„Analiza i Egzystencja” 11 (2010)
ISSN 1734-9923

ARTYKUŁY

PIOTR BŁASZCZYK*

LICZBY RZECZYWISTE JAKO PRZEDMIOT INTENCJONALNY

Słowa kluczowe: przedmiot matematyczny, przedmiot intencjonalny, liczby rzeczywiste
Keywords: mathematical object, intentional object, real numbers

Filozofia matematyki, podobnie jak inne filozofie szczegółowe, obok swoich specyficznych kwestii podnosi też pytania ogólniejszej natury, z pogranicza różnych dziedzin. Pytanie o przedmiot matematyczny leży na granicy ontologii i filozofii matematyki i jest często przedstawiane w kontekście sporu o uniwersalia. Stewart Shapiro, klasyk współczesnej filozofii matematyki, obdarzony talentem upraszczania kwestii zawiłych, tak motywuje pytanie o przedmiot matematyczny:

> Cechą charakterystyczną dyskursu matematycznego jest odniesienie do przedmiotów szczególnego rodzaju, takich jak liczby, punkty czy zbiory. Weźmy dla przykładu twierdzenie greckiej matematyki: dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba pierwsza m, że $m > n$. Stąd wynika, że nie ma największej liczby pierwszej, a w konsekwencji, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Przynajmniej na pierwszy rzut

* Piotr Błaszczyk, dr hab. prof. UP, Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie. Zajmuje się filozofią i historią matematyki, ontologią, matematyką. Ostatnio opublikował książkę *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda „Stetigkeit und irrationale Zahlen”* (Kraków 2007).

> oka twierdzenie to dotyczy liczb. Czym one są? Czy język matematyki mamy traktować dosłownie i wnosić, że liczby, punkty, funkcje oraz zbiory istnieją? A jeżeli istnieją, to czy są niezależne od matematyka, jego umysłu, języka itp.? Nazwijmy *realizmem ontologicznym* pogląd, że przynajmniej niektóre obiekty matematyczne istnieją obiektywnie, niezależnie od matematyka. [...] *Idealista* przyznaje, że przedmioty matematyczne istnieją, utrzymuje natomiast, że są one zależne od [ludzkiego] umysłu. Może on twierdzić, że przedmioty matematyczne są konstruktami wyrastającymi z aktywności umysłowej indywidualnych matematyków. Będzie to idealizm subiektywny [...]. Ściśle rzecz ujmując, z tego punktu widzenia każdy matematyk ma swoje liczby, swoją przestrzeń euklidesową itp. Według innych idealistów przedmioty matematyczne stanowią swoistą tkankę duchową wspólną wszystkim istotom ludzkim. [...] Wszyscy idealiści zgadzają się co do tego, że gdyby nie było umysłów, nie byłoby też przedmiotów matematycznych. [...] Jeszcze bardziej radykalnym stanowiskiem negującym obiektywne istnienie przedmiotów matematycznych jest *nominalizm*. W jednej z jego odmian przyjmuje się, że przedmioty matematyczne są zwykłymi konstrukcjami językowymi[1].

Dodajmy do tego zestawu stanowisko samego Shapiro, wyrażone w opozycji do intuicjonizmu Brouwera i osadzone na biegunach stwarzanie–odkrywanie:

> [...] przyznaję, że mam odmienną intuicję i wierzę w obiektywność matematyki. Jak dla mnie, dowodzenie twierdzenia, czy zgłębianie natury danej struktury matematycznej, przypomina raczej odkrycie niż wynalazek, jest czymś na kształt poznawania faktu niż przejawem jakiejś nie-poznawczej postawy[2].

W cytowanym fragmencie, podobnie jak w klasycznym tekście Quine'a *On what there is*, kwestia przedmiotu matematycznego nie wyrasta z jakiejś matematycznej trudności, wieloznaczności, niejasności, lecz jest motywowana pytaniem o przedmiot odniesienia zdań matematycznych. Samo zdanie matematyczne z kolei jest rozpatrywane albo przez pryzmat odniesienia przedmiotowego, albo w perspektywie prawda–fałsz[3]. Warto więc

---

[1] Shapiro (2000, s. 25–26).

[2] Shapiro (2007, s. 338).

[3] „Zupełnie naturalne jest pytanie o język matematyki. Co znaczy twierdzenie matematyczne? Jaka jest jego forma logiczna? Jaka semantyka języka matematyki jest

zauważyć, aby uwyraźnić możliwości, jakie w ogóle uwzględnia Shapiro, że możliwe jest też i takie podejście, w którym sens zdania matematycznego jest konstytuowany nie przez odniesienie do przedmiotu czy prawdy, ale przez odniesienie do innych zdań matematycznych, tak, że można wówczas mówić o matematycznym sensie twierdzenia matematycznego[4].

W Błaszczyk (2007a) pokazaliśmy, że kategoria przedmiotu może być użyta do *wyjaśnienia* dziwnego – przynajmniej ze strukturalistycznego punktu widzenia – faktu matematycznego, tego mianowicie, że istnieją dwie różne kategoryczne charakterystyki ciała liczb rzeczywistych: w myśl pierwszej liczby rzeczywiste są szczególnym ciałem uporządkowanym, w myśl drugiej – szczególnym ciałem topologicznym. Przenosząc Ingardena koncepcję warstwowej budowy tekstu na tekst matematyczny, pokazaliśmy, że nad rozprawą *Stetigkeit und irrationale Zahlen* jest nadbudowany osobliwy przedmiot – przedmiot intencjonalny, a zawartość tego przedmiotu może być ujęta albo jako szczególne ciało uporządkowane, albo jako szczególne ciało topologiczne. W koncepcji tej wyjściową kategorią ontologiczną jest tekst matematyczny, a przedmiot matematyczny stanowi tylko element tzw. warstwy przedmiotowej, ponadto podstawową jednostką sensu jest w tej koncepcji tekst, a nie zdanie.

Prezentowana koncepcja wkracza więc z jednej strony na grunt filozofii języka, z drugiej – dotyczy tzw. przedmiotów abstrakcyjnych i, jako taka, żywo łączy się z filozofią umysłu. Z jednej strony język matematyki (ten niesformalizowany) jest oczywiście mniej skomplikowany niż język

---

najlepsza? Dość powszechnie przyznaje się, że to Georg Kreisel zdołał przekierować uwagę z pytania o istnienie w matematyce na pytanie o obiektywność dyskursu matematycznego. Przyjmijmy, że realizm [*realism in truth-value*] to pogląd, że zdania matematyczne posiadają obiektywną prawdziwość, niezależną od umysłów, języków, konwencji, a w konsekwencji i od matematyków. Stanowiskiem przeciwnym jest antyrealizm [*anti-realism in truth-value*] z tezą, że jeżeli nawet zdania matematyczne mają jakiekolwiek wartości logiczne, to wartości te zależą od matematyka". Shapiro (2000, s. 29).

[4] Zob. Rota (1997). I tak dla przykładu, przywołane przez Shapiro twierdzenie Euklidesa: „Prime numbers is more than any assigned multitude of prime numbers" (Euklides, IX.20) – bo ściśle rzecz biorąc, nie ma w *Elementach* twierdzenia „liczb pierwszych jest nieskończenie wiele" – może być rozpatrywane np. z uwagi na: (1) uzasadnienie, co jest ciekawe o tyle, że aksjomat indukcji nie jest w *Elementach* wprost sformułowany; (2) rolę w całym systemie *Elementów*; (3) uzasadnienie i rolę w dzisiejszej matematyce, powiedzmy w kryptografii.

naturalny, z drugiej – jest bardziej złożony niż języki sztuczne, np. C++, i stanowi przez to wygodny model do testowania ogólnych teorii znaczenia czy teorii przedmiotów abstrakcyjnych.

W niniejszym artykule przedstawimy koncepcję przedmiotu intencjonalnego, szkicując zaledwie ów szerszy kontekst, jaki wyznacza kategoria tekstu matematycznego. Pokażemy, że przedmiot matematyczny jest przedmiotem intencjonalnym, że jest on zarazem „obiektywny" i „zależny od matematyka" (jest „obiektywny" chociaż jest też w pewnym zakresie „konstruktem językowym"). Pokażemy, że przedmiot matematyczny jest zarazem „stwarzany" i „odkrywany", że można odkrywać fakty, dowodzić twierdzeń, „zgłębiać naturę struktury matematycznej", chociaż sama struktura została „stworzona".

Takie rozwiązanie jest możliwe dzięki szczególnemu podejściu do zagadnienia: otóż kwestię przedmiotu matematycznego traktujemy jako zagadnienie ontologiczne, a ontologię – jako naukę o przedmiotach różnego rodzaju (samo istnienia przedmiotu staje się wówczas kwestią wtórną)[5]. Prezentowana koncepcja nie ma w założeniu wymiaru *metafizycznego*, jak to jest w tradycyjnym sporze o uniwersalia, chodzi w niej przede wszystkim o opisanie w ramach jednego, spójnego modelu bogactwa faktów matematycznych związanych z liczbami rzeczywistymi – bogactwa, którego nie oddają znane nam teorie filozoficzne. Po drugie, wywód nasz ma charakter studium przypadku: zajmujemy się tylko ciałem liczb rzeczywistych, a nie przedmiotem matematycznym w ogóle. Zwalnia nas to z trudnego, przyznajmy, obowiązku definiowania terminu „przedmiot matematyczny"; łatwiej nam też w tym konkretnym przypadku pokazać, na czym polega ujęcie zawartości przedmiotu intencjonalnego; a wreszcie, dzięki temu, że prowadzimy studium przypadku, możemy wręcz dotknąć przedmiotu matematycznego i niemal chwycić go w dłonie. Przyjmując powyższe założenia, pokażemy więc, że liczby rzeczywiste są przedmiotem intencjonalnym, a tezę przeprowadzimy w ramach ontologii wypracowanej przez Romana Ingardena w *Das Literarische Kunstwerk* (1931) oraz w *Sporze o istnienie świata* (1947/48).

