FOLIA 163

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VI (2014)

Recenzje, konferencje, biografie, informacje

Piotr Błaszczyk

Nota o rozprawie Eduarda Heinego *Elemente der Functionenlehre*[*]

1. Liczby rzeczywiste

W roku 1872 ukazały się trzy nieduże rozprawy przedstawiające konstrukcje liczb rzeczywistych; w kolejności publikowania były to: Eduarda Heinego, *Elemente der Functionenlehre*, Georga Cantora, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Richarda Dedekinda, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*[1]. Dwie pierwsze zawierają konstrukcję, w której liczby rzeczywiste – „niewymierne", jak wówczas pisano – są definiowane jako klasy ciągów liczb wymiernych spełniających warunek Cauchy'ego. W rozprawie Dedekinda natomiast liczby rzeczywiste zostały zdefiniowane jako przekroje zbioru $(\mathbb{Q}, <)$.

We wstępie do *Elemente der Functionenlehre* Heine wspomina, że konstrukcja, którą przedstawia, może pochodzić od Weierstrassa. Cantor z kolei, dokonując w roku 1883 przeglądu koncepcji liczb rzeczywistych, przypisuje Weierstrassowi inną konstrukcję, a porównując ją ze swoją tak pisze: „w roku 1871 podana została przeze mnie (. . .) definicja [liczby niewymiernej], która zewnętrznie podobna jest do [tej] Weiestrassa, tak, iż mogła być pomylona z nią"[2]. Przez słowa te przebija troska Cantora o uznanie oryginalności jego konstrukcji. Istotnie, popularność Cantora oraz dominująca pozycja matematyki niemieckiej sprawiły, że konstrukcja, którą znajdujemy w rozprawie Heinego, nosi współcześnie nazwę konstrukcji Cantora. Fakty historyczne są jednak takie, że jako pierwszy konstrukcję tę przedstawił Charales Méray w artykule z roku 1869 *Remarques sur la nature des quantités déjinies par la condition de servir de limites à des variable données*[3]. Mèray był

[*] A note on Eduard Heiny treatise *Elemente der Functionenlehre*

[1] E. Heine, Elemente der Functionenlehre, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* 74, 172–188; G. Cantor, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Mathematische Annalen* 5, 123–132; R. Dedekind, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, ss. 22.

[2] G. Cantor, G. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, *Mathematische Annalen* 21, 1883, 545–586; *O nieskończonych rozmaitościach punktowych*, § 9-10, tł. J. Pogonowski, http://www.eudoxos.pl/tlumaczenia/.

[3] Ch. Méray, Remarques sur la nature des quantités déjinies par la condition de servir de limites à des variable données, *Revue des Sociétés savantes, Sciences mathém. phys. et naturelles* 2, IV, 1869, 281–289.

matematykiem francuskim, wykształcenie odebrał w paryskiej École Normale Supérieure, a we wspomnianej rozprawie nawiązywał do prac Lagrange i Cauchy'ego. Jednakże rozprawa Mèraya o liczbach rzeczywistych jest nieporównywalnie mniej znana niż prace Heinego, Cantora i Dedekinda.

1.1. Aksjomat ciągłości

Poszczególne konstrukcje liczb rzeczywistych wiążą się ze specyficznymi wersjami aksjomatu ciągłości[4]. Konstrukcji Cantora odpowiada koniunkcja warunków:

(CC) zupełność w sensie Cauchy'ego: każdy ciąg liczb rzeczywistych spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej,

(AA) aksjomat Archimedesa.

Heine dowodzi tylko warunku (CC); podobnie jest w rozprawie Cantora. Istotnie, w roku 1872 aksjomat Archimedesa był nieznany. Jego rolę i znaczenie odkrył w roku 1885 Otto Stolz, acz rozważania Stolza nie były wprost związane z liczbami rzeczywistymi. Związek (AA) z aksjomatem ciągłości w wersji (DC)[5] ustanowił dopiero w roku 1901 Otto Hölder[6].

W rozprawie Heinego aksjomat Archimedesa jest stosowany w sposób niejawny kilka razy: (1) jako oczywiste stwierdzenie, że ciąg (10^{-n}) jest zbieżny do zera, (2) jako stwierdzenie, że ciąg $(\delta/2^n)$ jest zbieżny do zera, (3) że ciąg $(1/n)$ jest zbieżny do zera, (4) jako założenie, że zbiór $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $(\mathbb{R},<)$[7].

Dużo większą subtelnością i wrażliwością na zagadnienia podstaw wykazał się Dedekind, który ciągłość uczynił centralnym tematem swojej rozprawy o liczbach rzeczywistych. Definicję ciągłości porządku liniowego pochodzącą od Dedekinda obecnie tak przedstawiamy:

Porządek liniowy $<$ określony na zbiorze $\mathbb{F}$ jest ciągły, gdy każdy przekrój Dedekinda (L,U) osi $(\mathbb{F},<)$ spełnia warunek[8]:

$$(\exists! x \in \mathbb{F})(\forall y \in L)(\forall z \in U)(y \leqslant z). \tag{DC}$$

Dowodząc, że każdy przekrój osi $(\mathbb{R},<)$ spełnia warunek (DC), Dedekind pokazał, że zbiór $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $(\mathbb{R},<)$.

---

[4]Zob. P. Błaszczyk, O ciałach uporządkowanych, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticum Mathematicae* IV, 2012, 15-30.

[5]Zob. niżej.

[6]Zob. P. Błaszczyk, Nota o rozprawie Otto Höldera *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticum Mathematicae Pertinentia* V, 2013, 129-142.

