Euklides i Arystoteles o ciągłości. Część I. Euklides

Piotr Błaszczyk, Kazimierz Mrówka*

Wstęp

W matematyce współczesnej ciągłość oznacza charakterystykę albo porządku liniowego, albo funkcji. Łącząc te dwa znaczenia z pojęciem ciała algebraicznego oraz topologii otrzymujemy pojęcie ciała liczb rzeczywistych oraz ciała topologicznego. Liczby rzeczywiste $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ to ciało uporządkowane w sposób ciągły, gdzie ciągłość oznacza charakterystykę porządku.[1] Ciało topologiczne $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, \tau)$, gdzie τ jest topologią na $\mathbb{F}$, to ciało algebraiczne, w którym działania $+$, $\cdot$ oraz operacja elementu odwrotnego x^{-1} są funkcjami ciągłymi względem topologi τ.[2]

W filozofii i matematyce greckiej pojęcie „wielkości ciągłej" oznaczało obiekty geometryczne: odcinki, wielokąty, bryły, kąty. Ruch oraz czas także były pojmowane jako ciągłe, ale, jak dowodził Arystoteles, ciągłe w tym samym sensie, co „wielkości ciągłe".[3] Pojęcie ruchu występowało też w matematyce, np. u Archimedesa przy definiowaniu krzywych, ale ciągłość ruchu nie stała się przedmiotem osobnej refleksji. W opisie odcinka skupia się więc antyczne rozumienie ciągłości.

W *Elementach* Euklidesa znajdujemy dwa sposoby charakteryzowania odcinka. Pierwszy pochodzi z ksiąg geometrycznych, Ksiąg I-IV, gdzie pojedynczy odcinek ma, przyjmując język Euklidesa, „granice" i jest „podzielny". Drugi – z Księgi V, gdzie odcinek jest, przyjmując tym razem język współczesnej matematyki, elementem struktury $(M, +, <)$, w której działanie i porządek liniowy są powiązane pewnymi aksjomatami. Tym, co odróżnia te dwa ujęcia jest w pierwszym rzędzie porządek liniowy.

W matematyce współczesnej porządek liniowy występuje i w aksjomatach geometrii, i w aksjomatach liczb rzeczywistych, i w definicji odcinka rozumianego jako obiekt geometryczny, i w definicji odcinka liczb rzeczywistych. Pojęcie to

*Przygotowane w ramach projektu *Ciągłość i liczby rzeczywiste. Eudoxos-Dedekind-Conway*, N N101 287639.

[1] Ciągłość porządku, tzw. aksjomaty ciągłości, jest wyrażana na kilka równoważnych sposobów; zob. [Błaszczyk 2012].

[2] Zob. [Błaszczyk 2007], s. 255-330.

[3] Zob. Arystoteles, *Fizyka*, 231b-232a; zob. także [Błaszczyk 2010b].

jest stosunkowo młode i wiąże się z zupełnie nowym, różnym od antycznego, opisem pojedynczego odcinka.[4]

Artykuł Georga Cantora *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, zwłaszcza część, w której autor rozważa pojęcie kontinuum, skupia najważniejsze cechy tego nowego opisu odcinka, a zarazem łączy tradycję antyczną ze współczesną matematyką.[5] W topologii kontinuum jest definiowane jako zwarty i spójny podzbiór przestrzeni topologicznej (X, τ). Idea ta pochodzi właśnie z *Über unendliche ...*, gdzie kontinuum zostało zdefiniowane jako „doskonały" i „spójny" podzbiór przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, \varrho)$.[6] W *Über unendliche ...* Cantor przyjmuje jako oczywiste, że badania kontinuum muszą być prowadzone w oparciu o arytmetykę liczb rzeczywistych, jednocześnie umieszcza swoje wywody na szerokim tle filozoficznym, przekonany, że opisuje ten sam przedmiot, co Arystoteles, „który traktował kontinuum jako całość złożoną, która składa się *ex partibus sine fine divisibilibus*".[7]

Przyjrzyjmy się rozumowaniu Cantora. Wstępne rozpoznanie dziedziny, do której mają należeć kontinua jest następujące:

„Ma[my] wprawdzie u podstaw jedno- lub wielo- rzeczywistych lub zespolonych **wielkości ciągłych** [...] jak najbardziej wykształcone pojęcie zależnego od nich jedno- lub wieloznacznego **kontinuum, tj. pojęcie funkcji ciągłej** [...] jednak samo *niezależne* kontinuum jest przez autorów matematyków zakładane tylko w owej najprostszej postaci i nie jest poddawane żadnemu gruntownemu rozważaniu".[8]

Termin „wielkości ciągłe" oznacza w cytowanym fragmencie podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^n$, lub $\mathbb{C}^n$, zaś graf funkcji ciągłej stanowi przykład kontinuum.

Przechodząc do określenia metody, Cantor czuje się zobowiązany zaznaczyć dystans wobec filozofii Kanta i jednocześnie wyklucza ze swoich badań pojęcie czasu:

---

[4] Z porządkiem liniowym wiąże się dodatkowo napięcie: pojęcie pierwotne vs pojęcie definiowane. W [Dedekind 1872] porządek liniowy ciała liczb wymiernych jest pojęciem pierwotnym. W [Euler 1807], s. 207, [Cauchy 1821], s. 2-3, oraz [Grassmann 1861], s. 28-29, porządek liniowy jest definiowany. W [Hilbert 1900], [Hölder 1901] porządek liniowy ciała uporządkowanego – w pierwszym przypadku, półgrupy uporządkowanej – w drugim, jest pojęciem pierwotnym, przy czym Hölder wyraźnie już odróżniania te dwa podejścia, tj. pojęcie definiowane i pierwotne. Porządek liniowy, dokładniej: relacja „leżenia między", został wprowadzony do geometrii elementarnej w [Pasch 1882]. Relacja „leżenia między" jest pojęciem pierwotnym geometrii w [Hilbert 1903] oraz [Borsuk, Szmielew 1972]. W [Hilbert 1903] odcinek o końcach A, B to na mocy definicji „punkty leżące między" A oraz B. W [Borsuk, Szmielew 1972], gdzie stosowane są pojęcia teorii mnogości, odcinek o końcach A, B to „zbiór punktów leżących między" A oraz B. W wykładzie Borsuka i Szmielew porządek liniowy na prostej geometrycznej jest także definiowany za pomocą relacji „leżenia między"; zob. [Błaszczyk 2007], s. 77-100.

[5] Zob. [Cantor 1883], §10.

[6] Cantora definicje zbioru spójnego jest różna od obecnie przyjmowanej. Kazimierz Kuratowski w monografii *Topologie* rozpoczyna wykład o kontinuum od przypomnienia definicji Cantora, a w pierwszym twierdzeniu dowodzi, że w przestrzeni metrycznej, zwartej zbiór spójny w senie Cantora jest spójny w myśl współczesnej definicji; zob. [Kuratowski 1952], §42, s. 108. Cantora definicja zbioru doskonałego jest taka, jak w: [Kuratowski 1973], s. 138, przy czym Cantor rozważał albo przestrzenie metryczne, albo z topologią porządkową.

[7] [Cantor 1883], s. 190.

[8] [Cantor 1883], s. 191, podkreślenia – P.B.

„posługiwanie się *pojęciem czasu* lub *oglądem czasu* w dyskusji nad o wiele bardziej podstawowym i ogólniejszym pojęciem kontinuum nie jest właściwe”.[9]

Ostatecznie przyjmuje rozważać kontinuum „jako pojęcie logiczno-matematyczne”, „z odniesieniem do matematycznej teorii zbiorów”:

„Tak więc, nie pozostaje mi nic innego, jak próbować [określić] przy pomocy zdefiniowanych w §9 pojęć liczby rzeczywistej możliwie ogólne czysto arytmetyczne pojęcie kontinuum punktowego. Za podstawę posłuży mi przy tym, **jako iż nie może być inaczej**, n-wymiarowa właśnie *arytmetyczna* przestrzeń G_n”.[10]

W kolejnym akapicie Cantor wprowadza metrykę euklidesową, ϱ, i przyjmuje, że kontinuum będzie definiowane jako podzbiór przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^n, \varrho)$. Następnie przypomina definicję zbioru doskonałego i definiuje spójność:

„Nazywamy T *spójnym* zbiorem punktowym, gdy dla każdych dwóch jego punktów t oraz t' oraz danej wprzódy dowolnie małej liczby ε na wiele sposobów dana jest *skończona* liczba punktów $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ z T tak, że odległości $\overline{tt_1}$, $\overline{t_1t_2}$, $\overline{t_2t_3}$,..., $\overline{t_\nu t'}$ są wszystkie mniejsze od ε”.[11]

Po tych przygotowaniach Cantor podaje definicję kontinuum:

„Wszystkie znane nam **geometryczne kontinua punktowe** podpadają teraz również, jak łatwo widać, pod pojęcie *spójnego* zbioru punktowego; sądzę jednak teraz także, że rozpoznałem w tych *obu* predykatach „doskonały” oraz „spójny” konieczne oraz *wystarczające* cechy kontinuum, a zatem definiuję kontinuum punktowe wewnątrz G_n jako *spójny zbiór doskonały*”.[12]

Zwróćmy teraz uwagę na przykłady kontinuów. Pierwszy przykład to graf funkcji ciągłej. Powiązanie funkcji ciągłej z ruchem było dla Cantora oczywiste: w [Cantor 1882] przykład funkcji ciągłej, której graf jest zawarty w „nieciągłej przestrzeni” prowadził Cantora do rozważań na temat „ciągłego ruch w nieciągłej przestrzeni”.[13] W [Cantor 1883] nie pojawia się nawet sugestia, aby sprawdzić, czy faktycznie graf funkcji ciągłej jest „doskonało-spójny”, chociaż w istocie można to udowodnić.[14]

Kolejny przykład znajdujemy w komentarzu do zasady ciągłości Dedekinda, która to zasada charakteryzuje zbiory liniowo uporządkowane $(X, <)$:

„[...] w pracy Pana Dedekinda (*Ciągłość i liczby niewymierne*) jednostronnie podkreślona jest tylko jedna *inna* własność kontinuum, a mianowicie ta, którą ma ono wspólnie ze *wszystkimi* zbiorami *doskonałymi*”.[15]

---

[9] [Cantor 1883], s. 191, podkreślenia – P.B.