Ontologia Ingardena nie jest dobrze znana, nawet w Polsce, dlatego już w tym miejscu podamy krótkie wprowadzenia, aby czytelnika wykształconego w duchu tzw. filozofii analitycznej uchronić przed błędnymi

[5] Zupełnie inaczej definiowana jest ontologia w Quine (1948). Zob.: „Problem ontologii zdumiewa swoją prostotą. Można go sformułować w dwóch słowach: Co istnieje?".

skojarzeniami. Tak więc ontologia Ingardena to ogólna teoria przedmiotu. Opisano w niej wiele form przedmiotowych, m.in. ideę, rzecz, własność, proces, zdarzenie, system, różne wytwory świadomości, a dalej – przedmioty ogólne i indywidualne, przedmioty realne i nierealne, tj. absolutne, idealne, intencjonalne[6]. Przedmiot intencjonalny to rodzaj przedmiotu indywidualnego, coś, co w pewnym zakresie jest wytworem świadomości.

Przedmioty intencjonalne po raz pierwszy analizował Ingarden na przykładzie dzieła literackiego (Ingarden 1931). Z czasem, rozwijając ideę dzieła sztuki jako przedmiotu intencjonalnego, uwzględniając specyfikę innych dziedzin, przedstawił analogiczną koncepcję dzieła muzycznego, teatralnego, malarskiego i architektonicznego. W rezultacie przedmiot intencjonalny jest formą, która ma jeszcze różne odmiany. Tak więc przedmiotem intencjonalnym jest dzieło literackie, a jego specyfika polega na budowie warstwowej. Przedmiotem intencjonalnym jest też *fragment* dzieła literackiego, mianowicie postać literacka, a jego specyfika polega na dwustronności budowy oraz schematyczności[7]. W niniejszym artykule liczby rzeczywiste opiszemy jako przedmiot intencjonalny charakteryzujący się dwustronnością budowy i schematycznością.

Cechą charakterystyczną dzieła literackiego i postaci literackiej, rozumianych jako przedmioty intencjonalne, jest ich szczególny związek z konkretnym tekstem[8]. Tym wyróżnionym tekstem, z którym związane są

---

[6] W ontologii Ingardena idea nie jest niczym „psychicznym" i nie ma też w niej *miejsca* dla „idei Partenonu". Zob. Ingarden (1987, rozdz. X). Inaczej twierdzi Quine (1948): „Iksiński nigdy nie miesza Partenonu z ideą Partenonu. Partenon jest przedmiotem fizycznym; idea Partenonu jest czymś psychicznym (w każdym razie według teorii Iksińskiego, a sam nie mam lepszej do zaproponowania)". W ontologii Ingardena własność to szczególna forma przedmiotowa, nie zaś „uniwersale". Zob. Ingarden (1987, § 41). Inaczej twierdzi Quine (1948): „Zajmijmy się teraz ontologicznym problemem uniwersaliów: pytaniem o istnienie takich przedmiotów, jak własności [...]". W ontologii Ingardena, jako szczególne przedmioty opisywane są tzw. negatywne stany rzeczy, np. „Partenon nie jest czerwony", natomiast nieistnienie czegoś wykracza już poza ramy ontologii rozumianej jako teoria przedmiotu. Inaczej twierdzi Quine (1948): „Powiedzenie *Pegaz nie jest rzeczywisty* jest pod względem logicznym twierdzeniem tego samego typu, co powiedzenie, że *Partenon nie jest czerwony*".

[7] Niżej, w pkt 2, przedstawimy ontologiczną charakterystykę głównej postaci powieści Vladimira Nabokova *Lolita*.

[8] Ten moment sprawia, że wszystkie analizy odnoszące się do Pegaza, a przeprowadzone w Quine (1948), nie przenoszą się na przedmiot intencjonalny, podobnie w przypadku analiz odnoszących się do Apolla czy Hamleta przeprowadzonych w Russell (1905).

liczby rzeczywiste, jest rozprawa Richarda Dedekinda *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872). W artykule pokażemy zatem, że liczby rzeczywiste są przedmiotem intencjonalnym *nadbudowanym* nad rzeczoną rozprawą, przy czym skoncentrujemy się na wskazaniu aspektów *subiektywnych* przedmiotu matematycznego. Ogólnie tekst *Stetigkeit und irrationale Zahlen* został *stworzony* przez Dedekinda. Ale samo *stworzenie* tekstu nie wyczerpuje wątków *subiektywnych*. Przedmiot matematyczny (dokładniej: zawartość przedmiotu intencjonalnego) może być też *ujmowany* pod pewnym *względem*. Ów *wzgląd*, *aspekt* jest również *stwarzany* i zaliczamy go do tego, co *subiektywne* w przedmiocie matematycznym.

Nim przejdziemy do szczegółów, podamy *nieformalny* opis sytuacji matematycznej, która jest dla nas punktem wyjścia, oraz jej wstępny opis ontologiczny.

1. W XIX wieku, w związku z poszukiwaniem „arytmetycznych podstaw" rachunku różniczkowego, pojawiało się kilka konstrukcji liczb rzeczywistych: obok klasycznych już konstrukcji Cantora[9] i Dedekinda[10], w środowiskach matematycznych znana była konstrukcja Weierstrassa, oparta na teorii szeregów liczbowych[11], a pod koniec wieku Heinrich Weber przedstawił konstrukcję opartą na jego oryginalnej teorii proporcji[12]. Chociaż problem „arytmetycznych podstaw" został w zasadzie rozwiązany, to wiek XX przyniósł kolejne pomysły w tej dziedzinie, i tak mamy: liczby rzeczywiste jako ciągi cyfr (ułamki dziesiętne)[13], konstrukcję Bourbakiego opartą na pojęciu filtru Cauchy'ego w przestrzeni jednostajnej[14], liczby rzeczywiste konstruowane z rozszerzenia ciała liczb wymiernych techniką ultrapotęgi[15], liczby rzeczywiste wyróżnione jako pewne podciało ciała liczb Conwaya, gdzie sama konstrukcja Conwaya łączy technikę przekrojów Dedekinda z von Neumanna konstrukcją liczb porządkowych[16], liczby rzeczywiste zbudowane z wyróżnionych szeregów formalnych o współczynnikach cał-

---

[9] Cantor (1872).
[10] Dedekind (1872).
[11] Cantor (1883), Błaszczyk (2007a, s. 134–135).
[12] Weber (1895), Błaszczyk (2007a, s. 221–235).
[13] Hoborski (1921).
[14] Bourbaki (1966).
[15] Błaszczyk (2007a, rozdz. 5).
[16] Conway (2001).

kowitych[17], liczby rzeczywiste zbudowane z pewnych specjalnych funkcji (*near-endomorphisms*) prowadzących ze zbioru liczb naturalnych do zbioru liczb naturalnych[18], liczby rzeczywiste konstruowane ze zstępujących przedziałów liczb wymiernych[19].

Ta obfitość zrazu stanowiła problem: jaki związek, pytano, zachodzi między tymi konstrukcjami? Z czasem ustaliła się konwencja wsparta twierdzeniem o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych, że liczby rzeczywiste stanowią ciało uporządkowane w sposób ciągły. W latach trzydziestych pokazano, że możliwa jest też jeszcze inna definicja: w oparciu o twierdzenie Pontriagina o ciałach topologicznych liczby rzeczywiste można zdefiniować jako ciało topologiczne ciągłe, lokalnie zwarte, spójne o wymiarze topologicznym 1[20].

We współczesnej filozofii, zwłaszcza w związku z tzw. problemem wielorakiej redukcji, przyjęto rozwiązanie, że liczby rzeczywiste są ciałem uporządkowanym w sposób ciągły, charakterystyka oparta na twierdzeniu Pontriagina nie została natomiast, o ile nam wiadomo, w ogóle zauważona. Przyjęto też, że zadaniem filozofii jest, jeśli wolno tak powiedzieć, *zniesienie* wskazanej wielości, wypełnienie testamentu Ockhama, wykazanie, że wielość konstrukcji oraz wielość przedstawień liczby z jakiegoś *wyższego* punktu widzenia nie mają znaczenia, a tym, co ważne i podstawowe, jest struktura (w sensie ontologicznym) albo sama ciągłość (jako atrybut świata realnego)[21].

1.1. Opisując liczby rzeczywiste jako przedmiot intencjonalny, chcemy *oddać sprawiedliwość* wskazanym faktom. Tak więc chcemy najpierw uzgodnić wielość konstrukcji z dwoma kategorycznymi charakterystykami i dlatego przedmiotem matematycznym jest dla nas przede wszystkim konstrukcja liczb rzeczywistych (na poziomie ontologii zamiast o konstrukcji mówimy o zawartości przedmiotu intencjonalnego). Ciało uporządkowane w sposób ciągły jest wówczas ujęciem konstrukcji (dokładniej: ujęciem zawartości przedmiotu intencjonalnego). Podobnie ujęciem konstrukcji

---

[17] Faltin et al. (1975).