[7]W przypadku (4) chodzi m.in. o zdania: „[jeżeli] d_n pozostaje powyżej zera, to istnieje dodatnia liczba wymierna d, która jest mniejsza od wszystkich liczb d_m, począwszy od pewnej ustalonej m". Inny przykład podajemy niżej: § 2.1.3, formuła 5. Kolejny znajdujemy w dowodzie twierdzenia o zupełności liczb rzeczywistych.

[8]Przypomnijmy, że para zbiorów (L,U) jest przekrojem Dedekinda zbioru $(\mathbb{F},<)$, gdy (1) $L,U \neq \emptyset$, (2) $L \cup U = \mathbb{F}$, (3) $(\forall y \in L)(\forall z \in U)(y < z)$.

2. Eduard Heine, *Elemente der Functionenlehre*

Rozprawa *Elemente der Functionenlehre* ma jasno zakreślony cel: Heine chce mianowicie ustanowić niepodważalne, a zarazem oczywiste podstawy teorii funkcji rzeczywistych. Czytamy:

„Postęp w teorii funkcji jest istotnie hamowany przez tę okoliczność, że pewne elementarne jej twierdzenia, choć udowodnione przez wnikliwych badaczy, ciągle jeszcze podawane są w wątpliwość, tak, że wyniki badań nie wszędzie uchodzą za poprawne, gdy odwołują się do owych niezbędnych twierdzeń".

O zastanej teorii Heine pisze, że prawdziwość jej twierdzeń „opiera się jednak na nie w pełni ustanowionej definicji liczb niewymiernych, w której często uwikłane są przedstawienia geometryczne, a mianowicie *wytworzenie* linii *poprzez ruch*". Heine przyjmuje, że filarem nowej teorii winna być jasna definicja liczby rzeczywistej, wolna od skojarzeń geometrycznych[9]. Podkreśla, że najważniejszym sprawdzianem dla przedkładanej przezeń teorii liczb rzeczywistych będzie to, czy pozwoli ona udowodnić podstawowe twierdzenia teorii funkcji. Czytamy:

„Nie bez wątpliwości publikuję tę pracę, której pierwsza najistotniejsza część *O liczbach* jest od długiego już czasu ukończona. Niezależnie od poważnej trudności w przedstawieniu takiego materiału, mam wątpliwości co do opublikowania pracy, zwłaszcza, iż zawiera ona przekazane mi ustnie przemyślenia innych, a szczególnie Pana Weierstrassa, tak, że do mnie należy nie więcej niż [ich] wyłożenie, przy czym chodzi również o to, aby nie pozostawić nigdzie żadnej poważnej luki. Najważniejsza jest konieczność, abym w późniejszej rozprawie odniósł się do podstawowych twierdzeń teorii funkcji, która zmusza mnie do opublikowania niniejszej [pracy], w której twierdzeń owych w końcu dowodzę".

Rozprawa jest odpowiednio podzielona na dwie części: w pierwszej, zatytułowanej *O liczbach*, Heine podaje definicję liczby rzeczywistej, w drugiej, *O funkcjach*, dowodzone są „podstawowe twierdzenia teorii funkcji".

2.1. *Elementy teorii funkcji. O liczbach*

2.1.1. Terminologia i oznaczenia

Ciąg liczbowy, dosłownie szereg (*Reihe*), w rozumieniu Heinego, to według współczesnej terminologii, ciąg Cauchy'ego liczb wymiernych;

„*Ciągiem liczbowym* nazywa się ciąg liczb a_1, a_2 itd., a_n, itd., gdy dla każdej jakkolwiek małej różnej od zera liczby η istnieje wartość n taka, że dla wszystkich dodatnich ν, $a_n - a_{n+\nu}$ leży poniżej η".

[9] Współczesny czytelnik może być zaskoczony tym, że ruch jest uznawany za skojarzenie geometryczne. W matematyce XVIII wieku było ono powszechne. Oto np. pierwsze zdanie z wykładu o krzywych Leonard Eulera: „Skoro wielkość zmienna (*quantitas variabilis*) jest ogólnie uznawana za wielkość (*magnitudo*) zawierającą w sobie wszystkie określone wielkości (*quantitates determinatas*), to w geometrii najodpowiedniejszym przedstawieniem wielkości zmiennej będzie nieograniczona linia prosta *RS*", L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Vol. II, Lausanæ 1748, s. 3, tł. P. Błaszczyk, K. Mrówka.

$$(\forall \eta \in \mathbb{Q}_+)(\exists n)(\forall \nu)(|a_n - a_{n+\nu}| < \eta).$$

W zapisie przyjmujemy, że $\eta > 0$ oraz $|a_n - a_{n+\nu}|$. Nie jest to wprost podane w definicji, ale wynika z dowodów prowadzonych przez Heinego.

Ciąg elementarny to ciąg zbieżny do zera;

„Każdy ciąg liczbowy, w którym liczby a_n wraz ze wrastającym indeksem n pozostają poniżej każdej podanej wielkości, nazywa się ciągiem elementarnym".

$$(\forall \eta \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|a_n| < \eta).$$

Znak stowarzyszony z ciągiem $a_1, a_2, \ldots$, to wyrażenie

$$[a_1, a_2, \ldots]$$

„*Liczbą uogólnioną lub znakiem liczbowym* nazywa się znak stowarzyszony z ciągiem liczbowym".

