Jeana-Marie Beyssade'a i Denisa Kambouchnera. W 2009 roku ukazał się trzeci tom dzieł Kartezjusza, nawiązujący właśnie do pierwszego wydania. Zawiera on – jako jedno dzieło, tak jak w publikacji

z 1637 roku – *Rozprawę o Metodzie* z następującymi po niej *Dioptryką*, *Meteorami* oraz *Geometrią*[13].

1.3 Nota edytorska

Przedkładane wydanie *Geometrii* opiera się na dwu wydaniach: źródłowym z 1637 roku oraz wspomnianym wyżej najnowszym wydaniu z 2009. Oba francuskie wydania obejmuje symboliczna klamra: to, co było złączone na początku, a potem zostało rozdzielone, na powrót zostaje scalone. Nie da się bowiem w pełni zrozumieć esejów bez wprowadzającej *Rozprawy o metodzie*, a i sama *Rozprawa*, odłączona od esejów, w wielu miejscach sprawia wrażenie zawieszonej w próżni teorii. Stałym odniesieniem bibliograficznym jest dla nas również erudycyjne wydanie *Oeuvres de Descartes* Ch. Adama i P. Tannery'ego[14]. Odniesienie do współczesnych wydań jest tak samo konieczne, co wygodne: pierwsze bowiem wydanie zawierało dużą liczbę błędów rzeczowych i ortograficznych. Kompetentni wydawcy współcześni usunęli je[15].

W przedkładanym tłumaczeniu zachowujemy podział na strony i akapity pierwszego wydania, jego paginację, marginalia, wystawienie wzorów, kształt diagramów oraz ich położenie względem tekstu; paginację wydania z 1637 zamieszczamy na dole strony.

Marginalia pełnią w *La Géométrie* taką rolę, jak we współczesnych pracach tytuły paragrafów. W wydaniu z 1637 roku zostały one zabrane w *Spisie Rzeczy*. W przedkładanych tłumaczeniu zamieszczamy ten *Spis* uwzględniający paginację pierwszego wydania.

[13] R. Descartes, *Discours de la Méthode et Essais*, dz. cyt.

[14] Ch. Adam, P. Tannery, *Oeuvres de Descartes*, 11 tomów, Paris 1897–1913. Nowe wydanie 1964–1974, wznowione w 1996.

[15] Listę wszystkich błędów rzeczowych w *Geometrii* Kartezjusza sporządził A. Warusfel w *Introduction à la Géométrie*; zob. [Warusfel 2010, s. 40–41].

Warto zauważyć, że czasami są tam zawarte pojęcia uzupełniające treści zamieszczone w odpowiednim paragrafie.

Figury i punkty opisujemy tak, jak w oryginale – wielkimi literami i antykwą, a nie kursywą, jak to jest w dzisiejszych tekstach matematycznych, podobnie małe litery oznaczające odcinki piszemy, tak jak w oryginalne, antykwą.

La Géométrie, obok wybitnych rozwiązań matematycznych, zawiera także wiele rozstrzygnięć w zakresie oznaczeń matematycznych. Tak na przykład, gdy Viète, podążając z Diofantosem, kolejne potęgi opisuje słowami, Kartezjusz wprowadza znak potęgi. W przedkładanym tłumaczeniu zapisujemy to w postaci x^2, a^3, zaś w oryginale, oprócz tej notacji, czasami wykładniki są umieszczone nad podstawą: $\overset{2}{x}$, $\overset{3}{a}$.

Kolejne *novum* to małe litery a, b, c stosowane na oznaczenie odcinków „znanych", dla „niewiadomych" odcinków rezerwowane są litery x, y, z – takie oznaczanie niewiadomych stosowane jest po dziś dzień.