[18] Grundhöfer (2005).

[19] Mainzer (1995). Jeszcze inną konstrukcję znajdujemy w: Banaschewski (1998).

[20] Błaszczyk (2007a, rozdz. 8).

[21] Błaszczyk (2007a, § *Klasycy współczesnej filozofii matematyki o liczbach rzeczywistych*).

jest ciało topologiczne ciągłe, lokalnie zwarte, spójne o wymiarze topologicznym 1. W konsekwencji, tak jak wiele jest różnych konstrukcji, tak samo wiele jest przedmiotów matematycznych, które uznajemy za liczby rzeczywiste. W tym punkcie przyjmujemy zasadę (ontologiczną zasadę tożsamości przedmiotu intencjonalnego): przedmioty intencjonalne o różnych zawartościach są różne.

Daną konstrukcję liczb rzeczywistych można – jak wiadomo – przedstawić jako pewien zbiór. Takie podejście akceptujemy, ale tylko na poziomie matematycznym, tj. jako opis zastanego faktu, a nie jako doktrynę filozoficzną, według której wszelkie obiekty matematyczne są zbiorami. W związku z tym mówimy, że przedmiotem matematycznym w podstawowym znaczeniu jest owo *coś*, które jest przedstawiane jako zbiór. Stoją za tym fakty związane z praktyką matematyczną: o ile w wypadku niektórych konstrukcji opis teoriomnogościowy jest *naturalny* i *czytelny*, to w innych przypadkach wręcz utrudnia zrozumienie. Tak np. szeregi formalne standardowo nie są przedstawiane jako zbiory, a oryginalna konstrukcja Conwaya wychodzi od nad wyraz prostych intuicji i jest prowadzona poza klasyczną teorią mnogości. Ale nawet wtedy, gdy opis teoriomnogościowy jest *naturalny*, gdy jako zbiór przedstawiana jest np. konstrukcja z pracy Dedekinda (1872), to i tak to, co jest przedstawiane jako zbiór, zbiorem nie jest. I właśnie owo *coś*, do czego stosowany jest opis teoriomnogościowy, nazywamy przedmiotem matematycznym.

1.2. Do konstrukcji liczb rzeczywistych zaliczamy użytą technikę, sposób konstrukcji. Jedne techniki, jak np. ciągi Cauchy'ego, przekroje Dedekinda, ultrapotęga, są dobrze znane i mają już ustaloną nazwę, inne wymagają szczegółowego opisu.

Rozstrzygnięcie to wyda się kontrowersyjne, bo czymże jest technika? Na pewno nie jest to zbiór. Technika jest zwykle ujęta w formę definicji i jako taka nie jest ani prawdziwa, ani fałszywa. Raz skupia w sobie przebłysk geniuszu[22], innym razem łączy doświadczenia pokoleń[23].

---

[22] Każdy przekrój (A, B) zbioru liczb rzeczywistych $(R, <)$ jest tego rodzaju, że albo w klasie dolnej A jest element największy, albo w klasie górnej B jest element najmniejszy – trudno uwierzyć, że ta prosta zasada stanowi *fundament* analizy rzeczywistej.

[23] Z konstrukcji liczb wymiernych znamy definicję: $(p, q) \equiv (m, n)$ wtw $pn = qm$, gdzie m, n, p, q są liczbami całkowitymi. W *Elementach* znajdujemy ją jako twierdzenie VII.18. Do współczesnej matematyki jako definicję wprowadził ją H. Weber. Zob. Błaszczyk (2007a, rozdz. 6).

Technika jest czymś dziwnym z ontologicznego punktu widzenia: nie mamy tu warunków identyczności, chociaż znamy różnice[24]. O technice przekrojów Dedekinda mówimy zarówno wtedy, gdy przekrój oznacza parę zbiorów (A, B) albo tylko klasę dolną, a nawet i wtedy, gdy w punkcie wyjścia nie ma zbioru liniowo uporządkowanego, jak to jest w konstrukcji Conwaya. Przy konstrukcji liczb rzeczywistych zwykle definiuje się przekroje liczb wymiernych, ale w geometrii technikę przekrojów stosuje się do liczb dwójkowych, gdyż to liczby dwójkowe, a nie wymierne mają *sens* geometryczny[25]. Następnie, w nurtach matematyki nieklasycznej, w analizie intuicjonistycznej czy konstruktywistycznej, liczby rzeczywiste nie są ciałem uporządkowanym w sposób ciągły, mimo to strukturę stanowiącą podstawę analizy intuicjonistycznej czy konstruktywistycznej nazywa się liczbami rzeczywistymi. Jest tak dlatego, że liczby rzeczywiste identyfikowane są przede wszystkim z techniką konstrukcji, nie zaś z odpowiednim zbiorem, który w klasycznej matematyce otrzymujemy w wyniku zastosowania danej techniki[26].

Mimo że nie podajemy warunków identyczności, możemy wskazać różnice między technikami. Otóż niektóre konstrukcje wiążą się z przedstawieniem liczby rzeczywistej. W analizie obliczeniowej (*computational analysis*, *recursive analysis*) istotne są właśnie owe przedstawienia, dlatego tam uwzględnia się tylko konstrukcję Cantora, Dedekinda, rozwinięcie binarne lub dziesiętne, ewentualnie przedstawienie liczby rzeczywistej za pomocą zstępującego ciągu przedziałów[27]. Okazuje się, że definicje liczby rzeczywistej obliczalnej, oparte na tych czterech przedstawieniach, są równoważne. Jednakże już wtedy, gdy rozważane są ciągi liczb rzeczywistych obliczalnych, owe cztery konstrukcje nie dają równoważnych wyników[28].

[24] Por. slogan: *No Entity without Identity*. Oczywiście fakty matematyczne przedkładamy nad wszelkie zaklęcia ontologiczne.

[25] Zob. Błaszczyk (2007a, rozdz. 2).

[26] Zob. Heyting (1956), Bridges (1994).

[27] Przedstawienie liczby rzeczywistej z pracy Faltin et al. (1975) nie znalazło, o ile nam wiadomo, zastosowania.

[28] „Liczba rzeczywista x jest obliczalna, gdy istnieje obliczalny ciąg liczb wymiernych $\{r_k\}$ efektywnie zbieżny do x", „Ciąg liczb wymiernych $\{r_k\}$ jest obliczalny, gdy istnieją trzy funkcje rekurencyjne prowadzące z N do N, takie że dla wszystkich k jest $r_k = (-1)^{s(k)}a(k)/b(k)$ oraz $b(k) \neq 0$". Pour-El, Richards (1989, s. 14). Definicję efektywnej zbieżności tutaj pomijamy. I dalej: „W paragrafie 1 zauważyliśmy, że jest wiele równoważnych

Pewną różnicę między konstrukcjami Cantora i Dedekinda znaleziono też w ramach matematyki intuicjonistycznej. Pokazano mianowicie, że przechodząc standardową procedurę od liczb naturalnych do wymiernych, a następnie rozszerzając liczby wymierne sposobem Cantora, stosując ciągi Cauchy'ego albo, sposobem Dedekinda, stosując przekroje, w rezultacie otrzymuje się struktury nieizomorficzne[29].

W powyższych przykładach postępowaliśmy w następujący sposób: technikę przekrojów Dedekinda traktujemy jako coś indywidualnego, to samo w odniesieniu do techniki ciągów Cauchy'ego, następnie umieszczając owe *indywidua* w różnych kontekstach matematycznych – w analizie obliczeniowej, analizie intuicjonistycznej – znajdujemy dzielące je różnice. Taka procedura wynika z koncepcji własności przedmiotu matematycznego, którą przedstawimy w punkcie 4.

1.3. Technikę użytą w konstrukcji odróżniamy od przedstawienia liczby rzeczywistej. Po pierwsze dlatego, że tylko niektóre konstrukcje wiążą się z pewnym przedstawieniem. Po drugie dlatego, że znane są przedstawienia, które nie są związane z konstrukcją: (1) przedstawienie liczby rzeczywistej w postaci ułamka łańcuchowego nie jest związane z żadną konstrukcją; technika rozwinięcia w ułamek łańcuchowy znana była jeszcze przed Euklidesem, a w dzisiejszej matematyce twierdzenie o przedstawieniu liczby w postaci ułamka łańcuchowego zaliczane jest do tzw. wyższej arytmetyki; (2) podobnie przedstawienie binarne liczby rzeczywistej jest twierdzeniem wyższej arytmetyki i nie wiąże się z jakąś konkretną konstrukcją[30].

---

definicji liczby rzeczywistej obliczalnej. Tak więc wszystkie definicje, czy to *via* 1. ciągi Cauchy'ego (jak w niniejszej książce), czy 2. przekroje Dedekinda, czy 3. zstępujące przedziały, czy 4. rozwinięcia o podstawie *b*, dają w rezultacie równoważne definicje liczby rzeczywistej obliczalnej. Jednakże Mostowski (1957) wskazując kontrprzykłady pokazał, że odpowiednie definicje ciągów liczb rzeczywistych nie są równoważne. Zauważył on, że definicja Cauchy'ego jest prawdopodobnie najwłaściwsza. W istocie jest kilka powodów, aby wybrać definicję Cauchy'ego. [...] Przypuśćmy bowiem, że wybierzemy inną spośród wcześniej wymienionych (np. przekroje Dedekinda), aby zdefiniować 'obliczalne ciągi liczb rzeczywistych'. Wówczas otrzymamy raczej dziwny wynik, a mianowicie: Istnieją takie obliczalne ciągi $\{x_n\}$ oraz $\{y_n\}$, że $\{x_n + y_n\}$ nie jest obliczalny. Oczywiście przy definicji Cauchy'ego nic takiego się nie zdarzy". Pour-El, Richards (1989, s. 24).