Zatem liczbą jest wyrażenie

$$[a_1, a_2, \ldots],$$

gdzie $a_i \in \mathbb{Q}$. Heine oznacza *liczby* także dużymi literami tak, że w miejsce $[a_1, a_2, \ldots]$ przyjmuje A. To czysto redakcyjny zabieg służący jedynie uproszczeniu formuł.

W roku 1872 matematycy mieli problem z definicją liczby rzeczywistej. Dla Heinego i Cantora liczba niewymierna była *znakiem*, Mèray mówił w tym kontekście o *fikcji*, Dedekind – że liczby niewymierne *są stwarzane*. Deklaracji tych nie należy jednak traktować jako rozstrzygnięć ontologicznych. *Znak* $[a_1, a_2, \ldots]$ jest w istocie klasą abstrakcji, ale w roku 1872 nie znano tego pojęcia i było wręcz tak, że pojęcie klasy abstrakcji wprowadzono w celu rozwiązania problemu z definicją liczby. Dopiero w XX wieku, gdy liczby zdefiniowano jako klasy abstrakcji, a zbiory pojęto jako obiekty istniejące poza czasem i przestrzenią, kwestii istnienia liczb nadano charakter pozamatematyczny. W pracach Mèraya, Heinego, Cantora, Dedekinda uwagi na temat natury liczb rzeczywistych wynikały raczej z braku odpowiednich pojęć matematycznych niż nastroju filozoficznego.

2.1.2. Arytmetyka

Pojęcie równości jest stosowane w rozprawie do różnych obiektów (liczb wymiernych, ciągów, *znaków*). W niniejszym komentarzu będziemy stosowali jeden znak równości, ale czytelnik łatwo się zorientuje, w jakim zbiorze jest określona dana relacja.

Heine przyjmuje, że gdy $a \in \mathbb{Q}$, to

$$a = [a, a, \ldots]. \tag{1}$$

Równość ciągów jest definiowana jak następuje:

$$(a_1, a_2, \ldots) = (b_1, b_2, \ldots) \Leftrightarrow_{df} (\forall \eta \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|a_n - b_n| < \eta). \tag{2}$$

Równość liczb:

$$[a_1, a_2, \ldots] = [b_1, b_2, \ldots] \Leftrightarrow_{df} (a_1, a_2, \ldots) = (b_1, b_2, \ldots).$$

Jeżeli (a_n) jest *ciągiem elementarnym*, to

$$[a_1, a_2, \ldots] = 0.$$

Działania:

$$[a_1, a_2, \ldots] + [b_1, b_2, \ldots] =_{df} [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots].$$

Znaki + występujące po lewej i prawej stronie definicji mają oczywiście odmienny sens. Heine, podobnie, jak inni matematycy XIX wieku, nie zwraca na to uwagi. Kwestia ta stała się wyraźna dopiero na tle teoriomnogościowej interpretacji operacji algebraicznych.

Liczba przeciwna, moduł, porządek liczb dane są definicjami:

$$-[a_1, a_2, \ldots] =_{df} [-a_1, -a_2, \ldots], \quad \big|[a_1, a_2, \ldots]\big| =_{df} [|a_1|, |a_2|, \ldots],$$

$$[a_1, a_2, \ldots] > [b_1, b_2, \ldots] \Leftrightarrow_{df} (\exists \eta \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(a_n - b_n > \eta).$$

Heine dowodzi, że suma, iloczyn oraz iloraz (gdy dzielnikiem nie jest *ciągiem elementarnym*) ciągów Cauchy'ego jest ciągiem Cauchy'ego.

2.1.3. Zupełność

W rozprawie znajdujemy dwie definicje granicy ciągu: jedną dla ciągów liczb wymiernych, drugą dla liczb rzeczywistych (*znaków*); różnią się one zakresem zmiennej związanej pierwszym kwantyfikatorem.

Definicja 1. „Jeśli dla liczb (wymiernych) a_1, a_2 itd. istnieje liczba (wymierna) $\mathfrak{A}$ o tej własności, że $\mathfrak{A} - a_n$, wraz ze wzrastającą n, opada poniżej każdej podanej wartości, to $\mathfrak{A}$ nazywa się granicą tych a".

W zapisie symbolicznym tak to przedstawimy:

$$[\mathfrak{A} - a_1, \mathfrak{A} - a_2, \ldots] = 0 \Leftrightarrow_{df} (\forall \eta \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|\mathfrak{A} - a_n| < \eta).$$

Definicja (zbieżności ciągu *znaków* do zera). „O znakach liczbowych C_1, C_2 itd., C_n mówi się, że opadają one poniżej każdej podanej wartości wraz ze wzrastającą n, gdy dla każdego różnego od zera znaku liczbowego D istnieje taka wartość dla n, że dla tej n oraz wszystkich dodatnich liczb całkowitych ν wartość liczbowa dla $C_{n+\nu}$ (§. 3, Def. 2) jest mniejsza od tej dla D".

Symbolicznie, z zastrzeżeniem, że w rozprawie nie pojawia się znak granicy, tak zapiszemy tę definicję:

$$\lim_{n\to\infty} C_n = 0 \Leftrightarrow_{df} (\forall D > 0)(\exists n_0)(\forall n)(|C_{n_0+n}| < D). \tag{3}$$

Dalej Heine wykazuje równoważność:

$$(\forall D > 0)(\exists n_0)(\forall n)(|C_{n_0+n}| < D) \Leftrightarrow (\forall \eta \in \mathbb{Q}_+)(\exists n_0)(\forall n)(|C_{n_0+n}| < \eta). \tag{4}$$

W dowodzie korzysta z założenia, które przyjmuje jako oczywiste:

$$(\forall D > 0)(\exists d \in \mathbb{Q})(0 < d < D). \tag{5}$$

Formuła (5) to wersja aksjomatu Archimedesa w postaci: zbiór $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $(\mathbb{R}, <)$.[10]

Definicja 2. „Jeśli A jest ustalonym znakiem liczbowym oraz $A - B_n$ opada poniżej każdego znaku liczbowego wraz ze wzrastającą n, *to A nazywa się granicą B*".