[10] [Cantor 1883], s. 192, podkreślenia – P.B. Symbol G_n oznacza przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

[11] [Cantor 1883], s. 194. Współczesny zapis tej definicji można znaleźć w: [Kuratowski 1952], s. 108, albo [Kuratowski 1973], s. 235.

[12] [Cantor 1883], s. 194, podkreślenia – P.B.

[13] Zob. [Cantor 1882], s. 121. Przykładem takiej „nieciągłej przestrzeni” jest $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{A}^n$, gdzie $\mathbb{A}$ to zbiór liczb algebraicznych.

[14] Zob. [Kuratowski 1973], s. 164, twierdzenie 2.

[15] [Cantor 1883], s. 194. Komentowana przez Cantora „własność kontinuum” w sformułowaniu Dedekinda brzmi następująco: „Jeśli wszystkie punkty linii prostej wpadają do dwóch klas tego rodzaju, że każdy punkt pierwszej klasy leży na lewo od każdego punktu klasy drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który dostarcza tego podziału wszystkich punktów na dwie klasy, tego rozcięcia linii prostej na dwa kawałki” [Dedekind 1872], §3, tł. J Pogonowski.

I najważniejszy przykład, przedział liczb rzeczywistych $[0, 1]$. Każde „kontinuum geometryczne" jest zbiorem „doskonało-spójnym", przedział $[0, 1]$ jest ponadto „kontinuum liczbowym" oraz „kontinuum liniowym", co jest związane z jego kolejnymi własności: mocą oraz typem porządkowym.

„Udowodniłem w *Crelles Journal* Bd. 84, S. 242, że wszystkie przestrzenie G_n, jakakolwiek byłaby tak zwana liczba wymiarów n, mają *równe* **moce** i, w konsekwencji, są *równie liczne* jak **kontinuum liczbowe**, a więc jak ogół wszystkich liczb rzeczywistych przedziału $(0 \dots 1)$".[16]

Przedział $[0, 1]$ nazywa Cantor „kontinuum liczbowym", w odróżnieniu od „kontinuów geometrycznych", które są podzbiorami przestrzeni $\mathbb{R}^n$, dla $n \geqslant 2$. Porównanie zbioru $[0, 1]$ z „przestrzeniami G_n" oparte jest na twierdzeniu udowodnionym w [Cantor 1878], które stanowi, że $c = c^n$, gdzie c oznacza moc zbioru $[0, 1]$, oraz na założeniu, że każde kontinuum jest zbiorem i można mu przypisać moc.

Z mocą „kontinuum liczbowego" wiąże się poszerzenie znaczenia pojęcia kontinuum. W [Cantor 1895] wprowadzona jest operacja potęgowania liczb kardynalnych i Cantor pokazuje, że moc „kontinuum liczbowego" wyraża się liczbą $2^{\aleph_0}$. Następnie, korzystając z praw arytmetyki liczb kardynalnych dowodzi, że $c = c^n = c^{\aleph_0}$. Wynik ten tak komentuje: „n-wymiarowe oraz $\aleph_0$-wymiarowe kontinua mają taką samą moc, jak jedno-wymiarowe kontinuum". O ile jednak liczbę c^n Cantor interpretuje jako podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$, jako moc zbioru $[0, 1]^n$, to postępując analogicznie, liczbie $c^{\aleph_0}$ nie odpowiada żadne „geometryczne kontinuum".

W [Cantor 1895] „wszystkie liczby rzeczywiste x, które są $\geqslant 0$ oraz $\leqslant 1$, w ich **naturalnym** uporządkowaniu"[17] nazywa Cantor „kontinuum liniowym" i wskazuje własność, która wyróżnia wśród zbiorów uporządkowanych liniowo te *podobne* do „kontinuum liniowego" $([0, 1], <)$. Cantor udowodnił mianowicie twierdzenie, które w przełożeniu na współczesną terminologię głosi, że każdy zbiór liniowo uporządkowany $(M, <)$, taki że $(M, <)$ jest przestrzenią ośrodkową, porządek $<$ jest ciągły w sensie Dedekinda, posiada element największy i najmniejszy jest izomorficzny z $([0, 1], <)$:

„Jeśli zbiór uporządkowany M znamionuje się tym, że 1) jest „doskonały", 2) jest w nim zawarty zbiór S o liczbie kardynalnej $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$, który pozostaje w takim związku z M, że między każdymi dwoma dowolnymi elementami m_0 oraz m_1 z M leżą elementy S, wedle [rozważanego] porządku, to $\overline{M} = \theta$".[18]

Dowodząc tego twierdzenia Cantor przyjmuje – w artykule nie ma odpowiedniego dowodu – że przedział $[0, 1]$ z „naturalnym" porządkiem spełnia warunki definicji typu porządkowego θ, tj. że $[0, 1]$ jest zbiorem doskonałym i zawiera zbiór przeliczalny, gęsty w $([0, 1], <)$. Podobnie Cantor nie podaje dowodu, że przedział $[0, 1]$ jest zbiorem „doskonałym i spójnym". Pisze co prawda, że

[16] [Cantor 1883], s. 194, podkreślenia – P.B. Symbol $(0 \dots 1)$ oznacza przedział $[0, 1]$. Wskazany przez Cantora artykuł *Crelles Journal* Bd. 84 to [Cantor 1878].

[17] [Cantor 1895], s. 510, podkreślenie – P.B.

[18] Zob. [Cantor 1895], s. 511, θ oznacza typ porządkowy pary $([0, 1], <)$. Zob. także [Kuratowski, Mostowski 1978], s. 218, [Błaszczyk 2007], s. 18-19.

„Z elementów teorii liczb wymiernych oraz niewymiernych wiadomo, że każdy ciąg podstawowy $\{x_\nu\}$ w X ma element graniczny x_0 w X oraz że także na odwrót, każdy element x z X jest elementem granicznym stowarzyszonego ciągu podstawowego w X",[19]

jednak w pracy [Cantor 1872], w której zdefiniował liczby rzeczywiste, nie ma odpowiedniego twierdzenia. Przy własności gęstość $\mathbb{Q}$ w $(\mathbb{R}, <)$ Cantor nawet nie wspomina, że wynika ona z „teorii liczb wymiernych i niewymiernych".[20]

Zatem, u Cantora przedział $[0, 1]$ jest wzorcem kontinuum: (1) „doskonałość i spójność" to oczywiste własności zbioru $[0, 1]$, tj. takie, których Cantor nie dowodzi, (2) własności podane w twierdzeniu o typie porządkowym θ, to oczywiste własności zbioru uporządkowanego $([0, 1], <)$. Wszystkie inne podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są „kontinuum geometrycznym", jeżeli spełniają warunki zbioru „doskonało-spójnego", wszystkie inne zbiory liniowo uporządkowane $(M, <)$ są „kontinuum liniowym", jeżeli spełniają warunki twierdzenia o typie θ.

Własności kontinuum, o których pisze Cantor w sposób istotny są związane z porządkiem liczb rzeczywistych. Poczynając od tego, że istnienie pierwiastka, który występuje w definicji metryki euklidesowej, $\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, w arytmetyce liczb rzeczywistych jest wyprowadzane z ciągłości porządku. Dalej, w związku z mocą „kontinuum liczbowego", dowodząc zależności $\aleph_0 < c = c^n = 2^{\aleph_0}$, Cantor korzysta kolejno: z przedstawienia dziesiętnego liczby rzeczywistej, przedstawienia w postaci ułamka łańcuchowego liczby niewymiernej, z przedstawienia dwójkowego liczby rzeczywistej; pośrednio korzysta więc z własności porządku liczb rzeczywistych, jaką jest aksjomat Archimedesa.[21] Wreszcie charakterystyka „kontinuum liniowego" jest wprost związana z „naturalnym" – jak pisze Cantor – porządkiem liczb rzeczywistych.

Czego jeszcze Cantor nie wiedział o porządku liczb rzeczywistych? Cantor przywołując liczby rzeczywiste miał na uwadze swoją konstrukcję, w której zbiór, działania oraz porządek liczb rzeczywistych są definiowane.[22] W ujęciu aksjomatycznym liczby rzeczywiste są ciałem uporządkowanym $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$, ich „naturalny" porządek, to porządek liniowy $<$ zgodny z dodawaniem i mnożeniem w ciele $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$. Takie rozumienie liczb rzeczywistych zostało wprowadzone do matematyki w [Hilbert 1900], a w pracach Cantora zgodność porządku z działaniami nie została wyeksplikowana. Wiadomo, że w ciele uporządkowanym może być wiele porządków zgodnych z działaniami. W [Artin, Schreier 1926] udowodniono, że istnieje dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami w ciele liczb rzeczywistych i taki jest matematyczny sens określenia „naturalny porządek liczb rzeczywistych", Cantor posługuje się określeniem „naturalny

[19] Zob. [Cantor 1895], s. 510; w cytowanym fragmencie X oznacza przedział $[0, 1]$.