[29] Zob. Bell (2005, s. 256).

[30] Zob. np. Niven (1956).

1.4. Z przedstawionego zarysu widać, że odróżniamy definicję liczb rzeczywistych od konstrukcji liczb rzeczywistych. W matematyce konstrukcja jest opisywana i nie jest kwalifikowana jako prawdziwa lub fałszywa. Nie jest to skądinąd coś wyjątkowego, algorytm jest oceniany z punktu widzenia poprawności oraz złożoności obliczeniowej, podobnie definicja nie jest kwalifikowana jako prawdziwa lub fałszywa, nie oceniamy też jako prawdziwego lub fałszywego rysunku występującego w tekście matematycznym, zwykle też sam problem matematyczny nie jest oceniany jako prawdziwy czy fałszywy.

Fakt, że już na poziomie matematycznym konstrukcja liczb rzeczywistych jest jedynie opisywana, skłania nas do wyboru języka ontologii fenomenologicznej. W tradycji analitycznej wskazane wyżej fakty matematyczne są opisywane – jeśli wolno tak powiedzieć – *w stylizacji zdaniowej* i nie są to naszym zdaniem udane próby[31].

2. Ontologiczny opis liczb rzeczywistych poprzedzimy charakterystyką wybranego przedmiotu intencjonalnego. Sam Ingarden zwykł analizować przedmiot intencjonalny na przykładzie postaci z *Trylogii* albo z *Pana Tadeusza* i taka tradycja utrwaliła się też wśród komentatorów, nam jednak za wzór posłuży Lolita, bohaterka powieści Vladimira Nabokova *Lolita*. Dlatego, tytułem usprawiedliwienia, zaczniemy od kilku zdań o samej powieści i wybranym przykładzie.

Powieść Nabokova w warstwie literackiej jest arcydziełem, w warstwie psychologicznej – opisem pewnej perwersji, choroby, i to zapewne było źródłem jej skomplikowanych losów wydawniczych: zrazu, z powodu cenzury obyczajowej, nie znalazła wydawcy w USA i po raz pierwszy ukazała się w paryskiej oficynie propagującej literaturę pornograficzną. Aspekt obyczajowy *Lolity* nie ma jednak dla nas żadnego merytorycznego znaczenia. Vladimir Nabokov należy do pisarzy rozwijających klasyczną XIX-wieczną powieść i z niezwykłą starannością dba o szczegóły opisów, to zaś jest ważne w analizie ontologicznej. Otóż jednym z istotnych momentów postaci literackiej jest swoista schematyczność (występowanie miejsc niedookreślenia). W każdej postaci literackiej można wskazać takie

[31] Uwagi Quine'a o liczbach rzeczywistych przedstawiamy w Błaszczyk (2007a, s. 35–37, 51–53, 68); uwagi Russella o liczbach rzeczywistych przedstawiamy w Błaszczyk (2007a, s. 35–37, 48, 68). Zob. też Błaszczyk (2007a, § *Klasycy współczesnej filozofii matematyki o liczbach rzeczywistych*).

miejsca niedookreślenia, tym niemniej przykłady, jakimi zwykle ilustruje się ten fenomen, są o tyle dyskusyjne, że przyjmują *zewnętrzny* – jeśli można tak powiedzieć – punkt widzenia, tj. perspektywę, która w rozpatrywanej powieści nie jest uwzględniona. Drastycznie przejaskrawiając takie *zewnętrzne* podejście, można by powiedzieć, że miejscem niedookreślenia Tadeusza – tytułowej postaci poematu *Pan Tadeusz* – jest jego grupa krwi, innymi słowy, Tadeusz miałby być niedookreślony pod względem, który w poemacie nie jest i nie mógł być uwzględniany, w tym sensie, że grupę krwi odkryto w roku 1901. O wyborze *Lolity* zdecydowało to, że jedno z miejsc niedookreślenia głównej postaci zostaje wskazane w samej powieści, lub inaczej, sam tekst nakierowuje uwagę czytelnika na miejsce, które okazuje się być miejscem niedookreślenia w rozumieniu Ingardena i w tym sensie w samej powieści wyznaczony jest aspekt, pod którym postać literacka jest niedookreślona. To po pierwsze.

Po drugie, wybór postaci z *Trylogii* znacznie komplikuje model ontologiczny, bo musimy rozstrzygnąć kwestię tożsamości postaci występującej w kolejnych częściach dzieła. Naszym zdaniem tożsamość jest w takim przypadku czysto konwencjonalna, ale rozumiemy, że nie każdy, kto kontynuuje dzieło Ingardena, gotów jest zaakceptować takie rozwiązanie. W przypadku *Lolity* problem ten nie występuje.

Po trzecie, wybrany przykład pozwala nam wskazać jeszcze jeden aspekt przedmiotu intencjonalnego: otóż bohaterkę powieści *Lolita* – wziętą jako przedmiot intencjonalny – odróżniamy od bohaterki filmu *Lolita*, w istocie znamy dwie ekranizacje (Stanleya Kubricka oraz Adriana Lyne'a) i przyjmujemy, że z każdą z nich związany jest inny przedmiot intencjonalny.

2.1. Przechodzimy do powieści. Opisy Lolity są liczne i różnorakie, a przy tym w większości pochodzą od wielbiącego jej dziewczęcą urodę mężczyzny – Humberta Humberta. Obok zapisów antropometrycznych: wzrost, waga, obwód uda, łydki, szyi itd., znajdujemy detale medycznej natury, takie jak ten, że wyrostek robaczkowy nie został usunięty, że na boku ma drobne, ciemnobrązowe znamię, a u dołu zgrabnej łydeczki, kilka cali nad brzegiem grubej, białej skarpetki, małą bliznę; że na ramieniu ma bliznę w kształcie ósemki po szczepionce przeciwko ospie. W większości jednak opisy są bardziej osobiste, co bynajmniej nie ujmuje im konkretności. Tak więc oczy Lolity są puste, jasnoszare, rzęsy czarne jak sadza. Twarz pokrywają piegi, z czego pięć rozłożonych jest niesymetrycznie na zadartym nosku; wargi są czerwone jak oblizany czerwony cukierek, a dolna z nich jest uroczo pełniejsza; przednie zęby – duże; głos – przenikliwie wysoki; włosy – ciepłobrązowe, z grzywką i falami po bokach, z naturalnymi lokami puszczonymi z tyłu, a do tego, kilka razy zauważony przez Humberta Humberta, jedwabisty połysk nad skronią, przechodzący w żywy brąz włosów. Karnacja i opalenizna są subtelnie cieniowane: ramiona mają kolor miodu, a po płaczu twarz Lolity przyjmuje odcień różu Botticellego. Do tego należy dodać przebogaty portret psychologiczny oddający rozwój i dojrzewanie postaci. Taką była Lolita między dwunastym a czternastym rokiem życia. To, że rosła i zmieniała się jest w powieści precyzyjnie zapisywane. Po trzech latach niewidzenia Lolity Humbert Humbert znajduje ją znacznie odmienioną. Jest wyższa o parę cali, ma nową fryzurę, nowe uszy, a jej głowa jakby się zmniejszyła, policzki zapadły się, piegi zbladły. Tyle o Lolicie[32].

W opisach tych rysuje się coś, co ma strukturę realnego przedmiotu, ale w odróżnieniu od *prawdziwie* realnego przedmiotu owo coś istnieje tylko jako wyznaczone przez tekst. Do tego czegoś, do tego przedmiotu, odnoszą się wszystkie wyżej przytoczone określenia. Jednocześnie temu czemuś, temu przedmiotowi, można przypisać określenia, których nie sposób uznać za charakterystykę Lolity, jak na przykład to, że owo coś w całości zostało wymyślone przez Nabokova, że zostało następnie utrwalone w piśmie, że jest w jakiś sposób odtwarzane przez każdego czytelnika.

Całość, do której odnoszą się te dwie grupy określeń, nazywamy przedmiotem intencjonalnym[33]. Tak więc Lolita z całym zestawem określeń, jakie otrzymała od Nabokova, jest tylko częścią przedmiotu intencjonalnego – tę część nazywamy zawartością. W rezultacie mamy tu trzy elementy:

---

[32] Zob. Nabokov (1955).

[33] Według terminologii z *O dziele literackim* jest to przedmiot ,,wtórnie czysto intencjonalny". Ingarden (1931, s. 180). Czasami mówi się też o ,,czysto i pochodnie intencjonalnym przedmiocie artystycznym". Sosnowski (2001, s. 217). Natomiast często używany w literaturze skrót ,,przedmiot czysto intencjonalny" nie jest adekwatny w tym kontekście. ,,Czysto intencjonalny" oznacza tylko tyle, że jest to przedmiot przez kogoś *wymyślony*, ale obok tego jest on też ,,wtórnie intencjonalny", co oznacza, że jest *utrzymywany w bycie* dzięki językowi, to zaś sprawia, że jest on przedmiotem *intersubiektywnym*. Aby uniknąć dwuznaczności, w pkt 2.2 podajemy pełną charakterystykę egzystencjalną przedmiotu intencjonalnego, a dalej, mając na uwadze tak scharakteryzowany przedmiot, będziemy pisali krótko: przedmiot intencjonalny.

twórcę, tekst oraz przedmiot intencjonalny – ową całość, w której postać Lolity stanowi zawartość.