Symbolicznie:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = A \Leftrightarrow_{df} \lim_{n\to\infty} (B_n - A) = 0, \tag{6}$$

gdzie prawa strona dana jest definicją (3).

Liczba wymierna ma podwójne przedstawienie: a oraz $[a, a, \ldots]$. Heine zauważa, że faktycznie liczba wymierna ma wiele przedstawień. Obserwacja ta jest ujęta w

Twierdzenie. Jeżeli $\mathfrak{A} \in \mathbb{Q}$, to

$$[\mathfrak{A} - a_1, \mathfrak{A} - a_2, \ldots] = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{A} = [a_1, a_2, \ldots].$$

W rozprawie dowodzona jest implikacja z lewej strony na prawą, ale druga część twierdzenia łatwo wynika z (1) i (2).

Liczba (*znak*) A jest granicą ciągu liczb wymiernych, który ją wyznacza. Cantor miał kłopoty z jasnym przedstawieniem tej kwestii, Heine natomiast znalazł dla niej proste rozwiązanie. Oto odpowiednie twierdzenie:

„*Znak liczbowy A jest granicą członów a szeregu, z którym jest on stowarzyszony*".

Spójrzmy na dowód. Niech $A = [a_1, a_2, \ldots]$. Każda z liczb wymiernych a_i, gdy jest porównywana z A, odejmowana od A itd., musi być rozpatrywana w postaci $[a_i, a_i, \ldots]$, zatem

$$A - a_n = [a_1 - a_n, a_2 - a_n, \ldots].$$

Skoro (a_n) jest ciągiem Cauchy'ego, to dla każdego $d \in \mathbb{Q}_+$ istnieje takie n_0, że dla $n > n_0$ zachodzi $|a_n - a_{n_0}| < d$. To zaś, na podstawie (4) oraz definicji 2, oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

Zasadnicze twierdzenie części *O liczbach* dotyczy zupełności liczb rzeczywistych (*znaków*): Heine pokazuje, że *znak* odpowiadający ciągowi liczb rzeczywistych jest równy *znakowi* wyznaczonemu przez pewien ciąg liczb wymiernych. Twierdzenie to jest sformułowane w bardzo ogólnej postaci, w której występuje pojęcie niewymierności n-tego rzędu. Tak więc niewymierność 1. rzędu, to *znak stowarzyszony* z cięgiem liczb rzeczywistych $A_1, A_2, \ldots,$, niewymierność 2. rzędu to znak stowarzyszony z ciągiem liczb 1. rzędu itd.

[10] Zob. P Błaszczyk, *O ciałach uporządkowanych*, op. cit.

Twierdzenie. „*Niewymierności $m+2$. rzędu nie są nowymi, ale są równe tym rzędu pierwszego*".

Rozważmy dowód w najprostszej postaci: Jeżeli $A_1, A_2, \ldots$ jest ciągiem liczb rzeczywistych (spełniających warunek Cauchy'ego), to istnieje taki ciąg liczb wymiernych $a_1, a_2, \ldots$, że

$$\lim_{n\to\infty} A_n = [a_1, a_2, \ldots]. \tag{7}$$

Heine definiuje kolejne wyrazu ciągu (a_n), przyjmując, że są to liczby spełniające warunki:

$$0 < A_1 - a_1 < 1,$$

$$0 < A_2 - a_2 < 1/2,$$

$$0 < A_n - a_n < 1/n.$$

Następnie konstatuje, że zachodzi równość (7).

Zauważmy, że istnienie liczb a_i jest jedną z wersji aksjomatu Archimedesa, który w rozprawie Heinego w ogóle nie został rozpoznany. Docenić natomiast należy pomysłowość dwojakiego przedstawienia liczb wymiernych, który sprawdza się w tym dowodzie: liczba a_i, gdy występuje w *znaku* $[a_1, a_2, \ldots]$ jest w postaci *zwykłej* liczby wymiernej, natomiast w wyrażeniu $A_i - a_i$ jest brana w postaci $[a_i, a_i, \ldots]$.

3. Ciągłość funkcji

3.1. Preludium historyczne

W matematyce współczesnej ciągłość oznacza charakterystykę albo porządku liniowego, albo funkcji. Połączenie idei porządku ciągłego z pojęciem ciała algebraicznego doprowadziło do definicji liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jako ciała uporządkowanego w sposób ciągły[11]. Z kolei połączenie idei odwzorowania ciągłego z pojęciem ciała algebraicznego doprowadziło do pojęcia ciała topologicznego $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, \tau)$, gdzie τ jest topologią na $\mathbb{F}$, a działania $+$, $\cdot$ oraz operacja elementu odwrotnego x^{-1} są funkcjami ciągłymi względem topologii τ.

W matematyce i filozofii greckiej ciągłość charakteryzowała obiekty geometryczne (odcinki, figury, bryły i krzywe), a także ruch i czas. Greccy matematycy nie zdefiniowali ciągłości, zaś wśród definicji filozoficznych wiekową sławę zdobyła ta pochodząca od Arystotelesa: „wszystko ciągłe (πᾶν συνεχές) jest podzielne na te, które są podzielne na zawsze podzielne"[12].