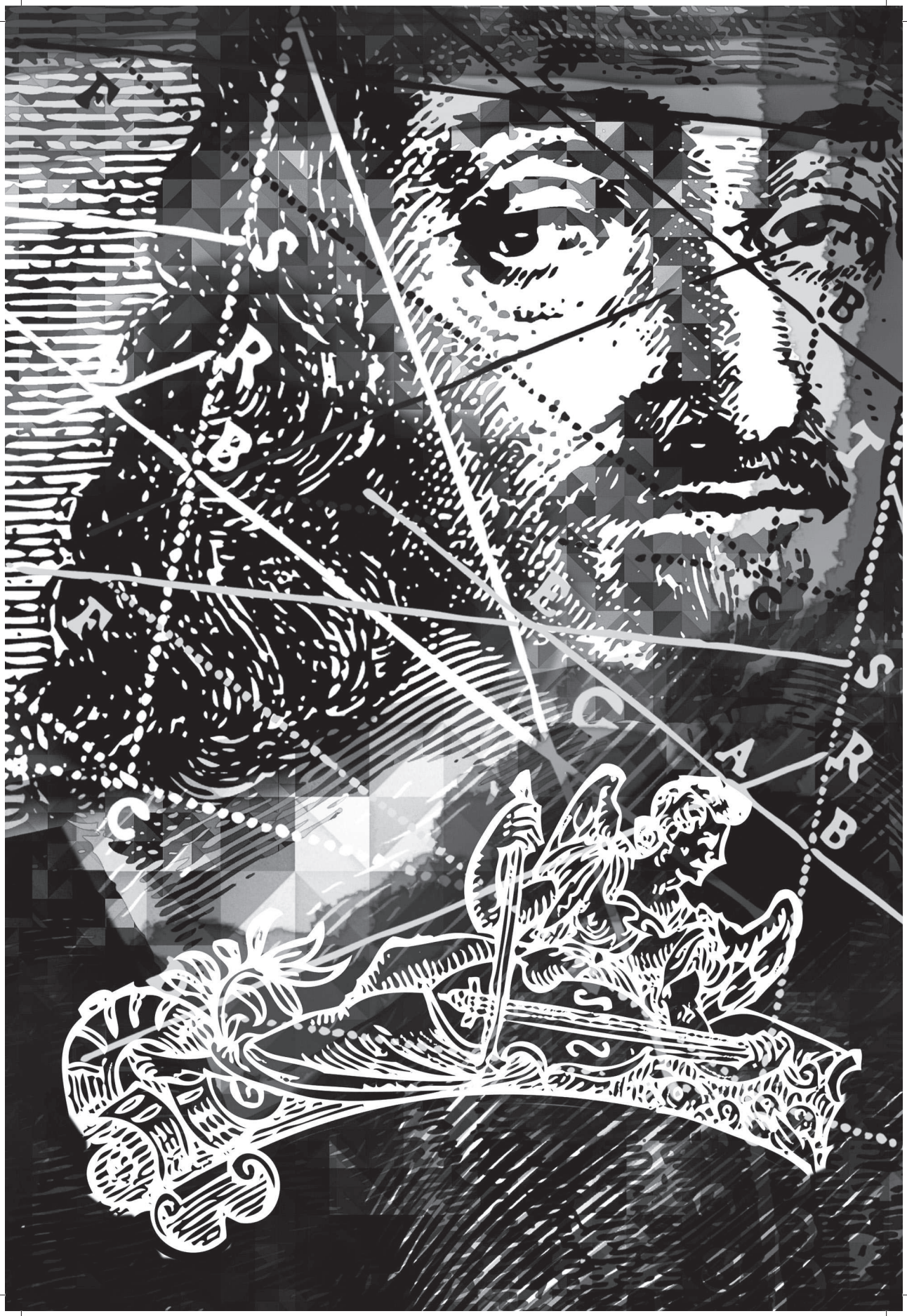
Z uwagi na czytelność tekstu, zwłaszcza w księdze 3, gdzie jest duże nagromadzenie wzorów, zdecydowaliśmy się na dwa odstępstwa w stosunku do oryginalnych oznaczeń Kartezjusza.

(1) Dla oznaczenia równości przyjęto w *La Géométrie* znak $\propto$; według jednych historyków mają to być odwrócone dwie pierwsze litery łacińskiego słowa *aequalis* (równy), według innych – jest to obrócony symbol gwiazdozbioru Byka, ♉, który powszechnie stosowano w owym czasie w warsztatach drukarskich wydających prace astronomiczne. W tłumaczeniu przyjmujemy współczesny znak równości.