2.2. Ontologiczna charakterystyka przedmiotu intencjonalnego jest dwojaka: najpierw opisujemy tzw. sposób istnienia, a następnie formę. Istnienie przedmiotu intencjonalnego charakteryzują momenty bytowe: pochodność, samodzielność, zależność, niesamoistność oraz nieaktualność. Opowiemy o czterech pierwszych.

Pochodność bytowa oznacza, że przedmiot „istnieć może tylko z wytworzenia przez inny przedmiot"[34], co oznacza ni mniej, ni więcej jak to, że źródło istnienia przedmiotu intencjonalnego leży w odpowiednich aktach świadomości Nabokova, że przedmiot intencjonalny zaczyna istnieć dzięki pisarzowi. Tak więc przedmiot intencjonalny zaczyna istnieć, ale oczywiście nie istnieje w fizycznej czasoprzestrzeni[35].

Samodzielność oznacza, że przedmiot intencjonalny nie musi współistnieć „w obrębie jednej całości z jakimś innym przedmiotem"[36], innymi słowy, że jest on odrębnym przedmiotem, odrębną całością, a nie aspektem, częścią czy własnością jakiegoś przedmiotu. Tak więc przedmiot intencjonalny nie jest częścią przeżyć Nabokova lub czytelnika, nie jest częścią czy własnością książki, rozumianej jako konkretny przedmiot realny.

Zależność (w technicznym znaczeniu, jakie temu pojęciu nadał Ingarden) oznacza, że przedmiot intencjonalny „wymaga dla swego istnienia jakiegoś innego przedmiotu bytowo samodzielnego"[37]. O ile więc pochodność bytowa oddaje to, że przedmiot powstaje, zaczyna istnieć, o tyle zależność ujmuje to, że dla dalszego istnienia przedmiotu intencjonalnego konieczny jest jakiś inny przedmiot. Dzieło literackie powstaje w aktach twórczych pisarza, ale jego dalsze istnienie jest możliwe dzięki temu, że zostało zapisane. Książka rozumiana jako konkretny, materialny przedmiot, jest tym, co pozwala dziełu trwać. Z drugiej strony twór literacki może trwać dzięki językowi. Znaczenia słów i sensy zdań są intersubiektywne, intersubiektywna jest również podstawa materialna przedmiotu intencjo-

---

[34] Ingarden (1987, t. I, s. 92).

[35] W związku z tym momentem mówi się o przedmiocie „**czysto** intencjonalnym" w odróżnieniu od przedmiotu „**także** intencjonalnego", który charakteryzuje się tym, że skierowana jest nań intencja aktu, ale który nie jest *stwarzany* w aktach świadomości.

[36] Ingarden (1987, t. I, s. 116).

[37] Ingarden (1987, t. I, s. 121–122).

nalnego – konkretne egzemplarze książki. Wszystko to razem sprawia, że przedmiot intencjonalny, w odróżnieniu od aktów pisarza i aktów czytelnika, jest przedmiotem intersubiektywnym[38].

Niesamoistność wiąże się z tym, że przedmiot intencjonalny „nie jest sam w sobie immanentnie określony". Stoi za tym taka intuicja: Lolita posiada te i tylko te cechy, które zostały przypisane jej w tekście i wszystkie te cechy zostały jej przypisane. Podczas gdy Lolicie przypisano czarne rzęsy, to realny, *prawdziwy* człowiek ma – powiedzmy – czarne rzęsy bez związku z jakimkolwiek *domniemaniem* czy *przypisaniem*. Nie będziemy się jednak przy tym zatrzymywać, bo w związku z przedmiotem matematycznym odejdziemy od Ingardena koncepcji własności, a tym samym i kwestia niesamoistności nie będzie dalej istotna.

2.3. W charakterystyce formalno-ontologicznej przedmiotu intencjonalnego najważniejsze są dwa momenty: dwustronność budowy oraz schematyczność (występowanie miejsc niedookreślenia).

Przedmiot intencjonalny ma dwie strony; tworzą je struktura intencjonalna (przedmiot intencjonalny jako taki) oraz zawartość. Z tym zaś wiąże się występowanie dwóch podmiotów: podmiot przedmiotu intencjonalnego jako takiego oraz podmiot przedmiotu, który występuje w zawartości. Na ten pierwszy podmiot padają określenia związane z genezą przedmiotu intencjonalnego. Dla przykładu, z jednej strony mamy: *Lolita* powstawała w latach 1947–1954, z drugiej: Po płaczu twarz Lolity przyjmuje odcień różu Botticellego[39].

Zawartość przedmiotu intencjonalnego, tj. Lolita, ma formę rzeczy (przedmiotu trwającego w czasie) i stanowi drugi podmiot przedmiotu intencjonalnego. Wyżej zebraliśmy określenia, które charakteryzują Lolitę jako przedmiot, pomijając to, co wydarzyło się w jej *życiu*, np. jej podróż z Humbertem Humbertem przez Amerykę. Nie zawsze jest to możliwe. Często postać przedstawiona ma tak niewiele własności, że niecelowe jest

[38] W związku z tym momentem można powiedzieć, że język jest „podstawą bytową" – ale nie „źródłem bytu", zob. Sosnowski (2001, s. 220) – przedmiotu intencjonalnego.

[39] Podobnie w odniesieniu do Pegaza z jednej strony mamy: „Pegaz występuje w pismach Hezjoda, Pindara", z drugiej: „Skrzydlaty koń ujarzmiony przez Bellerofonta". Wskazana dwoistość jest też powszechnie przyjmowana w filozofii analitycznej, z tą różnicą, że zamiast o własnościach, mówi się tam o dwóch rodzajach zdań, np. *external* oraz *internal sentences*, zob. Contessa (2009).

stosowanie doń kategorii rzeczy. Na przykład o mitycznym Pegazie wiemy tyle, że jest koniem i ma skrzydła, wszystko inne to zdarzenia z jego mitycznego żywota; taka postać jest wręcz utkana z miejsc niedookreślenia, z samych niedopowiedzeń.

Dalej, Lolita posiada te i tylko te określenia, które są zapisane w tekście książki, z jednym wyjątkiem: do zawartości zalicza Ingarden „charakter bytowy", tj. wyznaczony wprost lub tylko domniemany sposób istnienia przedmiotu, który występuje w zawartości; w powieści nie jest wprost powiedziane, że Lolita jest realnym przedmiotem, ale jej realność jest domniemana przez to, że jest ona elementem świata, który z kolei jest domniemany jako realny. Gdy przyjmiemy owo domniemanie realności, to Lolita powinna posiadać jeszcze inne własności niż tylko te, które zostały jej przypisane. Owe luki w określeniu Lolity nazywane są miejscami niedookreślenia. Dwa przykłady: (1) Nic nie jest powiedziane o uszach Lolity, co jest znamienne o tyle, że spotykając ją po latach, Humbert Humbert notuje: „Nowa, spiętrzona fryzura, nowe uszy"[40]. Ale uszy człowieka nie rosną tak szybko, aby w ciągu trzech lat stały się wyraźnie większe czy zmieniły kształt. Zmieniła się twarz Lolity i na jej nowym obliczu uwydatniły się uszy, w zasadzie te same sprzed trzech lat. Ale jakie one właściwie są? Małe? Duże? Odstające? Przylegające? Wąskie? Zaokrąglone? Jaki jest ich płatek i czy w ogóle mają one jakiś płatek? W powieści nic nie jest na ten temat powiedziane. (2) Wiemy, że Lolita ma piegi, lecz nic nie jest powiedziane o ich barwie, możemy jedynie domniemywać, że jest to jakiś odcień brązu.

Przyjmując, że Lolita jest domniemana jako przedmiot realny, możemy stosować doń całą naszą wiedzę o realności, co, wraz z jakimś systemem wnioskowania, pozwala nam wyznaczać kolejne miejsca niedookreślenia. Wszystko to, co można *wywnioskować*, co *implicite* jest zawarte w tekście, zaliczamy już do ujęcia przedmiotu, ale w tym punkcie wykraczamy już poza ustalenia Ingardena[41].

---

[40] Nabokov (1955, s. 301).

[41] Porównajmy z tym wypowiedź Quine'a (1948): „The sentence 'The author of *Waverley* was a poet', for example, is explained as a whole as meaning 'Someone (better: something) wrote *Waverley* and was a poet, and nothing else wrote *Waverley*'. (The point of this added clause is to affirm the uniqueness which is **implicit** in the word 'the', in 'the author of *Waverle*y'" – podkr. P.B.). Kolejny przykład: „Meinong insisted that the sein (being) of an object is independent of its sosein (properties) [...] What, then, determines the properties that a non-existent object has? [...] We specify an object by a certain set of

2.4. Lolita, jak powiedziano, posiada te i tylko te cechy, które zostały przypisane jej w tekście. Regułę tę traktujemy literalnie i dlatego w tym punkcie musimy odstąpić od Ingardena. „Charakter bytowy" decyduje o rozumieniu schematyczności przedmiotu intencjonalnego: domniemany sposób istnienia przesądza o tym, jakie własności w ogóle mogą być przypisywane danej postaci[42].