Uwzględniając praktykę matematyczną, otrzymamy bardziej zróżnicowany obraz. Otóż w *Elementach* Euklidesa znajdujemy dwojakie podejście do odcinka: z jednej strony jest on pojmowany w myśl definicji Arystotelesa, z drugiej, zwłaszcza w teorii proporcji, odcinki wzięte razem są traktowane jako półgrupa uporząd-

[11] Zob. P. Błaszczyk, O ciałach uporządkowanych, op. cit.

[12] *Aristotelis Physica*, w: Bekker I. (ed.), *Aristotelis Opera*, Berlin 1831, 231a 15-16, tł. P. Błaszczyk, K. Mrówka.

kowana spełniająca aksjomat Archimedesa[13]. Ostatecznie, to drugie rozumienie odcinka doprowadziło do pojęcia ciała uporządkowanego[14].

Pojęcie ciągłości funkcji ma w pełni nowożytny rodowód: jest ono charakterystyką funkcji pojętej jako obiekt złożony z punktów. Takie punktowe rozumienie funkcji bierze swój początek w *La Géométrie* Kartezjusza[15].

Historia pojęcia funkcji i jej ciągłości jest stosunkowo dobrze opisana, dlatego tytułem uwyraźnienia rozstrzygnięć Heinego przedstawimy tylko definicje, które znajdujemy w pismach Dedekinda i Cantora.

3.2. Dedekind, 1872

W rozprawie *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* Richard Dedekind wprowadził pojęcie zbioru liniowo uporządkowanego $(X, <)$ oraz przedziału w takim zbiorze. W istocie Dedekind stosował dwa rozumienia przedziału. Pierwsze, to te, które jest powszechnie stosowane współcześnie, mianowicie $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$, wraz z wariantami $[a, b)$, $(a, +\infty)$ itd. Drugie można tak przedstawić: $P \subset X$ jest przedziałem, gdy

$$(\forall x, y \in P)((x, y) \subset P).$$

Dedekind pokazał, że w ciele liczb rzeczywistych wszystkie przedziały są pierwszego rodzaju.

A oto definicja ciągłości, jaką znajdujemy w rozprawie *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*:

„Jeśli liczba λ jest wynikiem rachunku na liczbach $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ oraz λ leży wewnątrz przedziału L, to można podać przedziały $A, B, C, \ldots$, w których leżą liczby $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, tego rodzaju, że wynik tego samego rachunku, w którym zamienimy liczby $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ na dowolne liczby z przedziałów $A, B, C, \ldots$ będzie zawsze liczbą leżącą wewnątrz przedziału L[16]."

Przyjmując, że f jest takim działaniem dwuargumentowym, że

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \lambda \in \mathbb{R},$$

uwagę Dedekinda zapiszemy jak następuje:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta, \eta > 0)(\forall x, y)(|\alpha - x| < \delta, |\beta - y| < \eta \Rightarrow |f(\alpha, \beta) - \lambda| < \varepsilon).$$

Jest to ni mniej, ni więcej jak definicja ciągłości funkcji dwuargumentowej w punkcie (α, β).

---

[13] Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, Euklides i Arystoteles o ciągłości. Część I. Euklides, *Filozofia Nauki* 4, 2013, 91-115 oraz P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides*, Elementy, *Księgi V-VI. Tłumaczenie i komentarz*, Copernicus Center Press, Kraków 2013.

[14] Zob. P. Błaszczyk Nota o rozprawie Otto Höldera *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, op. cit.

[15] Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, Metafizyka ruchu w *Geometrii* Kartezjusza, *Argument* 4 (2), 2014; http://www.argument-journal.eu.

[16] R. Dedekind, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1872, 19, tł. J. Pogonowski.

3.3. Cantor, 1883

Oryginalne, a rzadko przywoływane rozumienie ciągłości funkcji znajdujemy w artykule Cantora *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, z roku 1883. Pojęcie ciągłości funkcji (ruchu) jest tu podporządkowane ogólnej koncepcji kontinuum – koncepcji zabarwionej, jak to ma często miejsce w pismach Cantora, filozoficzną egzaltacją. W ujęciu Cantora ciągły ruch, ciągła przestrzeń, a nawet zbiory uporządkowane w sposób ciągły mają być szczególnymi przykładami kontinuum[17].

W topologii kontinuum jest definiowane jako zwarty i spójny podzbiór przestrzeni topologicznej (X, τ). Idea ta pochodzi właśnie z *Über unendliche*, gdzie kontinuum zostało zdefiniowane jako „doskonały" i „spójny" podzbiór przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, \varrho)$[18]. W *Über unendliche* Cantor przyjmuje, że badania kontinuum muszą być prowadzone w oparciu o arytmetykę liczb rzeczywistych, jednocześnie umieszcza swój wykład w szerokim planie filozoficznym, przekonany, że opisuje ten sam przedmiot, co Arystoteles, „który traktował kontinuum jako całość złożoną, która składa się *ex partibus sine fine divisibilibus*"[19].

Wstępne rozpoznanie dziedziny, do której mają należeć kontinua, jest następujące:

„Ma[my] wprawdzie u podstaw jedno- lub wielo- rzeczywistych lub zespolonych wielkości ciągłych (...) jak najbardziej wykształcone pojęcie zależnego od nich jedno- lub wieloznacznego kontinuum, tj. pojęcie funkcji ciągłej (...), jednak samo *niezależne* kontinuum jest przez autorów matematyków zakładane tylko w owej najprostszej postaci i nie jest poddawane żadnemu gruntownemu rozważaniu"[20].

