G E O M E T R I A

KSIĘGA PIERWSZA

O zagadnieniach, w których linie proste & okręgi wystarczą do przeprowadzenia konstrukcji

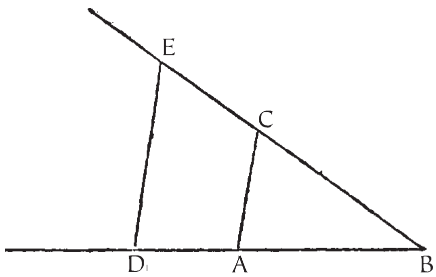
Wszystkie zagadnienia geometrii da się łatwo sprowadzić do takich pojęć, że wystarczy znać odcinki pewnych linii prostych, aby przeprowadzić konstrukcję.

Jak rachunek arytmetyczny odnosi się do działań geometrycznych

Tak jak arytmetyka polega tylko na czterech czy pięciu działaniach, czyli dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu, dzieleniu oraz wyciąganiu pierwiastków, co można uznać za pewien rodzaj dzielenia, tak i w geometrii, aby znaleźć szukane linie, wystarczy jedynie dodać lub odjąć pewne inne linie, lub też mając jedną, którą nazwę jednością, aby upodobnić ją, jak to tylko możliwe, do liczb, i która w zasadzie może być dowolnie wybrana, a następnie, mając dane dwie inne, znaleźć czwartą linię, która będzie do jednej z tych danych tak jak druga jest do jedności, co jest tym samym co mnożenie, lub jeszcze znaleźć czwartą linię, która będzie do jednej z nich tak jak jedność jest do drugiej, co jest tym samym co dzielenie, czy wreszcie znaleźć jedną lub dwie, lub kilka średnich proporcjonalnych między

między jednością i jakąś inną linią, co jest tym samym co wyciągniecie pierwiastka kwadratowego lub sześciennego z danej linii itd. I nie zawaham się wprowadzić do geometrii tych pojęć arytmetycznych w celu osiągnięcia większej jasności.

Mnożenie

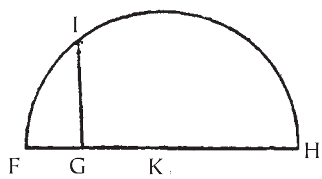


Dla przykładu, niech AB będzie jednością i niech zadanie polega na pomnożeniu BD przez BC. Muszę tylko połączyć punkt A z C, następnie poprowadzić DE równoległą do CA; wówczas BE jest iloczynem BD oraz BC.

Dzielenie

Lub też, gdy należy podzielić BE przez BD, łączę punkty E i D, prowadzę AC równoległą do DE i BC jest wynikiem tego dzielenia.

Wyciąganie pierwiastka kwadratowego



Lub też, gdy należy wyznaczyć pierwiastek kwadratowy z GH, dodaję w linii prostej FG równe jedności, dzielę FH na dwie równe części w punkcie K, zakreślam okrąg FIH o środku w K, następnie z punktu G prowadzę linię prostą i przedłużam ją aż do I pod kątami prostymi opartymi na FH; szukanym pierwiastkiem jest GI. Nie mówię tutaj nic o pierwiastku sześciennym lub innych, ponieważ powiem o nich z większa swobodą później.

Często

Jak używać liczb w geometrii

Często jednak nie jest konieczne rysowanie tych linii na papierze i wystarczy oznaczyć każdą z nich odrębną literą. I tak, aby dodać linie BD i GH, nazywam jedną a, drugą b, i piszę: $a + b$. Następnie $a -- b$ będzie oznaczało, że od a odjęto b; ab, że a jest pomnożone przez b; $\frac{a}{b}$, że b jest podzielone przez b; aa lub a^2, że a pomnożono przez siebie; a^3, że poprzedni wynik jest pomnożony przez a i tak dalej w nieskończoność. Podobnie, gdy chcę wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z $a^2 + b$, piszę $\sqrt{a^2 + b^2}$; gdy chcę wyciągnąć pierwiastek sześcienny z $a^3 -- b^3 + abb$, piszę $\sqrt{C.a^3 -- b^3 + abb}$, i podobnie z innymi pierwiastkami.