Realność bohaterów klasycznych powieści narzuca się z taką siłą, że większość komentatorów przyjęła, iż teoria przedmiotów intencjonalnych odnosi się jedynie do przedmiotów domniemanych jako realne. Nie znajdujemy racji dla takiego rozwiązania, nie wiadomo, w jakim celu mamy przyjmować tak daleko idące ograniczenie. Teorię przedmiotów intencjonalnych można z powodzeniem stosować nie tylko do klasycznej powieści, ale także do literatury *science fiction*, *fantasy*, a wreszcie do gier komputerowych czy szerzej – do tzw. wirtualnej rzeczywistości. I tak na przykład postaci niektórych gier komputerowych z założenia wręcz nie są domniemane jako realne: żyją w światach, które rządzą się swoimi, *nieziemskimi* prawami (fizycznymi, biologicznymi, psychologicznymi, społecznymi). Co wtedy? Wtedy musimy zdecydować, jakie własności mogą być przypisywane takim postaciom. Jak to ma konkretnie wyglądać w przypadku literatury *science fiction*, *fantasy* czy gier komputerowych – pozostawiamy miłośnikom literatury *science fiction*, *fantasy* czy gier komputerowych. Niżej pokażemy, jak zmodyfikować teorię przedmiotów intencjonalnych, aby zastosować ją do przedmiotów matematycznych.

3. Lolitę opisujemy jako przedmiot, a za podstawowy kontekst, który wyznacza sens zdań, przyjmujemy całą powieść. W tym punkcie pokażemy, dlaczego dla konstytucji sensu potrzebny jest nam cały tekst, a nie pojedyncze zdanie.

Przykład 1. Oto weźmy Pegaza. Mit – bo przecież nie słowo – ma cztery składowe: (1) narodziny z głowy Meduzy; (2) źródło Hippokrene; (3) skrzydlaty koń, którego dosiadał Bellerofont, pokonując Chimerę; (4) Pegaz na Olimpie. Epizody te odnajdujemy w różnych podaniach:

conditions. These might be [o Sherlocku Holmsie]: *was a detective, lived in Baker Street, had unusual powers of observation and inference, etc.* Let us write a conjunction of these conditions as $\varphi(x)$. Then if we call the object so characterised *'Sherlock Holmes'*, s for short, then s has its characterising properties, $\varphi(x)$, **plus whatever properties follow from these**". Priest (2003) – podkr. P.B.

[42] Zob. Błaszczyk (2003), Błaszczyk (2007a, rozdz. 9), Błaszczyk (2009).

ad 1) np. Hezjoda *Teogonia*, Strabona *Geografia*, Owidiusza *Metamorfozy*; ad 2) np. Starbona *Geografia*, Pauzaniasza *Wędrówki po Helladzie*, Owidiusza *Metamorfozy*; ad 3) np. Hezjoda *Katalog niewiast*, Pindara *Ody olimpijskie*, *Ody istmijskie*; ad 4) np. Hezjoda *Teogonia*, Pindara *Ody olimpijskie*. Niektóre z tych podań trudno jest uzgodnić: (1) Bellerofont dostał Pegaza w darze od Posejdona (Hezjod, *Katalog niewiast*); (2) Bellerofont ujarzmił Pegaza dzięki wędzidłu ze złotym kółkiem, które otrzymał od Ateny (Pindar, *Ody olimpijskie*). Aby mówić o Pegazie, należy to wszystko uwzględnić[43], a w analizie filozoficznej jasno zdać z tego sprawę. W Quine (1948) natomiast znajdujemy:

> We have only to rephrase ‘Pegasus’ as a description, in any way that seems adequately to single out our idea; say, ‘the winged horse that was captured by Bellerophon’.

Skąd jednak wiemy, że ta parafraza jest adekwatna? Domyślamy się, że Quine odnosi się do tekstu Pindara *Ody olimpijskie*, fragment XIII.3.3–4.2[44]; to zaś, że opisane tam zdarzenie jednoznacznie charakteryzuje Pegaza wynika stąd, że znamy całą antyczną mitologię[45]. W teorii przedmiotów intencjonalnych wprost przyjmujemy, że punktem wyjścia jest tekst, a nie „our idea”[46].

Osobną kwestią jest to, czy kategoria przedmiotu intencjonalnego byłaby pomocna w opisie Pegaza. Wielość źródeł sprawia, że na drodze konwencji, czy po prostu respektując praktykę badaczy literatury, przyjmujemy, iż wszystkie te fragmenty, a często są to tylko pojedyncze wersy,

---

[43] Pomijamy przedstawienia Pegaza, bo wobec tych faktów analizy językowe są bezradne. Natomiast w ramach koncepcji przedmiotów intencjonalnych pokazujemy, że jedną z warstw tekstu matematycznego stanowi rysunek, graf, diagram, co pozwala nam pełniej opisywać matematykę.

[44] Od słów: „Bo koło tego źródła usiłował on niegdyś/ ujarzmić Pegaza, syna Gorgony [...]” po: „opanował skrzydlatego konia/ Ujarzmiając koło pyska napiąwszy mu wędzidło”. Pindar (1987), s. 178–179.

[45] Nie potrafimy natomiast zgadnąć, co uzasadnia zdanie: „Słowo ‘Pegaz’ posiada konotację czasoprzestrzenną”. Quine (1948).

[46] Powtórzmy, że chodzi tu o teksty źródłowe, bo w przeciwnym razie dochodzimy do groteskowego ujęcia, jak np. to w Russell (1905): „A proposition about Apollo means what we get by substituting what the **classical dictionary** tells us is meant about by Apollo, say ‘the sun-god’” – podkr. P.B.

mają konstytuować jeden i ten sam przedmiot. Ale jako przedmiot Pegaza nie sposób scharakteryzować, jest on charakteryzowany tylko poprzez zdarzenia (Quine wybrał akurat jedno z nich). Za wskazanymi trudnościami stoi jednak coś dużo ważniejszego: nie wiadomo, jaki problem mielibyśmy rozwiązać, stosując do Pegaza teorię przedmiotów intencjonalnych. Pegaz jest przede wszystkim mitem, a teoria przedmiotów intencjonalnych tego aspektu nie ujmuje.

Przykład 2. W roku 1814 ukazało się pierwsze wydanie powieści *Waverley*; nie zawierało ono nazwiska autora. W roku 1817 ukazała się powieść *Rob Roy*, w 1819 – *Ivanhoe*; w obydwu zamiast nazwiska autora podano „The Autor of *Waverley*". W owym czasie zasadne było zatem pytanie, czy Walter Scott to The Autor of Waverley. Historycy literatury podają, że Scott nie sygnował nazwiskiem tych powieści – w istocie żadnej powieści nie podpisał nazwiskiem – w trosce o swoją reputację jako poety[47].

Gdy w Quine (1948) przekształcane jest zdanie „The Autor of *Waverley* was a poet", to jest ono całkowicie odarte z kontekstu historycznego i jako takie nie niesie dla nas żadnego znaczenia i nie wiąże się z żadnym realnym problemem. W Russell (1905) ów kontekst historyczny jest obecny, ale tylko połowicznie, bo zwrot „The Autor of *Waverley*" jest tam analizowany jako fragment zdania, podczas gdy pierwotnie był on użyty jako fragment tekstu: wyrażenie na karcie tytułowej, w miejscu, gdzie zwykle podawane jest nazwisko.

Przykład 3, w którym pokazujemy, dlaczego wszystko to, co wykracza poza tekst zaliczamy do ujęcia zawartości. Gdy w roku 1905 Bernard Russell pisze, że „kwadratowe koło" jest przedmiotem sprzecznym („apt to infringe the law of contradiction"), to nie wiadomo, w jakim systemie ma być ustalona owa sprzeczność[48]. Matematyka szybko zweryfikowała tę nieokreśloność: W roku 1907 Maurice Frechet podaje definicję przestrzeni metrycznej, w roku 1917, w pracy *Grundzüge der Mengenlehre*, Felix Hausdorff daje przykłady różnych *dziwnych* metryk. Dzisiaj w każdej książce traktującej

[47] Swoje poezje Scott podpisywał, ale w przypadku *Harold the Dauntless* zamiast nazwiska stoi „The Author of *The Bridal of Triermain*". Tu motywacja była odmienna.

[48] Zob. także: „Możemy nawet mieć nadzieję, że przyłapiemy go na **sprzeczności**, zmuszając do uznania, że niektóre z tych bytów są równocześnie okrągłe i kwadratowe". Quine (1948) – podkr. P.B.

o przestrzeniach metrycznych można zobaczyć kwadratowe koło[49]. Ktoś powie, że w przykładzie tym domniemana jest... metryka, geometria, klasyczna logika... Tylko czemu ma służyć tak daleko idące niedookreślenie, dlaczego mamy analizować coś tak nieokreślonego? W teorii przedmiotów intencjonalnych rafy te omijamy, przyjmując w punkcie wyjścia, że tekst wyznacza podstawowy kontekst, a wyrażenie – niechby nawet „kwadratowe koło" – musi być osadzone w jakimś tekście, a wówczas wszystko, co wykracza poza tekst, traktujemy jako ujęcie (np. w przestrzeni R^2 z metryką euklidesową otrzymujemy, że kwadratowe koło...).