(2) Symbol pierwiastka kwadratowego jest w *La Géométrie* kombinacją znaku *surd* $\surd$ (niewymierność) i kreski poziomej nad wyrażeniem; dodając do tego literę $\underline{C}$ (*cube*), otrzymuje Kartezjusz symbol pierwiastka sześciennego $\sqrt{C}$. W tłumaczeniu przyjmujemy

współczesny znak pierwiastka, ale dla oznaczenia pierwiastka sześciennego powtarzamy rozwiązanie Kartezjusza, to jest $\sqrt{C}$.

Do oznaczeń matematycznych będziemy powracać jeszcze w komentarzu, gdyż wiele rozstrzygnięć czysto matematycznych jest przesądzonych właśnie w warstwie oznaczeń symbolicznych.



KARTEZJUSZ
GEOMETRIA

Spis Rzeczy

KSIĘGA PIERWSZA

O problemach, w których linie proste i okręgi wystarczą do przeprowadzenia konstrukcji **297**

Jak rachunek arytmetyczny odnosi się do działań geometrycznych 297

Mnożenie 298

Dzielenie 298

Wyciąganie pierwiastka 298

Jak używać znaków w geometrii 299

Jak dojść do równań, które służą rozwiązaniom problemów 300

Jakie są zagadnienia płaszczyzny 302

Jak je rozwiązać 302

Przykład Pappusa 304

Odpowiedź na pytanie Pappusa 307

Jak powinniśmy dobrać wyrażenia, aby dojść w tym przykładzie do równania 310

Jak dochodzimy do tego, że gdy danych jest nie więcej niż 5 linii, mamy do czynienia z problemem płaszczyzny 313

KSIĘGA DRUGA

O naturze linii krzywych **315**

Które linie krzywe można przyjąć w geometrii 315

Sposób rozróżnienia wszystkich linii krzywych na pewne rodzaje oraz poznania stosunku, jaki mają ich punkty do pewnych linii prostych 319

Dalszy ciąg wyjaśnienia problemu Pappusa zawartego w poprzedniej księdze 323

Rozwiązanie tego problemu, kiedy dane są jedynie trzy lub cztery linie 324
Dowód tego wszystkiego, co właśnie zostało wyjaśnione 332
Jakie są miejsca płaszczyzn i brył oraz sposób ich znajdowania 334
Jaka jest pierwsza i najprostsza linia z wszystkich linii krzywych, wykorzystywana w zadaniu starożytnych postawionym dla pięciu linii 335
Jakie są linie krzywe, które wyznacza się, znajdując wiele ich punktów, i które mogą być przyjęte w geometrii 340
Jakie są te, które wyznacza się za pomocą nici i które również mogą być przyjęte 340
O tym, że aby znaleźć wszystkie własności linii krzywych, wystarczy znać stosunek, jaki mają wszystkie ich punkty do tych na liniach prostych oraz sposób rysowania innych linii przecinających je w tych wszystkich punktach pod kątami prostymi 341
Ogólny sposób znajdowania linii prostych, które przecinają dane krzywe lub styczne do nich pod kątami prostymi 342
Przykład konstrukcji tego zagadnienia w przypadku konchoidy 351
Wyjaśnienie 4 nowych rodzajów owali użytecznych w optyce 352
Właściwości tych owali związane z odbiciem i załamaniem 357
Przedstawienie własności tych owali dotyczących odbić i załamań 360

Jak można wykonać soczewkę, dowolnie wypukłą, albo wklęsłą na jednej z jej powierzchni sprawiającą, że wszystkie promienie biegnące z jednego danego punktu zbiegają się w innym danym punkcie . . 363
Jak można wykonać soczewkę, która miałaby ten sam efekt, co poprzednia i wypukłość jednej jej powierzchni miała daną proporcję do tej drugiej 366
Jak można zastosować to, co zostało powiedziane o liniach krzywych kreślonych na powierzchni płaskiej, do tych, które są kreślone w trójwymiarowej przestrzeni . . . 368

KSIĘGA TRZECIA
O konstrukcji zagadnień, które są bryłami i nadbryłami **369**
O liniach krzywych, które mogą służyć do konstrukcji każdego zagadnienia 369
Przykład wyznaczania wielu średnich proporcjonalnych 370
O naturze równań 371
Ile pierwiastków może być w każdym równaniu 372
Czym są pierwiastki fałszywe 372
Jak zmniejszyć liczbę wymiarów równania, znając jego pierwiastek 372
Jak zbadać, czy jakaś wielkość jest wartością pierwiastka 373
Ile prawdziwych pierwiastków może być w każdym równaniu 373
Co zrobić, by fałszywe pierwiastki równania stały się prawdziwymi, a prawdziwe fałszywymi 373
Jak zwiększyć lub zmniejszyć pierwiastki równania nie znając ich 374