[20] Warto dodać, że w [Dedekind 1872] zarówno ciągłość zbioru $(\mathbb{R}, <)$, jak i gęstość $\mathbb{Q}$ w $(\mathbb{R}, <)$ są dowodzone.

[21] Osobną kwestią jest, że Cantor przypisywał liczbom rzeczywistym tylko własność, którą nazywamy zupełnością w sensie Cauchy'ego, a z tej własności nie wynika aksjomat Archimedesa. Hölder pokazał, że z aksjomatu ciągłości w wersji podanej przez Dedekinda w [Dedekind 1872], wynika aksjomat Archimedesa; zob. w [Hölder 1901]. Aksjomat Archimedes wprowadził do matematyki współczesnej Otto Stolz w [Stolz 1885] i w kilku wcześniejszych artykułach.

[22] Zob. [Cantor 1872], §1.

porządek", ale nie wiąże tego z żadnym faktem matematycznym.[23] A wreszcie, w [Hilbert 1900] oraz [Artin, Schreier 1926] porządek liniowy w ciele jest pojęciem pierwotnym, u Cantora jest to obiekt definiowany.

Podsumowując, odcinek jest dla Cantora oczywistym przykładem kontinuum. Odcinek jest też oczywistym przykładem „wielkości ciągłej". Ale w filozofii greckiej, w szczególności w pismach Arystotelesa charakterystyka odcinka nie jest związana z porządkiem liniowym. Cantor nie zdając sobie sprawy z tego, jak bardzo jego koncepcja jest zależna od pojęcia porządku, lokował swój opis kontinuum w długiej tradycji sięgającej Arystotelesa. Biorąc pod uwagę podwójną charakterystykę odcinka, jaką znajdujemy w *Elementach* Euklidesa – odcinek jako obiekt geometryczny, odcinek jako element struktury $(M, +, <)$ – i wybierając to drugie ujęcie, można wskazać łączność między koncepcją Cantora a matematyką grecką. Nie jest to jednak związek, z którego Cantor zdawał sobie sprawę. Podwójna charakterystyka odcinka, jaką znajdujemy u Euklidesa nie została jeszcze – o ile nam wiadomo – przez nikogo opisana, nic więc dziwnego, że i Cantor jej nie znał.

Teza o dwóch sposobach opisu odcinka jest nowa, wymaga zatem szczegółowego przedstawienia z bezpośrednim odniesieniem do źródeł. W niniejszym artykule zajmujemy się tylko matematyką grecką i przedstawiamy charakterystykę odcinka, jaką znajdujemy w *Elementach* Euklidesa i *Fizyce* Arystotelesa. W obydwu przypadkach chodzi nam o opis matematyczny, a nie zestaw komentarzy i cytatów. *Elementy* nie zawierają żadnych komentarzy w ogóle (z jednym bodaj wyjątkiem), a to, co najważniejsze dla omawianego zagadnienia nie jest wyrażone wprost. U Arystotelesa mamy przerost komentarzy nad treścią matematyczną, ale z drugiej strony, wiedza o odcinku jest zawarta w pojęciach. W artykule zinterpretujemy więc Euklidesa i objaśnimy Arystotelesa. W postępowaniu naszym przyjmujemy specyficzną metodę, otóż *Elementy* opisujemy środkami współczesnej matematyki, natomiast tezy Arystotelesa interpretujemy z punktu widzenia *Elementów*, w szczególności z analizy *Elementów* otrzymujemy matematyczny sens pojęć „wielkość", „miara", „podział", „część", „granica" i tak zinterpretowane pojęcia przykładamy do tekstu Arystotelesa.

Generalny zarys pracy jest następujący. Księga V *Elementów* zawiera teorię proporcji „wielkości". Jest ona stosowana w Księdze VI do odcinków, trójkątów, prostokątów, kwadratów, wielokątów (wypukłych), łuków i kątów. Dlatego w pracy przez „wielkość" rozumiemy te przedmioty. Porównując Euklidesa z Arystotelesem skupimy się na charakterystyce odcinka. Z geometrii Euklidesa wyprowadzamy opis pojedynczego odcinka, z Księgi V – opis struktury odcinków; upraszczając, wstępnie możemy powiedzieć, że odcinki tworzą półgrupę archimedesową. U Arystotelesa znajdujemy tylko opis pojedynczego odcinka. Opis ten zgadza się z tym, co znajdujemy w geometrii Euklidesa oraz ze słynną definicją „wszystko ciągłe (πᾶν συνεχές) jest podzielne na te, które są podzielne na zawsze podzielne".[24]

[23] W istocie E. Artin i O. Schreier udowodnili więcej, a mianowicie, że w ciałach rzeczywiście domkniętych istnieje dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami; zob. [Błaszczyk 2012], [Błaszczyk 2007], s. 264-268.

[24] [Arystoteles 231a 15-16], w artykule cytujemy nasz przekład *Fizyki* 231a - 233b.

W pierwszej części artykułu przedstawimy to dwojakie, wyżej wskazanie podejście do odcinka, jakie znajdujemy w *Elementach.*

§1. EUKLIDES O WIELKOŚCIACH GEOMETRYCZNYCH

W tym paragrafie zrekonstruujemy Euklidesa pojęcie „wielkości". Podstawę analiz stanowi Księga V *Elementów.* Jest to niezwykle precyzyjny tekst, poczynając od oznaczeń literowych, przez pojęcia, które w większości mają techniczny charakter, po warstwę dedukcyjną. Objaśniając Księgę V, do tekstu dodajemy oznaczenia wielkości pisane dużymi literami i czcionką pochyłą, i zapisujemy to w nawiasach kwadratowych. Gdy przedstawiamy interpretację, wtedy wielkości oznaczamy małymi literami. Praktyczne konsekwencje tej konwencji są takie, że gdy Euklides pisze, iż wielkości AG, E są równe, to w objaśnieniu napiszemy $AG = E$, w interpretacji wprowadzimy jeden znak, np: „Skoro, z jednej strony, AG [a] jest równa E [a] ...".

1. Pojęcia Wspólne. Księga V stanowi zamkniętą całość dedukcyjną. Jedyne nawiązania do wcześniejszych partii *Elementów* dotyczą aksjomatów równości, zamieszczonych w grupie *Pojęcia Wspólne.* Oto one:[25]

(KE1) Równe tej samej są sobie równe.

(KE2) I gdy równe są dodane do równych, to całości są równe.

(KE3) I gdy równe są odjęte od równych, to pozostałości są równe.

(KE4) I nakładające się są sobie równe.

(KE5) I całość jest większa od części (μέρους).[26]

Trzy pierwsze aksjomaty powszechnie są interpretowane formułami:

(KE1) $A = C,\ B = C\ \rightarrow A = B,$

(KE2) $A = B,\ C = D\ \rightarrow A + C = B + D,$

(KE3) $A + C = B + C \rightarrow A = B,$

czwarty orzeka, iż figury przystające są równe, piąty interpretujemy formułą

(KE5) $A + B > A.$

Pojęcia Wspólne są wspólne obiektom geometrycznym opisywanym w Księgach I–IV oraz liczbom, o których traktują Księgi VII–IX. W Księdze V obok wielkości znajdujemy jeszcze wielokrotności, stosunki i proporcje; aksjomaty równości nie odnoszą się do nich.

2. Definicje. Księgę V otwiera grupa osiemnastu definicji. Omówimy siedem pierwszych.

[25] W artykule cytujemy nasz przekład Księgi V; zob. [Błaszczyk, Mrówka 2012b]. Tłumaczenia wszystkich innych fragmentów *Elementów* są również naszego autorstwa. Podstawę przekładu stanowi [Heiberg 1883-1885].

[26] W oryginale słowo „część"występuje w liczbie pojedynczej. W języku polskim dopełniacz liczby pojedynczej jest akurat taki sam jak dopełniacz liczby mnogiej.

Df. V.1 „Wielkość [A] jest częścią wielkości [B], mniejsza większej [$A < B$], gdy mierzy większą". Fakt, że A mierzy B wyrażamy formułą

$$(\exists n)[nA = B], \quad \text{gdzie} \;\; nA =_{df} \underbrace{A + \cdots + A}_{n-razy}.$$

Df. V.2 „I większa [B] jest wielokrotnością mniejszej [A], gdy jest mierzona przez mniejszą".

W proponowanym opisie jedna i ta sama formuła, $nA = B$, odpowiada wyrażeniom: (1) A „jest częścią"B, (2) A „mierzy"B, (3) B „jest wielokrotnością"A, (4) B „jest mierzona"przez A.

Df. V.3 „Stosunek jest pewną relacją w odniesieniu do miary dwóch wielkości tego samego rodzaju".

