Przyczynki Do Ugruntowania Pozaskończonej Teorii Mnogości

§ 11. Typ Porządkowy θ Kontinuum Liniowego X

Georg Cantor

Przechodzimy do badania typu porządkowego zbioru $X = \{x\}$ wszystkich liczb rzeczywistych x, które są $\geqslant 0$ oraz $\leqslant 1$, w ich **naturalnym** uporządkowaniu,[1] tak, że dla dwóch dowolnych elementów x oraz x' tegoż [zbioru]

$$(1) \qquad x \prec x', \quad \text{o ile} \quad x < x'.$$

Oznaczeniem tego typu [porządkowego] niech będzie

$$(1) \qquad \overline{X} = \theta.$$

Z elementów teorii liczb wymiernych oraz niewymiernych wiadomo, że każdy ciąg podstawowy $\{x_\nu\}$ w X ma element graniczny x_0 w X oraz że także na odwrót, każdy element x z X jest elementem granicznym stowarzyszonego ciągu podstawowego w X. Tak więc, X jest „*zbiorem doskonałym*", a θ „*typem doskonałym*".

Jednak θ nie jest przez to jeszcze wystarczająco scharakteryzowany, musimy raczej nadto wziąć pod rozwagę następującą własność:

X *zawiera* jako podzbiór badany w § 9 zbiór R o typie porządkowym η i to *w szczególności tak, że między każdymi dwoma dowolnymi elementami* x_0 oraz x_1 z X leżą elementy R, wedle [rozważanego] porządku.[2]

Trzeba teraz pokazać, że *te cechy wzięte razem* wyznaczają w sposób wyczerpujący typ porządkowy θ kontinuum liniowego X, tak, że zachodzi twierdzenie:

„Jeśli zbiór uporządkowany M znamionuje się tym, że 1) jest „doskonały", 2) jest w nim zawarty zbiór S o liczbie kardynalnej $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$, który pozostaje w takim związku z M, że między każdymi dwoma dowolnymi elementami m_0 oraz m_1 z M leżą elementy S, wedle [rozważanego] porządku, to $\overline{M} = \theta$."

Dowód. Gdyby S zawierał element najniższy lub najwyższy, to nosiłyby one, ze względu na 2), ten sam charakter co elementy M; moglibyśmy je wtedy usunąć z S, bez naruszenia przez ten zbiór wyrażonego w 2) związku z M.

[1] Przypis tłumacza. **W oryginale: *Rangordnung*. Pojęcie to objaśnia Cantor w § 7: chodzi o relację spójną i przechodnią (*implicite* także asymetryczną)**.

[2] Przypis tłumacza. R to zbiór wszystkich liczb wymiernych.

Zakładamy zatem, że S [jest] bez elementu najniższego i najwyższego; wtedy S ma, na mocy § 9, typ porządkowy η.

Ponieważ S jest częścią M, więc na mocy 2) między każdymi dwoma dowolnymi elementami s_0 oraz s_1 z S muszą leżeć inne elementy S, wedle [rozważanego] porządku. Ponadto mamy, na mocy 2), $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$.

Obydwa zbiory S oraz R są zatem do siebie *„podobne”*,

$$(2) \qquad S \simeq R.$$

Myślimy o jakimkolwiek *„odwzorowaniu”* z R na S jako danym i zakładamy, że owo [odwzorowanie] daje jednocześnie określone *„odwzorowanie”* z X na M, a mianowicie w sposób następujący:

Wszystkie elementy X, które należą jednocześnie do zbioru R, niech odpowiadają obrazom tych elementów z M, które jednocześnie są elementami S oraz odpowiadają owym elementom R przy założonym odwzorowaniu R na S.

Jeśli jednak x_0 jest elementem X nie należącym do R, to może on być uważany za element graniczny zawartego w X ciągu podstawowego $\{x_\nu\}$, który może zostać zastąpiony przez stowarzyszony z nim ciąg podstawowy $\{r_{x_\nu}\}$ zawarty w R. Temu ostatniemu odpowiada jako obraz ciąg podstawowy $\{s_{\lambda_\nu}\}$ w S oraz M, który, na mocy 1), jest ograniczony przez element m_0 z M, który nie należy do S (F, § 10). Ten element m_0 w M (który pozostaje ten sam, gdy w miejsce ciągów podstawowych $\{x_\nu\}$ oraz $\{r_{x_\nu}\}$ rozważane będą inne ograniczone przez ten sam element x_0 w X (E, C, D w § 10)), służy za obraz x_0 w X. Na odwrót, z każdym elementem m_0 z M, który nie występuje w S stowarzyszony jest całkowicie określony element x_0 z X, który nie należy do R i którego obrazem jest m_0.

W ten sposób ustanowiona jest między X oraz M wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość, o której trzeba dowieść, że stanowi ona „odwzorowanie” tych zbiorów.

Wynika to z uprzednio [powiedzianego] dla tych elementów z X oraz M, które jednocześnie należą do zbiorów, odpowiednio, R oraz S.

Porównajmy element r z R z nie należącym do R elementem x_0 z X; niech stowarzyszonymi [z nimi] elementami z M będą s oraz m_0.

Jeśli $r < x_0$, to istnieje wzrastający ciąg podstawowy $\{s_{\lambda_\nu}\}$, który jest w M ograniczony przez m_0 i mamy (§ 10) po pierwsze $s_{\lambda_\nu} \prec m_0$ dla każdego ν, a z drugiej strony $s \prec s_{\lambda_\nu}$ dla $\nu \geqslant \nu_0$, a z tego (§ 7) $s \prec m_0$.

Jeśli $r > x_0$, to w podobny sposób wnioskuje się, że $s \succ m_0$.

Jeśli rozważymy wreszcie dwa nie należące do R elementy x_0 oraz x'_0 i odpowiadające im w M elementy m_0 oraz m'_0, to poprzez analogiczne rozważania pokazuje się, że gdy $x_0 < x'_0$, to $m_0 \prec m'_0$.

Na tym dowód podobieństwa X oraz M zostaje zakończony i mamy zatem

$$\overline{M} = \theta.$$

$* * *$

Podstawa tłumaczenia: Cantor, G. 1895. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. § 11. Der Ordnungstypus θ des Linearkontinuums X. *Mathematische Annalen* **46**, 481–512.

Tłumaczenie: Jerzy Pogonowski
2 listopada 2010