Należy zaznaczyć, że przez a^2 lub b^3 i podobne wyrażenia rozumiem zwykle jedynie linie proste, jakkolwiek w celu posłużenia się nazwami używanymi w algebrze nazywam je kwadratami lub sześcianami itd. Należy również zaznaczyć, że wszystkie części linii muszą być zwykle wyrażone przez tę samą liczbę wymiarów, przyjmując, że wymiar jedności nie jest jednoznacznie wyznaczony przez warunki zadania. W ten sposób a^3, abb oraz b^3, z których składa się linia nazwana przeze mnie $\sqrt{C.a^3 -- b^3 + abb}$, zawierają tyle samo wymiarów. Ale nie jest tak w przypadku jedności, dlatego że może ona występować wszędzie tam, gdzie jest zbyt dużo lub zbyt mało wymiarów. W ten sposób, gdy będzie trzeba wyciągnąć pierwias-

-tek

tek sześcienny z *aabb* -- *b*, należy przyjąć, że wielkość *aabb* jest podzielona raz przez jedność, zaś wielkość *b* jest pomnożona dwa razy przez jedność. Wreszcie, by nie zapomnieć nazw tych linii, trzeba zawsze sporządzać oddzielny spis, w miarę jak nazwy są przyjmowane lub zmieniane, pisząc na przykład:

AB ∞ 1, to znaczy AB jest równe 1,

GH ∞ *a*,

BD ∞ *b* itd.

Jak dojść do równań, które służą rozwiązywaniu problemów

Jeśli więc chcemy rozwiązać jakiś problem, to trzeba wpierw założyć, że znane jest rozwiązanie i nazwać wszystkie linie, tak samo znane, jak i nieznane, które wydają się niezbędne do przeprowadzenia konstrukcji. Następnie, nie czyniąc żadnej różnicy między liniami znanymi i nieznanymi, trzeba rozwikłać trudność w taki sposób, który najprościej uchwyci zależności między tymi liniami, aż zdołamy wyrazić tę samą wielkość na dwa sposoby, co nazywamy równaniem. Albowiem pojęcia jednego z tych dwóch wyrażeń równe są pojęciom drugiego.

I należy znaleźć tyle takich równań, ile przyjęliśmy linii niewiadomych; gdy jednak po rozważeniu wszystkiego nie można tylu znaleźć, to znaczy, że zagadnienie nie jest w pełni określone. W takim wypadku każdej linii, której nie odpowiada żadne równanie, możemy przypisać dowolnie wybrane odcinki.

Jeśli jest kilka równań, to każde należy tak spożytkować, by rozważając je samo w sobie lub porównując z innymi, wyznaczyć każdą z niewiadomych linii.

Trzeba

Trzeba je więc tak długo przekształcać, aż pozostanie tylko jedna niewiadoma linia, równa innej znanej albo której kwadrat lub sześcian lub kwadrat kwadratu, lub piąta potęga (sursolide), lub kwadrat sześcianu itd. jest równa wynikowi dodawania lub odejmowania kilku innych wielkości, z których jedna byłaby znana, a inne składałyby się ze średniej proporcjonalnej między jednością i tym kwadratem lub sześcianem, lub kwadratem kwadratu itd., pomnożone przez inne znane linie. Zapisuję to następująco:

$z \propto b$ lub

$z^2 \propto -- az + bb$, lub

$z^3 \propto + az^2 + bbz -- c^3$, lub

$z^4 \propto az^3 -- c^3z -- d^4$ itd

Oznacza to, że z, które biorę za wielkość nieznaną, jest równe b lub kwadrat z jest równy kwadratowi b pomniejszonemu o a pomnożone przez z lub sześcian z jest równy a pomnożonemu przez kwadrat z plus kwadrat b pomniejszony o sześcian c i tak samo dla innych.

W ten sposób wszystkie nieznane wielkości można zawsze wyrazić za pomocą jednej, gdy tylko problem można przedstawić za pomocą okręgów oraz linii prostych lub przekrojów stożka, a nawet przez jakąś inną krzywą, której stopień byłby większy co najwyżej o jeden lub dwa. Wszelako nie zatrzymuję się wcale nad wyjaśnieniem tego w szczegółach, a to dlatego, że pozbawiłbym was przyjemności samodzielnego uczenia się i pożytku z kształtowania waszego ducha w ćwi-

-czeniu

czeniu, co też w moim mniemaniu jest główną korzyścią czerpaną z tej nauki. Tak samo jak nie dostrzegam nic tak trudnego, czego nie mogliby odkryć ci, którzy są mało obeznani z elementarną geometrią i algebrą, a którzy uważnie prześledzą treść tego traktatu.

Dlatego też ograniczę się tu do takiego oto stwierdzenia: gdy rozwiązując te równania, przeprowadzimy wszelkie możliwe rozróżnienia, z pewnością dotrzemy do najprostszych pojęć, do których można sprowadzić dane zagadnienie.