Wielkości to obiekty geometryczne. Dzielą się one na rodzaje: odcinki tworzą jeden rodzaj, trójkąty – drugi, itd. Wielkości tego samego rodzaju można dodawać oraz porównywać z uwagi na relację „większy–mniejszy". W ten sposób otrzymujemy strukturę odcinków $\mathfrak{M}_o$, trójkątów $\mathfrak{M}_t$, itd. Fakt, iż wielkości A, B są tego samego rodzaju oddajemy formułą

$$A, B \in \mathfrak{M}, \quad \text{gdzie} \;\; \mathfrak{M} = (M, +, <).$$

Df. V.4 „Mówi się o wielkościach [A, B], że jedna jest w stosunku do drugiej, gdy zwielokrotnione [nA], jedna może przekroczyć drugą [$nA > B$]".

$$(\forall A, B)(\exists n)[nA > B].$$

Df. V.5 „Mówi się, że w tym samym stosunku są wielkości pierwsza [A] do drugiej [B] i trzecia [C] do czwartej [D], gdy te same wielokrotności pierwszej [nA] i trzeciej [nC] jednocześnie przekraczają, są jednocześnie równe lub jednocześnie mniejsze od tych samych wielokrotności drugiej [mB] i czwartej [mD], wziętych w odpowiedniej kolejności, zgodnie z dowolnym mnożeniem".

$$A : B :: C : D \leftrightarrow_{df} (\forall m, n)[(nA >_1 mB \rightarrow nC >_2 mD),$$
$$(nA = mB \rightarrow nC = mD), \, (nA <_1 mB \rightarrow nC <_2 mD)],$$

gdzie $A, B \in \mathfrak{M}_1 = (M_1, +, <_1), \quad C, D \in \mathfrak{M}_2 = (M_2, +, <_2)$.

W czasach nowożytnych stosunek wielkości A, B zapisywany jest jako $A : B$, zaś proporcja jako $A : B :: C : D$.[27] W artykule przyjmujemy te oznaczenia.

Dla frazy „jednocześnie przekraczają, są jednocześnie równe lub jednocześnie mniejsze" użyjemy skrótu

$$nA \gtreqless mB \rightarrow nC \gtreqless mD.$$

Wielokrotność wielkości A zapisujemy jako nA, odpowiednio, te same wielokrotności A, E oznaczymy jako nA, nE. Mając na uwadze proporcję $A : B :: E : F$,

[27]Zob. [Cajori 2007], s. 190.

gdzie „drugą i czwartą" są wielkości B, F, ich wielokrotności oznaczymy jako mB, mF, a zastosowanie definicji V.5 przedstawimy formułą

$$nA \gtreqqless mB \to nE \gtreqqless mF \xrightarrow[df5]{} A : B :: E : F.$$

W tekście *Elementów*, w miejsce nA wystąpi kolejna litera, powiedzmy G, w miejsce nE – litera K, dalej, w miejsce mB – wystąpi L, w miejsce mF– litera N. Tym sposobem otrzymujemy fragment dowodu twierdzenia V.11, w którym stosowana jest definicja V.5:

„gdy G przekracza L, wtedy także K przekracza N, i gdy równa, to równa, i gdy mniejsza, to mniejsza. Ale z jednej strony, G, K są tymi samymi wielokrotnościami A, E, z drugiej zaś, L, N innymi, dowolnymi, tymi samymi wielokrotnościami B, F. Zatem, jak A jest do B, tak E do F", czyli

$$G \gtreqqless L \to K \gtreqqless N \xrightarrow[df5]{} A : B :: E : F.$$

Do tradycji XX-wiecznych tłumaczeń *Elementów* należy wskazywanie definicji i twierdzeń, na jakie powołuje się Euklides. W *Elementach* definicje i twierdzenia są przywoływane przez cytowanie fraz lub całych zdań. Analiza tekstu potwierdza tezę, że w Księdze V stosowane są wyłącznie te definicje, które zostały wprost zapisane. Podobnie z analizy tekstu wnosimy, że w Księdze VI stosowana jest wyłącznie teoria (to jest definicje i twierdzenia) z Księgi V.[28]

Df. V.6 „I niech wielkości, które są w tym samym stosunku nazwane będą proporcjonalnymi."

Definicja ta ustala terminologię. Dodajmy zatem, że stosunek to po grecku λόγος, proporcja to ἀναλογία. Greckie słowo ἄλόγος, zaprzeczenie λόγος, w odniesieniu do dwóch odcinków znaczy niewspółmierne, nieposiadające „wspólnej miary". Tak więc, odcinki A, B są współmierne, gdy istnieje taki odcinek C – owa „wspólna miara" $-$ że A jest wielokrotnością C oraz B jest wielokrotnością C, tj. $A = nC$, $B = mC$, dla pewnych n, m. Odpowiednio, odcinki A, B są niewspółmierne, jeśli nie są współmierne.

Df. V.7 „Przy tych samych zaś wielokrotnościach, gdy wielokrotność pierwszej [nA] przekracza wielokrotność drugiej [mB], a wielokrotność trzeciej [nC] nie przekracza wielokrotności czwartej [mD], wtedy mówi się, że pierwsza jest w większym stosunku do drugiej niż trzecia do czwartej".

$$A : B \succ C : D \leftrightarrow_{df} (\exists m, n)[nA >_1 mB,\, nC \leqslant_2 mD],$$
$$A, B \in \mathfrak{M}_1 = (M_1, +, <_1), \quad C, D \in \mathfrak{M}_2 = (M_2, +, <_2).$$

3. Dodawanie Wielkości. Niech M jest zbiorem wielkości tego samego rodzaju. Gdy $A, B \in M$, to $A+B \in M$. W Księdze V zależność ta występuje jako oczywista. W szczególności, gdy $A \in M$, to wielokrotność nA należy do M.

[28]W literaturze przedmiotu można spotkać spekulacje, że w Księdze V i VI są stosowane jakieś inne teorie proporcji. Opierają się one nie na analizie tekstu, ale na tym, że niektóre twierdzenia Euklidesa mogłyby być udowodnione inaczej niż to faktycznie jest w *Elementach*.

Dodawanie jest przemienne i łączne. Znajdujemy to np. w dowodzie twierdzenia V.25:

„Skoro, z jednej strony, AG $[a]$ jest równa E $[a]$, z drugiej zaś, CH $[c]$ (jest równa) F $[c]$, zatem AG, F $[a+c]$ są równe CH, E $[c+a]$", czyli

$$a + c = c + a.$$

Zauważmy, bo jest to typowy zabieg Euklidesa, że dodawanie wielkości jest zaznaczone w tekście przez postawienie obok siebie symboli tych wielkości: AG, F. Dalej w dowodzie twierdzenia V.25:

„GB, HD $[b,\ d]$ będąc nierówne i GB większą $[b > d]$, z jednej strony, są dodane AG, F $[a+c]$ do GB $[b+(a+c)]$, z drugiej zaś, są dodane CH, E $[c+a]$ do HD $[d+(c+a)]$, stąd wynika, że AB, F $[(a+b)+c]$ są większe niż CD, E $[(c+d)+a]$", czyli

$$b + (a + c) = (a + b) + c, \quad d + (c + a) = (c + d) + a.$$

Dla $A, B, C \in M$ mamy zatem: (1) $A, B \in M \to A + B \in M$, (2) $A, B \in M \to A + B \in M$, (3) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

4. Równość i Porządek. (KE1)-(KE5) to aksjomaty równości. Nie jest natomiast wprost powiedziane, że wielkość A jest równa sobie. Zwrotność równości należy zatem do naszego opisu *Elementów*.

Wielkości są porównywane z uwagi na relację mniejsza-większa. Relacja mniejszości, $A < B$, nie jest definiowana. Euklides odróżniania relacje $A < B$ oraz $B > A$. W dowodzie twierdzenia V.14 czytamy:

„[...] D jest mniejsza od B $[D < B]$. Stąd, B jest większa od D $[B > D]$".

Do definicji Księgi V można zatem dopisać jeszcze i tę: $B > A \leftrightarrow_{df} A < B$.

Równość i porządek powiązane są prawem trychotomii: Dla dowolnych $A, B \in M$ zachodzi dokładnie jeden ze składników alternatywy

$$A < B \vee A = B \vee A > B.$$

Prawo trychotomii jest w *Elementach* niemal wprost sformułowane. W dowodzie twierdzenia V.10 czytamy:
„A jest większa od B. W przeciwnym razie, A jest albo równa, albo mniejsza od B",

$$A \not> B \to A = B \vee A < B.$$

Implikacja ta jest oczywiście równoważna alternatywie

$$A > B \vee A = B \vee A < B.$$

Dalej, w dowodzie twierdzenia V.18 jest wyraźnie powiedziane, że warunki $A < B$ oraz $A > B$ wykluczają się. To, że warunki $A = B$ oraz $A > B$ wykluczają się nie jest w Księdze V zapisane. W Księdze I natomiast, w dowodzie twierdzenia I.7 i w odniesieniu do kątów jest to powiedziane wprost, dlatego przyjmujemy, że dla Euklidesa koniunkcja $A = B, A > B$ jest sprzecznością; podobnie w przypadku $A = B$, $A < B$.

Porządek wielkości jest przechodni: $B > A$, $C > B \to C > A$. W dowodzie twierdzenia V.8 czytamy:

„Zaś K [mc] nie przekracza N [nd], gdyż także FG [me] będąc większe od GH [mc], to jest K [mc], nie przekracza N”, co znaczy

$$me > mc,\, nd > me \to nd > mc.$$

Prawo trychotomii oraz przechodniość oznaczają, że porządek wielkości jest liniowy.

Na podstawie powyższych ustaleń przyjmujemy, że wielkości tego samego rodzaju tworzą strukturę algebraiczno-porządkową $\mathfrak{M} = (M, +, <)$, gdzie porządek $<$ jest liniowy, a dodawanie jest działaniem łącznym i przemiennym.

Dodawanie i porządek wielkości powiązane są aksjomatami.