Termin „wielkości ciągłe" oznacza w cytowanym fragmencie podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$, zaś graf funkcji ciągłej stanowi przykład kontinuum. Funkcję $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ utożsamił Cantor z jej grafem, $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, który następnie traktował jako kontinuum topologiczne w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{n+1}$. Powiązanie funkcji ciągłej z ruchem było dla Cantora tak oczywiste, że w artykule nawet nie pojawiła się sugestia, aby sprawdzić, czy faktycznie graf funkcji ciągłej jest „doskonało-spójny"; w istocie można to udowodnić[21]. W jednej z wcześniejszych prac Cantor podaje przykład funkcji ciągłej, której graf jest zawarty w „nieciągłej przestrzeni", co prowadzi do rozważań na temat „ciągłego ruch w nieciągłej przestrzeni"[22].

---

[17] Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, Euklides i Arystoteles o ciągłości. Część I. Euklides, op. cit.

[18] Cantora definicja zbioru spójnego jest różna od obecnie przyjmowanej. Kazimierz Kuratowski w monografii *Topologie* rozpoczyna rozdział poświęcony kontinuum od przypomnienia definicji Cantora, a w pierwszym twierdzeniu dowodzi, że w przestrzeni metrycznej, zwartej zbiór spójny w senie Cantora jest spójny w myśl współczesnej definicji; zob. K. Kuratowski, *Topologie*, t. II, PTM, Warszawa 1952, §42, s. 108. Cantora definicja zbioru doskonałego jest taka jak w książce K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1973, s. 138, przy czym Cantor rozważał tylko przestrzenie metryczne albo przestrzenie z topologią porządkową.

[19] G. Cantor, Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, *Mathematische Annalen* 21, 1883, op. cit.

[20] Ibidem.

[21] Zob. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, op. cit, s. 164, twierdzenie 2.

[22] Zob. G. Cantor, Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, *Mathematische Annalen* 20, 1882, 113–121; *O nieskończonych rozmaitościach punktowych* (fragmenty), tł. J. Pogonowski; http://www.eudoxos.pl/tlumaczenia/. Przykładem takiej „nieciągłej przestrzeni" jest $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{A}^n$, gdzie $\mathbb{A}$ to zbiór liczb algebraicznych.

3.4. *Elementy teorii funkcji. O funkcjach*

3.4.1. Definicja funkcji

Część drugą rozprawy *Elemente der Functionenlehre* otwiera definicja funkcji:

„*Funkcją jednowartościową* zmiennej x nazywa się wyrażenie, które dla każdej pojedynczej wymiernej lub niewymiernej wartości x jest jednoznacznie zdefiniowane".

Dalej Heine pokazuje, że wielomian oraz $\sin x$ podpadają pod przyjętą definicję. Pierwszy przykład jest oczywisty i pełni jedynie pomocniczą rolę, natomiast uwagi o funkcji $\sin x$ zasługują na komentarz.

Tradycyjnie, na niższych poziomach nauczania oraz w wykładach analizy, *sinus* jest definiowany *geometrycznie*, jako stosunek odpowiednich boków trójkąta prostokątnego. Przy takim podejściu trudno uznać *sinus* za *funkcję jednowartościową*, dlatego Heine wykorzystuje dobrze znane w XIX wieku rozwinięcie tej funkcji w szereg

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{8}$$

i kolejne wyrazy ciągu sum częściowych szeregu (8) czyni wyrazami ciągu, który *definiuje* liczbę $\sin x$, mianowicie

$$\sin x =_{df} \left[x, x - \frac{x^3}{6}, x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \dots \right].$$

Leonard Euler jako pierwszy rozwinął funkcję $\sin x$ w szereg[23]. W jego wykładzie przedstawienie (8) było twierdzeniem dowodzonym za pomocą liczb nieskończenie małych i nieskończenie dużych[24].

We współczesnej matematyce znajdujemy dwojakie podejście do funkcji *sinus*: w analizie rzeczywistej, gdzie punktem wyjścia jest definicja *geometryczna*, funkcja $\sin x$ jest rozwijana w szereg Taylora, dzięki czemu otrzymujemy przedstawienie (8). W analizie zespolonej funkcja $\sin x$ jest po prostu definiowana jako szereg (8). Wskazana dwoistość po raz pierwszy ujawniła się właśnie w rozprawie *Elemente der Functionenlehre*.

3.4.2. Dwie definicje ciągłości

Kolejny paragraf części *O funkcjach* otwiera definicja ciągłości funkcji w punkcie:

„Funkcja $f(x)$ nazywa się *ciągłą dla określonej pojedynczej wartości* $x = X$, gdy dla każdej dowolnie małej danej wielkości ε istnieje inna liczba dodatnia η_0 o takiej własności, że dla żadnej wielkości dodatniej η, która jest mniejsza od η_0, wartość liczbowa $f(X \pm \eta) - f(X)$ nie przekracza ε".

[23]Zob. L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Vol. I, Lausanæ 1748, rozdz. VIII. Dokładniej, przedstawienie Eulera ma postać: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$, co z uwagi na to, że w jego arytmetyce występują liczby nieskończenie duże (hipernaturalne), nadaje temu wyrażeniu inny sens od tego, jaki znamy ze współczesnych kursów analizy.

[24]Dowód Eulera można zrekonstruować w ramach analizy niestandardowej; zob. M. McKinzie, C. Tuckey, Higher Trigonometry, Hyperreal Numbers, and Euler's Analysis of Infinities, *Mathematics Magazine* 74(5), 2003, 339–368.