Przykład 4, w którym pokazujemy, że zdanie pozbawione kontekstu, pozbawione jest sensu. W Quine (1948) czytamy: „Mówiąc, że istnieją liczby pierwsze większe od miliona, przyjmujemy tym samym ontologię zawierającą liczby". Jednakże nie udało nam się znaleźć tekstu matematycznego z takim zdaniem. Łatwo znaleźć teksty z twierdzeniem: Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Można by powiedzieć, że z tego twierdzenia wynika, iż „istnieją liczby pierwsze większe od miliona". Faktem jednak jest, że w pracach matematycznych takiego wniosku nie wyprowadza się i traktując o matematyce, należy respektować ten fakt.

O sensie zdania matematycznego decyduje kontekst, w jakim ono występuje, a sens całości konstytuuje problem, jaki jest rozwiązywany w tekście. Sens Twierdzenia Pitagorasa w *Elementach* jest inny niż we współczesnej matematyce (np. Sieklucki 1978): u Euklidesa służy ono dodawaniu figur geometrycznych (kwadratów), we współczesnej matematyce – definiowaniu metryki[50].

4. Z zestawem pojęć naszkicowanych w punkcie **2** przechodzimy do opisu liczb rzeczywistych. W tym wypadku podstawową triadę „twórca – tekst – przedmiot wyznaczony przez tekst" stanowią: „Richard Dedekind

[49] Chodzi o tzw. metrykę miasto (*Manhattan*, *taxicab*); podobno wymyślił ją H. Minkowski.

[50] Widać od razu, że w teorii przedmiotów intencjonalnych istnieje radykalna różnica między wyrażeniem, np. „kwadratowe koło", czy pozbawionym wszelkiego kontekstu zdaniem, np. „The present King of France is bald", a postacią literacką, np. Hamletem. Generalnie inaczej jest to przedstawiane w filozofii analitycznej, zob. np. „The whole realm of non-entities, such as 'the round square', 'the even prime other than 2', 'Apollo', 'Hamlet', etc. [...] All these are denoting phrases which do not denote anything". Russell (1905).

– *Stetigkeit und irrationale Zahlen* – przedmiot intencjonalny wyznaczony przez tę pracę".

Opisując *Stetigkeit und irrationale Zahlen* jako twór warstwowy, wyróżniamy:

(1) warstwę odniesień do problemów (są to przede wszystkim arytmetyczne podstawy rachunku różniczkowego) oraz odniesień do innych tekstów (przede wszystkim *Elementów* Euklidesa);

(2) warstwę oznaczeń symbolicznych;

(3) warstwę dedukcyjną: definicje, twierdzenia, dowody;

(4) warstwę przedmiotową, do której zaliczamy liczby: wymierne, linię prostą oraz liczby rzeczywiste.

Dalej pokażemy, że liczby rzeczywiste, podobnie jak postać literacka, są przedmiotem intencjonalnym, który charakteryzuje się dwustronnością budowy, pochodnością oraz schematycznością. Analogia między postacią literacką a przedmiotem matematycznym ogranicza się zatem do sposobu istnienia i budowy formalnej. Porównując tekst literacki i matematyczny, znajdujemy istotną różnicę: warstwa odniesień problemowych odróżnia tekst matematyczny od tekstu literackiego.

4.1. Zawartość przedmiotu intencjonalnego stanowią liczby rzeczywiste utworzone metodą przekrojów Dedekinda. W zbiorze przekrojów definiowana jest równość, porządek, o którym Dedekind pokazuje, że jest ciągły w myśl definicji podanej w pracy, definiowane są dodawanie i mnożenie. I co najważniejsze, w strukturze tej można – jak pisze Dedekind – „czysto arytmetycznie" odtworzyć podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego; w rozprawie dowodzone są dwa takie „twierdzenia": zasada supremum oraz warunek Cauchy'ego[51].

Obok określeń, które odnoszą się do liczb rzeczywistych, jest też cała grupa określeń odnoszących się do całości wyznaczonej przez tekst rozprawy, których do liczb rzeczywistych nie sposób odnosić. Nie jest cechą porządku ciągłego to, że został on wymyślony przez Dedekinda 24 listopada 1858 roku (tę datę podaje Dedekind w *Przedmowie*), nie jest cechą tego porządku, że był modelowany przez Dedekinda na wzór linii prostej (Dedekind pisze o tym w rozprawie). Określenia te odnoszą się do przedmiotu intencjonalnego jako takiego, nie zaś do jego zawartości.

[51] Zob. Błaszczyk (2007a, s. 60–67).

Tak więc przedmiot matematyczny stanowi zawartość przedmiotu intencjonalnego; liczby rzeczywiste, podobnie jak Lolita, nie są całym przedmiotem intencjonalnym, lecz stanowią jego zawartość. Dokładniej: o ile na poziomie matematycznym mówimy o konstrukcji liczb rzeczywistych, to na poziomie ontologicznym w miejsce konstrukcji występuje zawartość przedmiotu intencjonalnego. Zawartość ta może być ujęta jako ciało uporządkowane lub topologiczne.

4.2. Pochodność związana jest z tym, że przedmiot intencjonalny zaczyna istnieć; odnosi się to do całego przedmiotu, a więc i do jego zawartości. W rezultacie, tak jak przed rokiem 1872 nie było rozprawy Dedekinda, tak też i przed tym rokiem nie było tego, co dzisiaj w matematyce uważamy za liczby rzeczywiste.

Kwestia ta ma dwa aspekty: matematyczny i historyczny. Pierwszy związany jest z zasadniczym celem *Stetigkeit und irrationale Zahlen*: ustalenie „arytmetycznych podstaw rachunku różniczkowego", przez co Dedekind rozumiał dowody, które nie odwołują się do rozumowań geometrycznych. Rozwiązanie, jakie przedstawił, łączy się z pojęciem granicy i polega na rekonstrukcji twierdzeń rachunku różniczkowego w ciele uporządkowanym w sposób ciągły. Dziś wiadomo jednak, że te same twierdzenia można udowodnić w ciele niestandardowych liczb rzeczywistych, a więc w strukturze, która nie jest ciągła (w sensie Dedekinda)[52].

Aspekt historyczny wiąże się z tezą często powtarzaną przy okazji konstrukcji liczb rzeczywistych metodą przekrojów Dedekinda, że w pewnym sensie liczby rzeczywiste jako pierwszy skonstruował nie Dedekind, ale grecki matematyk Eudoxos. W pracy Błaszczyk (2007b), wskazując odpowiedni model, pokazaliśmy, że teza ta nie jest prawdziwa. Przedstawiony dowód oparty jest na aksjomatycznym opisie teorii proporcji z Księgi V *Elementów*.

4.3. O schematyczności i własnościach. Występujący w zawartości przedmiotu intencjonalnego przedmiot matematyczny nie ma domniemanego sposobu istnienia. To sprawia, że musimy odpowiedzieć na pytanie: jak rozumieć własność przedmiotu matematycznego? Mając na uwadze

[52] Zob. Błaszczyk (2007a, rozdz. 5). Współczesna analiza niestandardowa (NSA) wypracowała swoje własne techniki i w tym sensie w ramach NSA rekonstruowane są twierdzenia klasycznego rachunku różniczkowego, a nie techniki XVIII- i XIX-wiecznej analizy matematycznej, np. granicę *zastępują* w NSA nieskończenie małe, całkę Riemanna – sumy hiperskończone, jednostajną ciągłość – S-*continuity*.

praktykę matematyczną, przyjmujemy, że o przedmiocie matematycznym można orzekać to, co jest orzekane w teoriach matematycznych: każda własność jest własnością w ramach pewnej teorii i nie ma własności poza teorią. W rezultacie, tak jak powstają teorie matematyczne, tak też *rodzą się* nowe własności.

Dwa przykłady. (1) Własnością podzbiorów R oraz funkcji rzeczywistych jest ich mierzalność. Na początku XX wieku Henri Lebesgue rozwinął teorię miary. W ramach tej teorii można postawić pytanie: czy istnieją podzbiory liczb rzeczywistych, które nie są mierzalne? W roku 1905, stosując aksjomat wyboru, Giuseppe Vitali wskazał taki zbiór. (2) Własnością podzbiorów R jest rozstrzygalność lub nierozstrzygalność. Pod koniec XX wieku, m.in. w wyniku poszukiwań modelu obliczalności odpowiedniego dla analizy numerycznej, zbudowano model obliczalności nad dowolnym pierścieniem, w szczególności nad pierścieniem Z_2, ciałem liczb rzeczywistych, zespolonych. W literaturze model ten nazywa się maszyną BSS (*Blum-Shub-Smale machine*). Pokazano, że maszyna Turinga jest szczególnym przypadkiem maszyny BSS. W ramach tej teorii można pytać o rozstrzygalność podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych, i tak np. można pokazać, że każdy przeliczalny podzbiór zbioru R jest rozstrzygalny. Wraz z tą teorią pojawiały się też nowe własności funkcji rzeczywistych: funkcja może być lub nie być obliczalna[53].

Wśród teorii mamy także teorie sformalizowane i wówczas przez własność rozumiemy własność w takiej teorii. Dwa przykłady: (1) W ZF (teoria mnogości Zermelo-Fraenkla) + AC (aksjomat wyboru) istnieją podzbiory zbioru R niemierzalne w sensie miary Lebesgue'a. W teorii ZF + AD (aksjomat determinacji) każdy podzbiór zbioru R jest mierzalny w sensie miary Lebesgue'a. (2) W teorii ZF + AC ciągłość funkcji w sensie Cauchy'ego jest równoważna ciągłości w sensie Heinego. W ZF warunki te nie są równoważne[54].