5. Aksjomaty. Oto aksjomaty charakteryzujące strukturę $\mathfrak{M} = (M, +, <)$:

(E1) $(\forall A, B \in M)(\exists n)[nA > B]$,

(E2) $(\forall A, B \in M)(\exists E \in M)[A > B \to A = B + E]$,

(E3) $(\forall A, B, C \in M)[A > B \to A + C > B + C]$,

(E4) $(\forall A \in M)(\forall n)(\exists B \in M)[nB = A]$,

(E5) $(\forall A, B, C \in M)(\exists E \in M)[A : B :: C : E]$.

(E1) to definicja V.4. Jest to jedyne założenie o strukturze $\mathfrak{M}$ wprost zapisane w Księdze V.

(E2) odnajdujemy w dowodzie twierdzenia V.8, mianowicie:

„Skoro bowiem AB [a] jest większa od C [c], niech będzie założone, że EB (jest) równa C. Wówczas mniejsza z AE [e], EB [c] ...”.

Z przebiegu dowodu wiadomo, że $AB = AE + EB$, tj. $a = e + c$ zatem

$$a > c \to a = e + c, \quad \text{dla pewnego } e.$$

(E3) to zgodność porządku z dodawaniem. Warunek ten jest jasno sformułowany w dowodzie twierdzenia V.25:

„Skoro, z jednej strony, AG [a] jest równa E [a], z drugiej zaś, CH [c] (jest równa) F [c], zatem AG, F [a+c] są równe CH, E [c+a]. I [skoro] gdy [nierówne są dodane do równych, to całości są nierówne, zatem gdy] GB, HD [b, d] będąc nierówne i GB większą [$b > d$], z jednej strony, są dodane AG, F do GB [$b + (a + c)$], z drugiej zaś, są dodane CH, E do HD [$d + (c + a)$], stąd wynika, że AB, F [$(a + b) + c$] są większe niż CD, E [$(c + d) + a$]”, czyli

$$b > d \to b + (a + c) > d + (c + a).$$

Z przebiegu dowodu wiadomo, że $a + c = c + a$, zatem

$$b > d \to b + (a + c) > d + (a + c).$$

W innych miejscach aksjomat ten znajdujemy w postaci równoważnej, mianowicie w twierdzeniu V.8 jako

(E3′) $a > b,\ c > d \to a + c > b + d$,

w twierdzeniu V.17 jako

(E3″) $a + c > b + c \to a > b$.

(E4) znajdujemy w dowodzie twierdzenia V.5. Czytamy:

„Niech bowiem wielkość AB [a] będzie tą samą wielokrotnością wielkości CD [c], co odjęta AE [a_1] odjętej CF [c_1]. Twierdzę, że pozostałość EB [a_2] także będzie tą samą wielokrotnością pozostałości FD [c_2], co całość AB [$a = c_1 + c_2$] całości CD [$c = c_1 + c_2$]. Tyle razy bowiem, ile AE jest przez CF [$a_1 = nc_1$], tyle też niech EB będzie przez GC [$a_2 = nc_0$]".

W dowodzie tym przyjmuje się, że dane są wielkości: a_1, a_2, c_1, c_2. Dalej, że $a = a_1+a_2$, $c = c_1+c_2$, $a = nc$, $a_1 = nc_1$. Teza twierdzenia brzmi: $a_2 = nc_2$. Euklides milcząco przyjmuje istnienie takiego c_0, które spełnia warunek $a_2 = nc_0$. Kryje się to pod oznaczaniem G, czy też GC, które odpowiada nowowprowadzonej wielkości, o której jest przyjęte, że spełnia warunek $EB = nGC$. Dowód polega na pokazaniu, że GC=FD, tj. $c_0 = c_2$.

(E5) znajdujemy w dowodzie twierdzenia V.18. Czytamy:

„Niech AE, EB, CF, FD [a, b, c, d] będą rozdzielonymi wielkościami proporcjonalnymi, i jak AE do EB, tak CF do FD [$a : b :: c : d$]. Twierdzę, że także złożone będą one proporcjonalne, jak AB do BE, tak CD do FD [$(a+b) : b :: (c+d) : d$]. W przeciwnym razie, gdy AB nie jest do BE, jak CD do FD, to jak AB będzie do BE, tak CD (będzie) do pewnej [$(a + b) : b :: (c + d) : f$], albo mniejszej od FD [$f < d$], albo większej [$f > d$]. Najpierw, niech DG [f] będzie mniejszą. I skoro jak AB (jest) do BE, tak CD do DG [$(a + b) : b :: (c + d) : f$]".

W dowodzie przyjmuje się, że dane są wielkości a, b, c, d spełniające warunek $a : b :: c : d$. Teza brzmi: $(a + b) : b :: (c + d) : d$. Dowód jest nie wprost. Niech nie zachodzi $(a + b) : b :: (c + d) : d$. Wówczas dla pewnej wielkości f jest $(a + b) : b :: (e + f) : f$, gdzie $e + f :: c + d$. Wielkość f może być albo mniejsza, albo większa od d. Każdy z tych przypadków prowadzi do sprzeczności.

Podobnie, jak poprzednio, nowa wielkość (w literaturze jest ona nazywana czwartą proporcjonalną), związana jest z kolejną literą alfabetu wprowadzoną do oznaczeń. I tym razem jest to także litera G, która po raz pierwszy występuje w zdaniu: „Najpierw, niech DG będzie mniejszą".

6. Konsekwencje aksjomatów. Z aksjomatów (E1)–(E5) można wyprowadzić wszystkie twierdzenia Księgi V, co oznacza, że gdy do dowodów Euklidesa wprowadzimy jako jawne założenia aksjomaty (E1)–(E5) oraz przedstawione wyżej założenia o strukturze wielkości $(M, +, <)$, to otrzymamy dowody spełniające współczesne kryteria poprawności. W istocie pokazaliśmy to w przypadku wszystkich 25. twierdzeń.[29]

Przedstawimy jeszcze kilka matematycznych własności struktury wielkości, które wiążą ją z liczbami rzeczywistymi. Otóż z aksjomatów (E1)-(E4) wynika, iż w zbiorze $(M, <)$ nie istnieje element najmniejszy, co z kolei jest równoważne gęstości porządku $<$.[30] Dalej, pokazuje się, że strukturę $(M, +, <)$ spełniającą aksjomaty (E1)-(E4) można zanurzyć w grupie archimedesowej,[31] a z drugiej strony wiadomo, że każda grupa archimedesowa jest izomorficzna z pewną podgrupą uporządkowanej grupy addytywnej liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, 0, <)$.[32] Mając na uwadze te fakty przyjmujemy, że strukturę $(M, +, <)$ spełniającą aksjomaty (E1)-(E4) można zanurzyć w pewnym ciele archimedesowym. Przypomnijmy zarazem, że każde ciało archimedesowe jest izomorficzne z pewnym podciałem ciała liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$.[33]

Fakty te prowadzą do tego, co można nazwać standardową interpretacją teorii proporcji z Księgi V, a co zamyka się w twierdzeniu:

Niech $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem archimedesowym. Przyjmijmy, że strukturę wielkości stanowi układ $(\mathbb{F}_+, +, <)$, gdzie $\mathbb{F}_+ = \{a \in \mathbb{F} : \ x > 0\}$. Dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{F}_+$ zachodzą wówczas równoważności:[34]

$$a : b :: c : d \leftrightarrow a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1}, \quad a : b \succ c : d \leftrightarrow a \cdot b^{-1} > c \cdot d^{-1}.$$

Krótko mówiąc, zanurzając strukturę wielkości w ciele archimedesowym, proporcję można interpretować jako równość odpowiednich ilorazów.[35]

I jeszcze słowo o historii struktury wielkości.[36] Strukturę $(M, +, <)$ scharakteryzowaną aksjomatami (E1)-(E4) wprowadził do matematyki współczesnej Otto Stolz. W książce [Stolz 1885], w rozdziale *Euklidesa teoria stosunków* wyłożył on teorię stosunków opartą na aksjomatycznej teorii wielkości oraz udowodnił wiele twierdzeń z Księgi V. Od Stolza pochodzi pierwszy symboliczny zapis definicji V.4, V.5 oraz V.7; od Stolza datuje się także zainteresowanie współczesnych matematyków aksjomatem Archimedesa. Wykład Stolza nie jest rekonstrukcją *Elementów*, ale przedstawia teorię proporcji jako jedną z wielu teorii arytmetycznych, obok teorii liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych oraz „wielkości nieskończenie małych”.[37]

Następnie Heinirch Weber oraz Otto Hölder badali strukturę $(M, +, <)$ spełniająca aksjomaty (E1)-(E3) oraz aksjomat ciągłości w wersji pochodzącej od

---

[29] Zob. [Błaszczyk, Mrówka 2013b].

[30] Dowód tej równoważności można znaleźć w [Weber 1898]. Zob. także [Błaszczyk 2013a].

[31] Zob. [Błaszczyk, Mrówka 2013b].

[32] Zob. [Hartshorne 2000], s. 135.

[33] Zob. [Błaszczyk 2012a].

[34] Dowód podajemy w [Błaszczyk, Mrówka 2013b].

[35] Idea ta pochodzi od Hermanna Grassmanna, chociaż nie znał on jeszcze pojęcia ciała uporządkowanego; zob. [Grassmann 1861], s. 56; zob. także [Euler 1807], s. 240.

[36] Zob. także [Błaszczyk 2013a] oraz [Bair et al. 2013].

[37] Zob. [Stolz 1885], s. 85-95.