Zwrot „dowolnie mała wielkość” interpretujemy jako dowolną liczbę dodatnią i definicję Heinego możemy ująć następującą formułą:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta_0)\neg(\exists \eta < \eta_0)(|f(X+\eta) - f(X)| > \varepsilon). \tag{9}$$

Na gruncie współczesnej logiki formuła (9) jest równoważna formule

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta_0)(\forall \eta < \eta_0)(|f(X+\eta) - f(X)| \leqslant \varepsilon). \tag{10}$$

Można pokazać, zakładając, że $f : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$, gdzie $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem uporządkowanym[25], że formuła (10) jest równoważna tzw. *otoczeniowej* definicji ciągłości funkcji w punkcie, tj.:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta_0)(\forall x)(|X - x| < \eta_0 \Rightarrow |f(X) - f(x)| < \varepsilon). \tag{C1}$$

W części B, §2 jako pierwsze dowodzone jest następujące twierdzenie:

„Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła w $x = X$, to dla każdego ciągu liczbowego x_1, x_2, itd., który posiada znak X również $f(x_1), f(x_2)$ itd. tworzą ciąg liczbowy o znaku $f(X)$; *oraz na odwrót*, gdy dla każdego ciągu liczbowego x_1, x_2 itd., który posiada znak X również $f(x_1), f(x_2)$ itd. tworzą ciąg liczbowy o znaku $f(X)$, to $f(x)$ jest ciągła w $x = X$”.

W tezie twierdzenia znajdujemy zdanie, które we współczesnej matematyce funkcjonuje jako druga, tzw. *ciągowa*, definicja ciągłości funkcji w punkcie, mianowicie:

$$\text{dla każdego ciągu } (x_n), \quad \lim_{n\to\infty} x_n = X \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(X). \tag{C2}$$

Teza twierdzenia ustanawia równoważność tych definicji, tj.

$$(C1) \Leftrightarrow (C2).$$

Dowód tej równoważności należy do standardowych zadań współczesnych wykładów analizy matematycznej, dlatego warto zobaczyć, w jaki sposób Heine przechodzi od jednej definicji do drugiej.

Najpierw dowodzona jest implikacja $(C1) \Rightarrow (C2)$, w notacji Heinego:

$$[x_1, x_2, \ldots] = X \Rightarrow [f(x_1), f(x_2), \ldots] = f(X).$$

Gdy $[x_1, x_2, \ldots] = X$, to wyrazy x_n można tak przedstawić

$$x_n = X + \eta_n,$$

gdzie ciąg (η_n) spełnia warunek

$$(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|\eta_n| < \eta_0).$$

[25] Pierwsza definicja ciała uporządkowanego pochodzi z pracy Hilberta *Grundlagen der Geometrie* (1899); zob. P. Błaszczyk, Nota o *Über den Zahlbegriff* Davida Hilberta, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticum Mathematicae Pertinentia IV*, 2012, 195-198. W pracach Heinego, Dedekinda i Cantora podstawowe własności ciała uporządkowanego były przyjmowane w domyśle. Definicja podana przez Hilberta wyeksplikowała i usankcjonowała powszechną w owym czasie praktykę matematyczną.

Na podstawie $(C1)$ jest

$$[f(x_1), f(x_2), \ldots] = f(X).$$

Druga implikacja, czyli $(C2) \Rightarrow (C1)$, dowodzona jest metodą nie wprost. Kluczowe dla tej części jest zdanie:

„Gdyby bowiem było tak, że gdy ustali się określoną liczbę ε (B, §. 2, Def. 1) oraz weźmie się jakkolwiek małą liczbę η_0 i nigdy nie będzie spełniony warunek ciągłości, to zawsze będą istniały wartości η poniżej η_0, dla których $f(X+\eta)-f(X)$ pozostaje ponad ε".

Zapiszemy je formułą

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\eta_0)(\exists\eta_1 < \eta_0)(|f(X + \eta_1) - f(X)| > \varepsilon). \tag{$\neg$10}$$

Dalej Heine definiuje liczby η_n:

η_2 spełnia warunek $\eta_2 < \frac{\eta_0}{2}$,

η_3 spełnia warunek $\eta_3 < \frac{\eta_0}{4}$,

η_{n+1} spełnia warunek $\eta_{n+1} < \frac{\eta_0}{2^n}$,

i przyjmuje, że w ten sposób zdefiniował ciąg (η_n). Ciąg ten – co ma być oczywiste – „przedstawia ciąg elementarny", tj.

$$[\eta_1, \eta_2, \ldots] = 0, \tag{11}$$

skąd wynika, że

$$[X + \eta_1, X + \eta_2, \ldots] = X. \tag{12}$$

Na podstawie $(\neg10)$, każda z liczb η_n spełnia warunek

$$|f(X + \eta_n) - f(X)| > \varepsilon. \tag{13}$$

Ostatecznie (12) i (13) oznaczają, że funkcja f nie jest ciągła.

W XX wieku, gdy odkryto, że aksjomat wyboru, (CH), musi być użyty w dowodach wielu znanych i ważnych twierdzeń, pokazano, że musi on być także zastosowany przy definiowaniu ciągu (η_n). Z czasem znaleziono, że związek równoważności dwóch definicji ciągłości z aksjomatem wyboru jest znaczenie subtelniejszy, pokazano bowiem, że zachodzi równoważność

$$CH^\omega \Leftrightarrow (C1 \Leftrightarrow C2), \tag{14}$$

gdzie CH^ω oznacza aksjomat wyboru dla rodzin przeliczalnych[26].