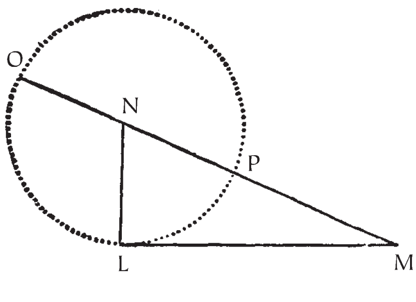
Jakie są problemy płaszczyzn

A jeśli może być ono rozwiązane w ramach elementarnej geometrii, to znaczy przez kreślenie linii prostych i okręgów na płaszczyźnie, kiedy ostatnie równanie zostałoby już całkowicie rozwiązane, to nie pozostanie już nic więcej prócz kwadratu nieznanej wielkości, który jest równy wynikowi dodawania lub odejmowania pierwiastka tej nieznanej wielkości, pomnożonego przez pewną znaną wielkość, oraz pewnej innej znanej wielkości.

Jak się je rozwiązuje

Tak więc ta nieznana linia lub jej pierwiastek dają się łatwo znaleźć. Jeśli bowiem na przykład mamy:

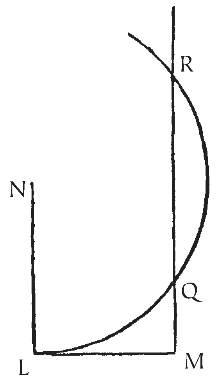
$$z^2 \propto az + bb,$$



to konstruuję trójkąt prostokątny NLM, w którym bok LM jest równy b – pierwiastkowi kwadratowemu ze znanej wielkości bb, a drugi a drugi, LN, jest równy $\frac{1}{2}a$ – połowie drugiej znanej wielkości, pomnożonej przez z, o której zakładam, że jest linią nieznaną. Dalej, przedłużając MN – podstawę trójkąta, aż do O, tak by NO była równa NL, całość OM jest szukaną linią z. Wyraża się to następująco:

$$z \infty \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

Ale gdy mam: $yy \infty -ay + bb$, gdzie y jest szukaną wielkością, konstruuję ten sam trójkąt prostokątny NLM i na jego podstawie odkładam NP równe NL, a reszta PM jest szukanym pierwiastkiem y. W ten sposób mam: $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Tak samo, jeśli miałbym $x^4 \infty -ax^2 + b^2$, PM byłby x^2 i otrzymałbym $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$, i w ten sam sposób w innych przypadkach.



Wreszcie, jeśli mam:

$$z^2 \infty az - bb,$$

tworzę NL równy $\frac{1}{2}a$ i LM równy b, jak wyżej. Dalej, zamiast połączyć punkty M z N, prowadzę równoległą MQR do LN i ze środka N kreślę okrąg przecinający ją w punktach Q oraz R i przechodzący przez L. Szukaną linią jest MQ lub MR, w tym bowiem przypadku wyraża się ona na dwa sposoby, mianowicie: $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ oraz $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

I jeśli okrąg, który ma swój środek w punkcie N, przechodzi przez punkt L, nie przecina ani nie dotyka

prostej

prostej MQR, to równanie nie ma żadnego pierwiastka, tak więc możemy potwierdzić, że nie jest możliwe przeprowadzenie konstrukcji zaproponowanego zagadnienia. Te same pierwiastki można znaleźć na wiele innych sposobów. Podałem tu te najprostsze, by pokazać, że konstrukcje wszystkich zagadnień elementarnej geometrii można przeprowadzić, czyniąc nie więcej niż to, co jest zawarte w czterech figurach, które objaśniłem. Sadzę, że starożytni matematycy nie dostrzegli tego, w przeciwnym bowiem wypadku nie zadaliby sobie trudu napisania tak wielu dzieł, gdzie już sam porządek twierdzeń poucza nas, że wcale nie dysponowali prawdziwą metodą, by je wszystkie odkryć, lecz raczej pozbierali te twierdzenia, które przypadkowo napotkali. Można to zobaczyć bardzo jasno na początku siódmej księgi Pappusa, gdzie po tym, jak zatrzymał się jakiś czas na wyliczeniu tego wszystkiego, co przed nim zostało napisane na temat geometrii, przechodzi wreszcie do omówienia zagadnienia, o którym twierdzi, że ani Euklides, ani Apoloniusz, ani nikt inny nie potrafił go całkowicie rozwiązać.