Dedekinda: porządek $<$ jest gęsty oraz żaden przekrój zbioru $(M, <)$ nie wyznacza luki.[38] Pokazuje się, że struktura $(M, +, <)$ spełniająca te aksjomaty jest izomorficzna z półgrupą addytywna liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, <)$.[39] Zwieńczeniem tej historii jest praca, w której Bourbaki buduje arytmetykę liczb rzeczywistych na bazie aksjomatów (E1)-(E4) wraz z aksjomatem ciągłości (acz w innej wersji niż ta przytoczona wyżej).[40]

Na zakończenie tej części zauważmy, że w teorii Euklidesa nie występuje porównanie stosunków wielkości $A : B$ ze stosunkami liczb $m : n$ i relacja $nA > mB$ nie sprowadza się do relacji między stosunkami $A : B > m : n$.[41] Takie rozwiązanie i odpowiednia teoria proporcji, różna od tej z Księgi V, pojawiły się w matematyce dopiero w [Stolz 1885] oraz [Weber 1895].[42]

§2. EUKLIDES O LICZBACH

1.Księgi VII-IX zawierają wykład arytmetyki. Liczba (ἀριθμός) to liczba naturalna większa od jeden. Zero w ogóle nie występuje w *Elementach*, zaś jeden to monada (μονάς), która nie jest liczbą. Aby ukazać odmienność liczb i wielkości, wystarczy, że prześledzimy kilka definicji i jedno twierdzenie.

Df. VII.1 „Monadą (μονάς) jest to, dzięki czemu każda z będących jest nazwana jedną".

Df. VII.2 „Liczba to wielość (πλῆθος) monad".

Df. VII.3 „Liczba jest częścią liczby, mniejsza $[M]$ większej $[N]$, gdy mierzy większą".

„Mierzy" oznacza tu, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $N = kM$.

Df. VII.11 „Liczba pierwsza (πρῶτος ἀριθμός) jest tym, co jest mierzone jedynie przez monadę".

Liczba nie „mierzy" więc samej siebie.

Df. VII.13 „Liczba złożona (σύνθετος ἀριθμός) jest tym, co jest mierzone przez pewną liczbę".

Euklides definiuje mnożenie liczb, podczas gdy, przypomnijmy, nie ma definicji mnożenia „wielkości".

Df. VII.15 „Mówi się o liczbie $[M]$, że mnoży liczbę $[N]$, gdy mnożona jest dodawana tyle razy, ile jest monad w pierwszej, i powstaje pewna $[M \cdot N]$".

$$M \cdot N = \underbrace{N + ... + N}_{m-razy}, \qquad \text{gdzie} \quad M = \underbrace{1 + ... + 1}_{m-razy} \ .$$

[38] Zob. [Weber 1898], [Hölder 1901].

[39] Hölder i Weber zauważają, że takie twierdzenie można udowodnić, podobnie jest w [Bourbaki 1947], s. 9, dowód zaś można znaleźć w [Whitney 1968], s. 129.

[40] Zob. [Bourbaki 1947]. Warto odnotować ciekawostkę, że jeszcze w tej pracy liczby rzeczywiste są wiązane z pojęciem „wielkości", *grandeur*.

[41] Zob. [Błaszczyk 2007], s. 222-235.

[42] Zob. [Błaszczyk 2007], s. 208-219.

Euklides podaje też odrębną definicję proporcji liczb, przy czym w arytmetyce nie ma odpowiednika definicji V.7. („porządku stosunków"):

Df. VII.20. „Liczby są proporcjonalne, gdy pierwsza jest drugiej, co i trzecia czwartej, tą samą wielokrotnością, lub tą samą częścią, lub tymi samymi częściami".[43]

Liczby Euklidesa możemy opisać jako układ z dwoma działania i porządkiem $(\mathbb{A}, +, \cdot, <)$, przy czym wiadomo, że dodawanie i porządek są powiązane aksjomatami (E2), (E3).[44] Istotne jest, że porządek $<$ charakteryzuje zasada minimum: każdy niepusty podzbiór posiada element najmniejszy. Założenie to jest stosowane w twierdzeniu VII.1, które, w przełożeniu na współczesną terminologię mówi, że gdy największy wspólny dzielnik dwóch liczb wynosi jeden, to są one względnie pierwsze. W dowodzie tego twierdzenia Euklides stosuje algorytm kolejnego odejmowania (ἀνθυφαίρεσις) znany w matematyce greckiej już w IV wieku p.n.e. Warunkiem koniecznym przeprowadzenia tego algorytmu jest aksjomat Archimedesa oraz zasada minimum. Nie tylko Euklides, ale nawet współcześni historycy nie zdają sprawy z tych założeń, dlatego rzecz wymagałaby szerszego omówienia. Przejdziemy zatem do twierdzenia, w którym stosowana jest zasada: nie istnieje nieskończony malejący ciąg liczb. Jest ona użyta w twierdzeniu VII.31.

VII.31 „Każda liczba złożona jest mierzona przez pewną liczbę pierwszą".

Jest to w istocie twierdzenie o rozkładzie liczby na czynniki pierwsze. Jego dowód jest nie wprost i tak przebiega:

Niech A jest liczbą złożoną. Z definicji oznacza to, że jest podzielna („mierzona") przez pewną liczbą, niech to będzie B. Jeżeli B jest liczbą pierwszą, to dowód jest skończony. Jeżeli jest złożoną, to jest podzielna przez pewną liczbę, niech to będzie C. Liczba C dzieli („mierzy") B, zatem dzieli także A. Jeżeli C jest pierwszą, to dowód jest skończony. Jeżeli jest złożoną, to jest podzielna przez pewna inną liczbę. Postępując dalej w ten sposób znajdziemy pewną liczbę pierwszą, która dzieli A. Teraz zacytujemy najważniejszy krok:

„Bo jeśli nie zostanie znaleziona, to liczba A będzie mierzona przez nieskończoność liczb (ἄπειροι ἀριθμοί), z których jedna od drugiej jest mniejsza, co dla liczb jest niemożliwe".

Właśnie to zdanie interpretujemy jako zasadę: nie istnieje nieskończony, malejący ciąg liczb naturalnych. Wiadomo, że jest ona równoważna zasadzie minimum, która z kolei jest równoważna zasadzie indukcji.

Zbierzmy teraz własności matematyczne struktury liczb $(\mathbb{A}, +, \cdot, <)$. Są to przede wszystkim aksjomaty (E2), (E3) oraz zasada minimum. Dalej, przyjmując, że dodawanie $+$ oraz porządek $<$ są powiązane zależnościami (E2), (E3), a z zasady minimum wynika (E1).[45] Następnie, wyżej przywołaliśmy fakt, że gdy w strukturze $(M, +, <)$ spełnione są aksjomaty (E1)-(E4), to nie istnieje

[43] Zob. [Błaszczyk 2007], s. 195, gdzie podany jest symboliczny zapis tej definicji.
[44] Zob. [Błaszczyk 2007], s. 192-193.
[45] Dowód jest taki sam, jak dla liczb rzeczywistych. Zob. [Błaszczyk 2007], s. 259-260.

w $(M, <)$ element najmniejszy. Z tego wynika, że w strukturze liczb nie może zachodzić własność (E4). W odrębnym rozumowaniu można pokazać, że w strukturze liczb nie jest spełniony warunek (E5). W następnym paragrafie pokażemy, że w strukturze odcinków nie jest spełniona zasada minimum. Tym sposobem otrzymamy czysto matematyczną różnicę między strukturą wielkości i strukturą liczb u Euklidesa.

§3. EUKLIDES O ODCINKU

1. Charakterystykę odcinka, jaką znajdujemy w Księgach I-IV poprzedzimy przytoczeniem pierwszych definicji *Elementów.*

Df. I.1 „Punkt to to, co nie ma części (μέρος)".[46]

Df. I.2 „Linia (γραμμή) to długość (μῆκος) bez szerokości".

Df. I.3 „Krańcami (πέρατα) linii są punkty".

Df. I.4 „Linia prosta (εὐθεῖα γραμμή) to ta, która leży równo względem punktów na niej".

Odcinek to rodzaj linii. Linia może być prosta, lub nie, jak np. okrąg, czy łuk okręgu. Łamana, np. brzeg wielokąta, nie jest linią, lecz wielością linii. W tekście *Elementów* wyrażenie linia prosta (εὐθεῖα γραμμή) występuje w skróconej postaci jako prosta (εὐθεῖα).

Prosta może być ograniczona (εὐθεῖα πεπερασμένη) lub nieskończona (εὐθεῖα ἄπειρος). Prosta ograniczona to taka, *rysowanie* której zostało zakończone, która *została wykonana* i ma krańce, granice (πέρατα). Właśnie ten rodzaj linii nazywamy odcinkiem. W tekście *Elementów* jest ona oznaczana dwoma literami, np. AB, gdzie punkty A, B to jej „krańce". Ponadto, wyrażenie „prosta ograniczona"(εὐθεῖα πεπερασμένη) jest także skracane do „prosta"(εὐθεῖα), a w kolejnym zdaniu mogą zostać tylko same oznaczenia literowe, np. AB. I tak jest na przykład w twierdzeniu VI.30:

„Niech AB będzie daną prostą ograniczoną (εὐθεῖα πεπερασμένη). Należy więc przeciąć prostą (εὐθεῖα) AB w stosunku skrajne do środkowej. Niech na AB będzie opisany kwadrat BC".

Podobnie w twierdzeniu VI.9

„Niech AB będzie daną prostą (εὐθεῖα). Należy więc odciąć od AB zadaną część".