W równoważności (14) przyjmuje się, że f jest funkcją rzeczywistą, zauważmy jednak, że zarówno definicja $(C1)$, jak i $(C2)$ może być postawiona w dowolnym ciele uporządkowanym. W dowolnym ciele uporządkowanym prawdziwa jest implikacja $(C1) \Rightarrow (C2)$. W dowodzie Heinego zwraca uwagę fakt, że (11) jest w istocie jedną z wersji aksjomatu Archimedesa. Istotnie można pokazać, że ciele niearchimedesowym niestandardowych liczb rzeczywistych istnieje funkcja ciągła w sensie $(C1)$, która nie jest ciągła w sensie $(C2)$.

[26]Zob. A. Błaszczyk, S. Turek, *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa 2009, 412–414.

3.4.3. Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośredniej

Najważniejszym twierdzeniem dowodzonym w części *O funkcjach* jest twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich. Heine tak je formułuje:

„Jeśli funkcja $f(x)$ ciągła (dla każdego poszczególnego x) od a do b posiada dla dwóch liczb $x = x_1$ oraz $x = x_2$ leżących między a oraz b przeciwne znaki, to znika ona dla pewnej leżącej pomiędzy nimi wartości x".

W przypisie Heine dodaje, co znamienne, że dowód tego twierdzenia jest wolny od *przedstawień geometrycznych.*

Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich ma długą historię. Próbowali go dowieść i D'Alembert, i Euler, i Lagrange, i Laplace. Bernard Bolzano w rozprawie *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes...* z roku 1817[27] szczegółowo opisuje wiele wcześniejszych prób, lecz co ważniejsze, podaje też *czysto analityczny*, czyli wolny od *przedstawień geometrycznych* dowód tego twierdzenia. Rozprawa Bolzana nie zyskała jednak wielkiego rozgłosu, nic zatem dziwnego, że Heine o niej nie wspomina.

Współcześnie, gdy dobrze znamy aksjomatyczny opis liczb rzeczywistych, łatwo jest nam śledzić historyczne dowody twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośredniej i wskazywać w nich luki, twierdzenie to jest bowiem równoważne aksjomatowi ciągłości.

Istotnie, niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że $f(0) < 0$ oraz $f(1) > 0$. Przyjmijmy $A = \{x \in [0, 1] : f(x) < 0\}$. Z aksjomatu ciągłości (zasady supremum) wynika, że istnieje $a = \sup A$. Pokażemy, że $f(a) = 0$. W tym celu skorzystamy z faktu, że funkcja ciągła zachowuje znak[28]:

$$f(c) \neq 0 \Rightarrow (\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|c - x| < \delta \Rightarrow f(c) \cdot f(x) > 0). \tag{15}$$

Zatem jeżeli $f(a) < 0$, to na podstawie (15), dla pewnego $\delta > 0$ oraz każdego x takiego, że $0 < x - a < \delta$, zachodzi $f(x) < 0$, co jest sprzeczne z założeniem $a = \sup A$. Podobnie pokazujemy, że założenie $f(a) > 0$ prowadzi do sprzeczności. Stąd $f(a) = 0$.

Z drugiej strony, jeżeli $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem uporządkowanym, w którym nie jest spełniony aksjomat (DC), to istnieje taki przekrój (L, U) zbioru $(\mathbb{F}, <)$, że ani w klasie L nie ma elementu największego, ani w U nie ma elementu najmniejszego. Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ dla } x \in L, \\ \ \ 1, \text{ dla } x \in U. \end{cases}$$

jest ciągła, a zarazem w żadnym punkcie nie przyjmuje wartości 0.

Inny przykład pochodzi wprost z rozprawy *Elementy teorii funkcji.* Heine rozważa mianowicie funkcję rzeczywistą $f(x) = x^2 - 2$. Przyjmijmy natomiast, że $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$. Para zbiorów

$$L = \mathbb{Q}_{\leqslant 0} \cup \{q \in \mathbb{Q}_+ : q^2 < 2\}, \quad U = \{q \in \mathbb{Q}_+ : q^2 > 2\}$$

[27] B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegensetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reeleWurzel der Gleichung liege*, Gottliebe Haase, Prague 1817.

[28] W rozprawie Heinego odpowiednikiem tego twierdzenie jest twierdzenie 3, które jest jednak dowodzone w oparciu o twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich.

stanowi taki przekrój zbioru $(\mathbb{Q}, <)$, a ponadto ani w L nie ma elementu największego, ani w U nie ma elementu najmniejszego[29]. Łatwo sprawdzić, że funkcja f jest ciągła. Ponadto $f(1) < 0$, $f(2) > 2$, a przy tym, dla każdego $x \in [1, 2] \cap \mathbb{Q}$ jest $f(x) \neq 0$.

Prześledzenie dowodu twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośredniej z rozprawy Heinego i wskazanie w nim ukrytych założeń pozostawiamy jako ćwiczenie.

*

* *

Zamieszczone w niniejszym tomie tłumaczenie *Elemente der Functionenlehre* zostało przygotowane przez Profesora Jerzego Pogonowskiego. Jest to pierwszy przekład na język polski pełnego teksu rozprawy. Wybrane fragmenty pracy Heinego można znaleźć w książce W. Więsław, *Matematyka i jej historia*, Wydawnictwo NOWIK, Opole 1997.

[29] Zob. P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Wyd. Naukowe AP, Kraków 2007, 35.