O tym, że zwiększając prawdziwe pierwiastki, zmniejszamy fałszywe i odwrotnie 375
Jak można pominąć drugi wyraz równania . . 376
Co zrobić, by wszystkie fałszywe pierwiastki równania stały się prawdziwymi, lecz by prawdziwe nie stały się fałszywymi . . . 377
Co zrobić, by wypełnić wszystkie miejsca równania 378
Jak pomnożyć lub podzielić pierwiastki, nie znając ich 379
Jak sprowadzić ułamki do liczb całkowitych . 379
Jak znaną wielkość jednego wyrazu równania uczynić równą innej 380
O tym, że zarówno prawdziwe, jak i fałszywe pierwiastki mogą być rzeczywiste lub urojone 380
Redukcja równań sześciennych, gdy zagadnienie jest płaszczyzną 380
Sposób dzielenia równania przez dwumian, który zawiera jego pierwiastek 381
Sposób dzielenia równania przez dwumian, który zawiera jego pierwiastek 383
Redukcja równań, które mają cztery wymiary, gdy problem jest płaszczyzną. I jakie są te będące bryłami 383
Przykład użycia tych redukcji 387
Ogólna reguła redukcji wszystkich równań, które przekraczają kwadrat kwadratu 389
Ogólny sposób konstrukcji wszystkich zagadnień brył zredukowanych do równania o trzech lub czterech wymiarach 389
Znalezienie dwóch średnich proporcjonalnych . 395
Sposób podziału kąta na trzy 396
O tym, że wszystkie zagadnienia brył można sprowadzić do tych dwóch konstrukcji . . 397

Sposób wyrażania wartości wszystkich pierwiastków równań sześciennych, a dalej wszystkich tych, które podnoszą się tylko do kwadratu 400
Dlaczego zagadnienia brył nie mogą być skonstruowane bez przekrojów stożków, ani te bardziej złożone, bez jakichś innych, bardziej złożonych linii 401
Ogólny sposób konstrukcji wszystkich zagadnień zredukowanych do równania, które nie ma więcej niż sześciu wymiarów . . . 403

GEOMETRIA

KSIĘGA PIERWSZA

O problemach, w których linie proste i okręgi wystarczą do przeprowadzenia konstrukcji

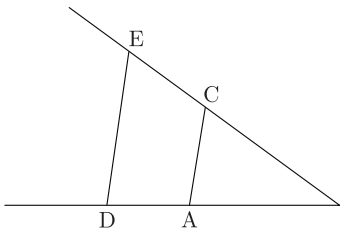
Wszystkie problemy geometrii da się łatwo sprowadzić do takich wyrażeń, że wystarczy znać długości pewnych linii prostych, aby przeprowadzić ich konstrukcje.

Jak rachunek arytmetyczny odnosi się do działań geometrycznych.

Tak jak arytmetyka polega tylko na czterech czy pięciu działaniach, czyli dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu, dzieleniu oraz wyciąganiu pierwiastków, co można uznać za pewien rodzaj dzielenia, tak i w geometrii, aby znaleźć szukane linie, wystarczy jedynie dodać lub odjąć pewne inne linie; lub też mając jedną, którą nazwę jednością, aby upodobnić ją jak to tylko możliwe do liczb i która w zasadzie może być dowolnie wybrana, a następnie mając dane dwie inne, znaleźć czwartą linię, która będzie do jednej z tych danych, tak jak druga jest do jedności, co jest tym samym, co mnożenie; lub jeszcze

znaleźć czwartą linię, która będzie do jednej z nich, tak jak jedność jest do drugiej, co jest tym samym, co dzielenie; czy wreszcie znaleźć jedną lub dwie, lub kilka średnich proporcjonalnych między jednością i jakąś inną linią, co jest tym samym, co wyciągnięcie pierwiastka kwadratowego lub sześciennego z danej linii itd. I nie zawaham się wprowadzić do geometrii tych wyrażeń arytmetycznych w celu osiągnięcia większej jasności.