I tak w Postulacie 2, mówiącym o przedłużaniu odcinka czytamy

„I wykonać (ἐκβαλεῖν) skończoną prostą w sposób ciągły (συνεχές) na prostej".

Gdy postulat ten jest stosowany w twierdzeniu I.5,

„niech proste BD, CE będą przedłużone (προσεκβεβλήσθωσαν) w prostej za pomocą AB, AC",

to z opisu konstrukcji wynika, że punkty A,B,D leżą na jednej prostej i odcinek AD jest przedłużeniem odcinka AB.

[46] W oryginale słowo „część" występuje w liczbie pojedynczej.

2. Niech $(X, <)$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym. W teorii zbiorów liniowo uporządkowanych funkcjonują dwa rozumienia odcinka: (1) Niech $a, b \in X$, wtedy odcinkiem domkniętym nazywamy zbiór $[a, b] = \{x \in X : \ a \leqslant x \leqslant b\}$, podobnie definiujemy odcinek otwarty (a, b). (2) Zbiór $S \subset X$ nazywamy odcinkiem, gdy dla dowolnych $a, b \in S$ zachodzi: $a < x < b \rightarrow x \in S$. Pokazuje się, że gdy w zbiorze $(X, <)$ spełniona jest zasada supremum, to dla każdego odcinka S w sensie definicji (2), gdy jest on zbiorem ograniczonym, istnieją takie $a, b \in X$, że $S = (a, b)$ lub $S = (a, b]$, itd.

W przypadku (1) odcinek jest wyznaczony przez punkty, bez względu na to, czy punkty te należą doń, czy nie. W przypadku (2) możliwy jest odcinek, dla którego nie istnieją punkty, które go wyznaczają. Przykładem niech będzie $S \subset \mathbb{Q}$, $S = \{q \in \mathbb{Q} : \ q^2 \leqslant 2\}$.

Przedstawione rozróżnienia pomogą nam przybliżyć greckie rozumienie odcinka. Otóż bliskie pojęciu εὐθεῖα πεπερασμένη jest pojęcie odcinka domkniętego, jakie znajdujemy we współczesnej geometrii elementarnej. Oto czytamy:

„Parę nieuporządkowaną $\{a, b\}$ punktów a, b będziemy nazywali *odcinkiem* ab i oznaczali przez ab. Punkty a i b nazywamy *końcami* odcinka ab. Zbiór punktów leżących między punktami a i b będziemy nazywali *odcinkiem otwartym* ab lub odcinkiem (ab) i oznaczali we wzorach przez (ab)”.[47]

Odcinek domknięty jest tu identyfikowany z „końcami” i co szczególne, między punktami a, b leżą inne punkty, ale „między” nie jest definiowane przez liniowy porządek, a przez pierwotne pojęcie systemu: trzyargumentową relację leżenia między.[48]

Z kolei pojęciu εὐθεῖα ἄπειρος odpowiada definicja (2) odcinka, w przypadku gdy nie jest on wyznaczony przez żadne punkty. Zatem „nieskończona prosta”, to prosta nie-ograniczana, tj. tak, która nie posiada „granic”. I tak w twierdzeniu I.12 jest użyta taka nie-ograniczona prosta, natomiast w I.22 – „pewna prosta (εὐθεῖα) DE, ograniczona (πεπερασμένη) przez D, nieskończona (ἄπειρος) zaś w kierunku E”.

Wyżej wskazaliśmy podobieństwa między współczesnym i greckim pojmowaniem odcinka, dlatego dla równowagi przejdziemy do różnic i zaczniemy od powtórzenia tego, o czym pisaliśmy we wstępnie, a mianowicie, że w geometrii Euklidesa nie występuje pojęcie porządku liniowego. Kolejna istotna różnica polega na tym, że w matematyce współczesnej odcinkowi, rozumianemu jako obiekt geometrii elementarnej, przypisywana jest długość, czyli liczba rzeczywista. Tak jest w wykładzie [Borsuk, Szmielew 1972], chociaż jeszcze w [Hilbert 1903] odcinkom nie są przyporządkowywane liczby.[49] Uwaga ta jest o tyle istotna, że w filozofii greckiej, m.in. u Arystotelesa, pojęcie „długość” (μῆκος) występuje w znaczeniu „odcinek”. Takie znaczenie pojęcia „odcinek”, ale już w powiązaniu z liczbą znajdujemy u Dedekinda:

[47] [Borsuk, Szmielew 1972], s. 34.

[48] Zob. [Błaszczyk 2007], rodz. II.

[49] W [Borsuk, Szmielew 1972] związek między odcinkami i liczbami rzeczywistymi oparty jest na twierdzeniu; zob. [Błaszczyk 2007], rodz II. W [Cantor 1872] jest to wyrażone w postaci aksjomatu; zob. [Błaszczyk 2007], s. 131.

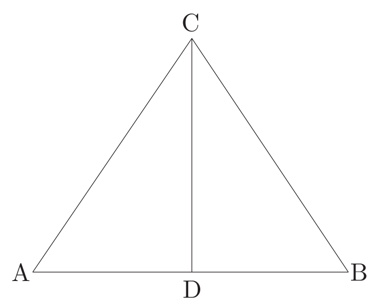
„[...] już starożytni Grecy wiedzieli i dowodzili, że istnieją długości, które nie są współmierne z daną jednostką długości, np. przekątna kwadratu, którego bok jest jednostką długości. Jeśli odłożymy taką długość od punktu o na prostej, to otrzymamy punkt końcowy, który nie odpowiada żadnej liczbie wymiernej. Dalej, ponieważ łatwo udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele długości, które nie są współmierne z jednostką długości, więc możemy stwierdzić: prosta L jest nieskończenie bogatsza w indywidua punktowe niż dziedzina R liczb wymiernych w indywidua liczbowe”.[50]

W powyższym fragmencie „odcinek” oznacza obiekt geometryczny, który jest „odkładany na prostej”, ale „prosta” oznacza już oś liczbową, a nie obiekt geometryczny rozumiany tak, jak w *Elementach.*

3. Analizując twierdzenie I.10 z *Elementy*, pokażemy teraz, że odcinek (πεπερασμένη εὐθεῖα) jest „podzielny na zawsze podzielne”.

I.10 „Skończoną prostą podzielić (τεμεῖν) na połowy (δίχα)”.

Do dowodu należy diagram oraz opis konstrukcji, która jest znana pod nazywaną „dychotomia”(po łacinie, *bisekcja*) odcinka.



„Niech AB będzie daną skończoną prostą. Należy zatem podzielić skończoną prostą AB na połowy. Niech będzie połączony trójkąt ABC. I niech kąt ACB będzie podzielony na połowy prostą CD. Twierdzę, że prosta AB została podzielona na połowy w punkcie D”.

Po tej części twierdzenia następuje uzasadnienie. Powołując się na wcześniejsze twierdzenia Euklides dochodzi do konkluzji:

„Zatem podstawa AD jest równa (ἴση ἐστίν) podstawie BD”.

Zbierzmy teraz to, co najważniejsze.

(1) Punkt D jest wyznaczony konstrukcyjnie, co zapiszemy formułą $D = \delta(AB)$, gdzie δ oznacza dychotomię odcinka.

(2) Odcinki AD, DB są częściami (μέρη) całości (ὅλον) AB. Punkt D dzieli AB na części.

(3) D jest zarazem krańcem odcinka AD i krańcem odcinka DB.

(4) Dzieląc na połowy odcinek DB wyznaczymy punkt D_1. Dzieli on DB na części DD_1, D_1B. Części te są jednocześnie częściami odcinka AB,

$$AB = AD + DB = AD + (DD_1 + D_1B) = AD + DD_1 + D_1B.$$

[50] Zob. [Dedekind 1872], §3, tł. J. Pogonowski.

(5) Powtarzając tę operację n-razy otrzymamy ciąg punktów $D_1, D_2, ..., D_n$. W istocie indukcyjnie możemy zdefiniować ciąg $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$\begin{cases} D_0 = D, \\ D_{n+1} = \delta(D_n B). \end{cases}$$

Każdy punkt D_{n+1} dzieli odcinek D_nB na części D_nD_{n+1}, $D_{n+1}B$, które są jednocześnie częściami AB,

$$AB = AD_1 + D_1D_2 + ... + D_{n-1}D_n + D_nB, \quad D_nB = D_nD_{n+1} + D_{n+1}B.$$

Zważywszy, że n jest dowolne, odcinek AB „jest podzielny na zawsze podzielne" odcinki D_nB.
(6) W ciągu odcinków $\{D_nB : n \in \mathbb{N}\}$ nie istnieje najmniejszy, co znaczy, że w strukturze odcinków nie jest spełniona zasada minimum.

§4. MANIFEST METODOLOGICZNY

1. W samym podejściu do *Elementów* Euklidesa, zwłaszcza do teorii proporcji z Księgi V, wyróżniamy dwa zasadnicze nurty. Do pierwszego, nazwijmy go historycznym, zaliczamy takie prace, jak [Heath 1956], [Knorr 1975], [Vitrac 1990-2001], [Fowler 2003].[51] Do drugiego, nazwijmy go źródłowym i matematycznym – [Beckmann 1967], [Mueller 2006].