Takie rozumienie własności pozwala nam mówić o schematyczności przedmiotu intencjonalnego. Przyjmując, że rozważamy zbiór R w teorii ZF + AC (z logiką pierwszego rzędu), możemy spytać, gdzie plasuje się moc tego zbioru w hierarchii alefów. Z niezależności hipotezy *continuum*

---

[53] Zob. Blum et al. (1989), Blum et al. (1998).

[54] W istocie mamy tu różne rozumienia ciągłości funkcji, bo w analizie niestandardowej każda funkcja jest ciągła w sensie Heinego.

wynika, że w ramach tej teorii nie ma odpowiedzi na to pytanie. Podobnie jako miejsce niedookreślenia liczb rzeczywistych można zinterpretować niezależność Hipotezy Suslina[55].

4.4. Na zakończenie powiemy, czym różni się teoria, w ramach której wyznaczane są własności liczb rzeczywistych, od ujęcia zawartości przedmiotu intencjonalnego. W tym celu zatrzymamy się jedynie przy konstrukcji opisanej w Dedekind (1872).

Generalnie przedmiot matematyczny ma *pierwszeństwo* przed własnością rozumianą jako własność w teorii matematycznej. Przedmiot matematyczny to pojęcie z zakresu ontologii i w ramach ontologii ustalana jest jego tożsamość. Własność rozumiana jako własność w teorii to pojęcie, które jest już wyrażane w języku matematyki. Tym, co łączy te dwie sfery – ontologiczną i matematyczną – jest ujęcie. W Dedekind (1872) znajdujemy opis konstrukcji. To, czym jest to, co zostało skonstruowane, zależy już do ujęcia. Znamy dwa takie ujęcia: (1) ciało uporządkowane w sposób ciągły; (2) ciało topologiczne, ciągłe, spójne, lokalnie zwarte o wymiarze topologicznym 1. Ujęcia te powstają na podstawie różnych fragmentów tekstu *Stetigkeit und irrationale Zahlen*[56]. Ujęcia zatem wprost odnoszą się do tekstu czy też do zawartości przedmiotu intencjonalnego. Sama zawartość mieni się różnymi aspektami, tak jak wieloma aspektami mieni się to, co w matematyce nazywane jest konstrukcją liczb rzeczywistych: tu także można powiedzieć, że to, co skonstruowane, to szczególne ciało uporządkowane lub szczególne ciało topologiczne.

Ujmując konstrukcję jako szczególne ciało uporządkowane, wyznaczono zarazem nową dziedzinę: teorię ciał uporządkowanych. W ramach tej teorii badane są np. różne wersje aksjomatu ciągłości, w ramach tej teorii można postawić też pytanie, czy istnieje dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami w ciele liczb rzeczywistych. Drugie ujęcie natomiast wykształciło się z zupełnie innych pojęć, poczynając już od samego rozumienia ciągłości[57].

Teorie takie, jak teoria miary czy maszyna BSS mogą być stosowane do wyznaczania własności liczb rzeczywistych, ale nie wyrosły one z pytania o to, czym są liczby rzeczywiste, czym jest to, co dane w konstrukcji. Osta-

[55] Zob. Błaszczyk (2007a, rozdz. 9).

[56] Zob. Błaszczyk (2007a, s. 303–314).

[57] Zob. Błaszczyk (2007a, rozdz. 8).

tecznie jednak granica między teorią a ujęciem nie jest ostra i w oderwaniu od konkretnego zagadnienia trudno ją przeprowadzić.

Literatura

Banaschewski B. 1998, *On Proving the Existence of Complete Ordered Fields*, „The American Math. Monthly" 105, s. 548–551.

Bell J.L. 2005, *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*, Milano: Polimetrica.

Blum L., Shub M., Smale S. 1989, *On the Theory of Computation and Complexity over the Real Numbers*: *NP-completeness, Recursive Functions and Universal Machines*, „Bulletin of the AMS" 21, s. 1–41.

Blum L., Cucker F., Shub M., Smale S. 1998, *Complexity and Real Computation*, New York: Springer.

Błaszczyk P. 2003, *Odrzucenie „tertium non datur"*, „Kwartalnik Filozoficzny" XXI (1), s. 17–37.

Błaszczyk P. 2004, *O przedmiocie matematycznym*, „Filozofia Nauki" 2 (46), s. 5–19.

Błaszczyk P. 2007a, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda „Stetigkeit und irrationale Zahlen"*, Kraków: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej.

Błaszczyk P. 2007b, *Eudoxos versus Dedekind*, „Filozofia Nauki" 2 (58), s. 95–113.

Błaszczyk P. 2009, *O miejscach niedookreślenia przedmiotu intencjonalnego*, „Filozofia Nauki" 3 (67).

Bridges D.S. 1994, *A Constructive Look at the Real Number Line*, [w:] P. Ehrlich (ed.), *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Dordrecht: Kluwer, s. 29–92.

Cantor G. 1872, *Über die Ausdehnung eines Satz aus der Theorie der trigonometrische Reihen*, „Mathematische Annalen" 5, s. 123–132.

Cantor G. 1883, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, przedruk [w:] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin: Springer 1932, s. 282–311.

Contessa G. 2009, *Who is Afraid of Imaginary Objects?*, [w:] N. Griffin, D. Jacquette (eds.), *Russell vs. Meinong*, New York: Routledge, s. 248–265.

Conway J. 2001, *On Numbers and Games*, Natick, Massachusetts: AK Peters.

Dedekind R. 1872, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn.

[Euklides] Heath T.L. 1956, *Euclid. The thirteen Books of The Elements*, New York: Dover.

Faltin F., Metropolis M., Ross B., Rota G.-C. 1975, *The Real Numbers as a Wreath Product*, „Advances in Mathematics" 16, s. 278–304.

Grundhöfer T. (2005), *Describing the Real Numbers in Terms of Integers*, „Archiv der Mathematik" 85, s. 79–81.

Heyting A. 1956, *Intuitionism*, Amsterdam: NHPC.

Hoborski A. 1921, *Nowa teoria liczb niewymiernych*, Warszawa–Kraków: Nakładem Księgarni J. Czerneckiego.

Ingarden R. 1931, *Das literarische Kunstwerk. Eine Untersuchung aus dem Grenzgebiet der Ontologie, Logik und Literaturwissenschaft*, Halle: Max Niemeyer (cyt. za: *O dziele literackim*, tłum. M. Turowicz, Warszawa: PWN 1988).

Ingarden R. 1987, *Spór o istnienie świata*, przygotowała i partie tekstu z języka niemieckiego przetłumaczyła D. Gierulanka, Warszawa: PWN (wydanie pierwsze: Kraków: PAU 1947/48; wydanie niemieckie: *Der Streit um die Existenz der Welt*, Tübingen: Max Niemeyer 1964/65).

Nabokov V. 1955, *Lolita*, London: Penguin Books (pierwsze wydanie: Paris: Olympia Press 1955; pierwsze wydanie amerykańskie: New York: G.P. Putnam's Sons 1958; cyt. za: *Lolita*, tłum. R. Stiller, Warszawa: PIW 1991.

Mainzer K. 1995, *Real Numbers*, [w:] H.-D. Ebbinghaus et al., *Numbers*, New York: Springer 1995, s. 27–53.

Mostowski A. 1957, *On Computable Sequences*, „Fundamenta Mathematica" 44, s. 37–51.

Niven I. 1956, *Irrational Numbers*, Rahaway, New Jersey: John Wiley & Sons.

Pindar 1987, *Ody zwycięskie*, tłum. M. Brożek, Kraków: Wydawnictwo Literackie.

Pour-El M.B., Richards I. 1989, *Computability in Analysis*, New York: Springer.

Priest G. 2003, *Meinongianism and the Philosophy of Mathematics*, „Philosophia Mathematica" XI (1), s. 3–15.

Quine W.V.O. 1948, *On what there is*, „Review of Methaphysics" 2, s. 21–38 (cyt. za: *O tym, co istnieje*, [w:] W.V.O. Quine, *Z punktu widzenia logiki*, tłum. B. Stanosz, Warszawa: Aletheia 2000, s. 29–47).

Rota G.-C. 1997, *The Phenomenology of Mathematical Proof*, „Synthese" 111, s. 183–196.

Russell B. 1905, *On Denoting*, „Mind" 14, s. 479–493.

Sieklucki K. 1978, *Geometria i topologia. Część I. Geometria*, Warszawa: PWN.

Shapiro S. 2000, *Thinking about Mathematics*, New York: Oxford University Press.

Shapiro S. 2007, *The Objectivity of Mathematics*, „Synthese" 156 (2), s. 347–381.

Sosnowski L. 2001, *Przedmiot intencjonalny*, [w:] A.J. Nowak, L. Sosnowski (red.) *Słownik pojęć filozoficznych Romana Ingardena*, Kraków: Universitas, s. 218–223.

Weber H. 1895, *Lehrbuch der Algebra*, Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn.

REAL NUMBERS AS AN INTENTIONAL OBJECT

Summary

We show that the field of the real numbers is an intentional object in the sense specified by Roman Ingarden. An ontological characteristics of a classic example of an intentional object, i.e. a literary character, is developed. There are three principal elements of such an object: the author, the text and the entity in which the literary character forms the content. In the case of the reals the triad consists of Richard Dedekind, his work *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, and the intentional object determined by this work.