Mnożenie.

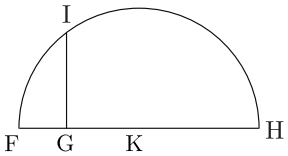


Dla przykładu, niech AB będzie jednością i niech zadanie polega na pomnożeniu BD przez BC. Muszę tylko połączyć punkty A i C, następnie poprowadzić DE, równoległą do CA; wówczas BE jest iloczynem BD oraz BC.

Dzielenie.

Lub też, gdy należy podzielić BE przez BD, łączę punkty E i D, prowadzę AC, równoległą do DE, i BC jest wynikiem tego dzielenia.

Wyciąganie pierwiastka.



Lub też, gdy należy wyznaczyć pierwiastek kwadratowy z GH, dodaję w linii prostej FG równą jedności, dzielę FH na dwie równe części w punkcie K, zakreślam okrąg FIH o środku w K, następnie z punktu G prowadzę linię prostą i przedłużam ją aż do I pod kątami prostymi do FH; szukanym pierwiastkiem jest GI. Nie mówię tutaj nic o pierwiastku sześciennym lub innych, ponieważ powiem o nich z większą swobodą później.

Jak używać znaków w geometrii.

Często jednak nie jest konieczne rysowanie tych linii na papierze i wystarczy oznaczyć każdą z nich odrębną literą. I tak, aby dodać linie BD i GH, nazywam jedną a, drugą b, i piszę $a + b$. Następnie $a - b$ będzie oznaczało, że od a odjęto b; ab, że a jest pomnożona przez b; $\frac{a}{b}$, że a jest podzielona przez b; aa lub a^2, że a pomnożono przez siebie; a^3, że poprzedni wynik jest pomnożony przez a i tak dalej w nieskończoność. Podobnie, gdy chcę wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z $a^2 + b^2$, piszę $\sqrt{a^2 + b^2}$; gdy chcę wyciągnąć pierwiastek sześcienny z $a^3 - b^3 + abb$, piszę $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$ i podobnie z innymi pierwiastkami.

Należy zaznaczyć, że przez a^2 lub b^3 i podobne wyrażenia rozumiem zwykle jedynie linie proste, jakkolwiek w celu posłużenia się nazwami używanymi w algebrze nazywam je kwadratami lub sześcianami itd.

Należy również zaznaczyć, że wszystkie części linii muszą być zwykle wyrażone przez tę samą liczbę wymiarów, przyjmując, że wymiar jedności nie jest jednoznacznie wyznaczony przez warunki zadania. W ten sposób a^3, abb i b^3, z których składa się linia nazwana przeze mnie $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$, zawierają tyle samo wymiarów. Ale nie jest tak w przypadku jedności, dlatego że może ona występować wszędzie tam, gdzie jest zbyt dużo lub zbyt mało wymiarów.

W ten sposób, gdy trzeba będzie wyciągnąć pierwiastek sześcienny z $aabb - b$, należy przyjąć, że wielkość $aabb$ jest podzielona raz przez jedność, a wielkość b jest pomnożona dwa razy przez jedność.

Wreszcie, by nie zapomnieć nazw tych linii, trzeba zawsze sporządzać oddzielny spis, w miarę jak nazwy są przyjmowane lub zmieniane, pisząc na przykład:

AB $= 1$, to znaczy AB jest równe 1,

GH $= a$,

BD $= b$, itd.

Jak dojść do równań, które służą rozwiązaniom problemów.

Jeśli więc chcemy rozwiązać jakiś problem, to trzeba wpierw założyć, że znane jest rozwiązanie, i nazwać wszystkie linie, tak samo znane, jak i nieznane, które wydają się niezbędne do przeprowadzenia konstrukcji. Następnie, nie czyniąc żadnej różnicy między liniami znanymi i nieznanymi, trzeba rozwikłać trudność w sposób, który najprościej uchwyci zależności między tymi liniami, aż zdołamy wyrazić tę samą wielkość na dwa sposoby, co nazywamy równaniem, albowiem wyrażenia jednego z tych dwóch sposobów równe są wyrażeniom drugiego. I należy znaleźć tyle takich równań, ile przyjęliśmy linii niewiadomych. Gdy jednak po rozważeniu wszystkiego nie można tylu znaleźć, to znaczy, że zagadnienie nie jest w pełni określone. W takim wypadku, każdej linii niewiadomej, której nie odpowiada żadne równanie, możemy przypisać dowolnie wybraną znaną linię. Jeśli jest kilka równań, to każde należy tak spożytkować, by rozważając je same w sobie lub porównując z innymi, wyjaśnić każdą niewiadomą linię.

Trzeba je więc tak długo przekształcać, aż pozostanie tylko jedna linia niewiadoma równa innej znanej, albo której kwadrat lub sześcian, lub czwarta, piąta, szósta potęga itd., jest równa wynikowi dodawania lub odejmowania kilku innych wielkości, z których jedna byłaby znana, a inne składałyby się ze średnich proporcjonalnych między jednością i tym kwadratem lub sześcianem, lub kwadratem kwadratu itd. pomnożonych przez inne linie znane. Zapisuję to następująco:

$z = b$ lub
$z^2 = -az + bb$, lub
$z^3 = az^2 + bbz - c^3$, lub
$z^4 = az^3 - c^3z + d^4$, itd.

Oznacza to, że z, którą biorę za wielkość nieznaną, jest równa b; lub kwadrat z jest równy kwadratowi b pomniejszonemu o a pomnożoną przez z; lub sześcian z jest równy a pomnożonej przez kwadrat z plus kwadrat b pomnożony przez z pomniejszony o sześcian c; i tak samo dla innych.

W ten sposób wszystkie nieznane wielkości można zawsze sprowadzić do jednej, gdy tylko problemowi odpowiada konstrukcja za pomocą okręgów oraz linii prostych lub przekrojów stożka, a nawet jakiejś innej krzywej, której stopień byłby wyższy co najwyżej o jeden lub dwa. Jednak nie zamierzam zatrzymywać się nad wyjaśnieniem tego w szczegółach, a to dlatego, że pozbawiłbym was przyjemności samodzielnego uczenia się i pożytku z kształtowania waszego ducha w ćwiczeniu, co też w moim mniemaniu jest główną korzyścią czerpaną z tej nauki.

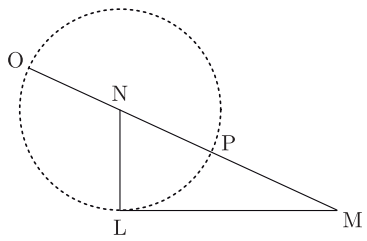
Tak samo nie dostrzegam nic tak trudnego, czego nie mogliby odkryć ci, którzy są mało obeznani z elementarną geometrią i algebrą, a którzy uważnie prześledzą treść tego traktatu.

Dlatego też ograniczę się tu do takiego oto stwierdzenia: gdy rozwiązując te równania, przeprowadzimy wszelkie możliwe rozróżnienia, wtedy z pewnością dotrzemy do najprostszych pojęć, do których można sprowadzić dane zagadnienie.

Jakie są zagadnienia płaszczyzny.

A jeśli może być ono rozwiązane w ramach elementarnej geometrii, to znaczy przez kreślenie linii prostych i okręgów na płaszczyźnie, kiedy ostatnie równanie zostanie całkowicie rozwiązane, to nie pozostanie już nic więcej prócz kwadratu nieznanej wielkości, który jest równy wynikowi dodawania lub odejmowania jej pierwiastka pomnożonego przez pewną znaną wielkość oraz pewnej innej znanej wielkości.

Jak je rozwiązać.



Tak więc ten pierwiastek, lub nieznana linia, dają się łatwo znaleźć. Jeśli bowiem mamy na przykład $z^2 = az + bb$, to konstruuję trójkąt prostokątny NLM, w którym bok LM jest równy b – pierwiastkowi kwadratowemu znanej wielkości bb, a drugi, LN, jest równy $\frac{1}{2}a$ – połowie drugiej znanej wielkości, pomnożonej przez z, o której zakładam, że jest linią nieznaną. Dalej, przedłużając MN – podstawę trójkąta, aż do O, tak by NO była równa NL, całość OM jest szukaną linią z.