Współczesne tłumaczenia *Elementów* oparte są na edycji greckiego tekstu dokonanej przez J.L. Heiberga.[52] Tłumaczenie autorstwa T.L. Heath'a to pierwszy w ogóle przekład oparty na tej edycji. Zyskało ono dużą popularność i wręcz zdominowało wiek XX. Komentarze Heath'a do Ksiegi V są dziś traktowane z rezerwą, czy wręcz jako błędne. Inny jest też już stan wiedzy historycznej dotyczącej teorii proporcji.[53] Tym niemniej opracowanie to ciągle pozostaje punktem odniesienia dla wielu dyskusji.

We wstępie do Księgi V Heath pisze:

„[...] w *Elementach* teoria proporcji jest wykładana dwa razy: w Księdze V, w odniesieniu do wielkości w ogóle, i w Księdze VII, w odniesieniu do konkretnego przypadku liczb. [...] dlaczego Euklides nie oszczędził sobie wielu przecież powtórzeń i zamiast potraktować liczby po prostu jako szczególny przypadek wielkości i powołać się na ogólniejsze twierdzenia Księgi V, **te same twierdzenia** dowodzi ponownie dla liczb? Nie mógł przecież nie zauważyć, że liczba podpada pod pojęcie wielkości. **Arystoteles** [...] wyraźnie przecież wskazuje, że wielkości mogą być liczbami. Następnie Arystoteles zauważa [...], że twierdzenie, w którym wyrazy proporcji mogą być wzięte przemiennie było dowodzone osobno dla liczb, odcinków, brył i czasu, [...] Jednakże, jak dodaje, twierdzenie

[51] Do uznanych przedstawicieli tego nurtu działających w pierwszej połowie XX w. należą O. Bekker, B.L. v.d. Waereden, K. v. Fritz.
[52] Zob. [Heiberg 1883-1885].
[53] Zob. [Berggren 1984]. Drugie, poprawione wydanie tłumaczenia Heath'a ukazało się w roku 1926 i ta wersja jest wznawiana po dziś dzień.

to ma **ogólny dowód**. Euklides w żaden sposób nie komentuje, jak powiązać te dwie teorie proporcji, nawet wtedy, gdy tak jak w twierdzeniu X.5 dwa wyrazy proporcji są wielkościami, a dwa liczbami".[54]

Heath uznaje, że dla Euklidesa liczby nie są wielkościami, ale twierdzenie X.5 rodzi problem, który, zdaniem Heath'a, wymaga wyjaśnienia. Proponuje zatem proste rozwiązanie: w Księdze X stosowana jest definicja V.5. Powołując się na świadectwo Arystotelesa przyjmuje, że liczby podpadają pod pojęcie μέγεθος.[55] Dodatkowo przytacza dowód podany przez Simsona: „wielkości proporcjonalne w sensie definicji VII.20 są także proporcjonalne w sensie definicji V.5".[56]

Autorytet Arystotelesa i spekulacje, jak mogłoby wyglądać teoria proporcji stają się dla Heath'a cenniejsze niż ustalanie, jaką teorię – z podaniem definicji, twierdzeń, dowodów – faktycznie zawiera Księga V. Dodatkową ceną za *rozwiązanie* problemu Księgi X jest teza, iż niektóre twierdzenia z Księgi V są „te same" co w Księdze VII. „Te same" to chyba nic innego jak równoważne, a zatem równoważne na gruncie pewnej teorii. Jakiej? U Heath'a nie znajdziemy odpowiedzi, bo – jak już powiedzieliśmy – nawet nie próbuje on zrekonstruować teorii zawartej w Księdze V.

Wilbur R. Knorr w [Knorr 1975] szeroko opisuje udział teorii proporcji opartej na algorytmie ἀνθυφαιρεσις w matematyce greckiej w dobie przed Euklidesem.[57] O teorii z Księgi V (teorii Eudoxosa) tak pisze:

„Eudoxos odkrył warunek (V, def. 4), który pozwala przeformułować podstawowe pojęcie proporcji (V, def. 5). [...] Z nową definicją wiązało się to, że dla pewnych twierdzeń odnoszących się do wielkości z różnych klas – takich jak odcinki, powierzchnie, czy bryły – można było podać jeden wspólny dowód. Gdy więc poprzednia teoria kazała traktować je jako odrębne przypadki, nowa teoria pozwalała potraktować je jako jeden. To właśnie ma na myśli Arystoteles, gdy [...] wyróżnia «dowód ogólny»."[58]

W interpretacji Knorra „ogólny dowód", o którym pisze Arystoteles, dotyczy nie liczb i wielkości geometrycznych – jak chciał Heath – a jedynie różnych wielkości geometrycznych. Jak zatem rozwiązuje Knorr problem Księgi X?

„Twierdzenia wstępne dotyczące współmierności odwołują się do koncepcji proporcji bliższej Księgi VII, nie zaś tej z Księgi V. [...] Opracowując twierdzenie X.5 Euklides najwyraźniej **nie zauważył**, że powinien uzgodnić te dwa rozumienia proporcji".[59]

Rozwiązanie polega po prostu na odnotowaniu niekonsekwencji Euklidesa. Zobaczmy wreszcie, co w związku z tym pisze Knorr o ἀριθμός i μέγεθος.

„[...] Nie oznacza to jednak, że obiekty te [liczby] były zaliczane do innej klasy:

[54] [Heath 1956], t. II, s. 112-113, tł. P.B., podkreślenia – P.B.
[55] Heath przywołuje *Analityki wtóre* 74a 17, 75b 4.
[56] [Heath 1956], t. III, s. 25, tł. P.B.
[57] Teorię tę odnalazł w pismach Arystotelesa O. Bekker (*Voreudoxische Proportionelehre*, 1933). Zob. [Berggren 1987], s. 398.
[58] [Knorr 1976], s. 302, tł. P.B, podkreślenie - P.B.
[59] [Knorr 1975], s. 304.

liczby nie są przez to traktowane jako wielkości [magnitudes] specjalnego rodzaju. Mają one swoje **specyficzne definicje i własności**, a świadczy o tym fakt, że Euklides zachował proporcję liczb jako odrębną teorię. Księga VII nie jest prostym powtórzeniem Księgi V".[60]

Znamienne jednak, że zamiast ustalenia tych „specyficznych własności", znajdujemy spekulacje. Wskazując na różnice między liczbami i wielkościami Knorr przedstawia analizę twierdzenia o przemienności iloczynu liczb, w której przyjmuje, że iloczynem odcinków jest prostokąt, chociaż w *Elementach* nie ma – i trudno przypuszczać, że Knorr tego nie wie – definicji iloczynu odcinków.

2. [Beckmann 1967] to najsolidniejsze opracowanie Księgi V. Przy użyciu współczesnej notacji matematycznej oraz narzędzi filologii klasycznej, w artykule odtwarzane są wszystkie twierdzenia Księgi V. We wstępie zaś czytamy:

„Zamiarem autora jest odczytanie głównego dzieła Euklidesa «ze współczesnej perspektywy». [...] przedstawiamy szczegółową analizę definicji i twierdzeń z Księgi V. Postępujemy tu idąc «słowo za słowem». Autor stosuje swój system aksjomatów, ustanowiony w ścisłej zgodności z Euklidesem, co pozwala wyprowadzić wszystkie definicje i twierdzenia Euklidesa teorii wielości".[61]

We wstępie do [Mueller 2006] czytamy:

„Podstawowym zadaniem tej książki jest prezentacja zawartości *Elementów* [...] W tym celu najlepiej jest, jak sądzę, skoncentrować się na samych *Elementach*, w szczególności spojrzeć na poszczególne twierdzenia z punktu widzenia roli, jaką odgrywają w całości dzieła. Dlatego stosunkowo rzadko przywołuję inne źródła antyczne [...] nie omawiam też tzw. *prehistorii Elementów*, z wyjątkiem tych przypadków, gdzie jest to istotne dla samej interpretacji *Elementów*".[62]

W odrębnym rozdziale Mueller omawia kolejne twierdzenia Księgi V zwracając uwagę na niezapisane założenia oraz miejsca, które z punktu widzenia współczesnych rygorów uznawane są za luki w dowodach. W postępowaniu tym wyraźnie oddziela matematyczną zawartość Księgi V od interpretacji.

Beckmann i Mueller odnoszą się oczywiście do problemu związanego z twierdzeniem X.5. Beckmann zauważa, że definicje V.1,2 nie wystarczają do zdefiniowania pojęcia wielkości i przyjmuje, że strukturę wielkości, podobnie jak liczby, charakteryzują aksjomaty (E1)-(E3).[63] Opisując kolejne twierdzenia Księgi V zauważa oczywiście, że niepisanym założeniem dowodu twierdzenia V.5 jest aksjomat (E4), a niepisanym założeniem dowodu twierdzenia V.18 jest aksjomat (E5).[64] Spośród aksjomatów (E1)-(E5) w *Elementach* wprost zapisany jest jedynie (E1), a Beckmann nie wyjaśnia, dlaczego jedne niejawne założenia Księgi V zalicza do charakterystyki wielkości, innych nie. Można to uznać za niekonsekwencję, tym niemiej dyskusja z nim jest prosta, bo odbywa się w kręgu tych

[60] [Knorr 1975], s. 309, tł. P.B, podkreślenie - P.B.

[61] [Beckmann 1967], s. 3, tł. P.B.

[62] [Mueller 2006], s. viii, tł. P.B..

[63] W [Beckmann 1967], s. 23, jest to przedstawione jako układ aksjomatów (A1)-(A14).

[64] (E1)-(E5), w notacji Beckmanna (A1)-A(16), to układ, z którego wyprowadza on twierdzenia Księgi V; zob. [Beckamnn 1967], s. 33-34, 84-85.

samych ustaleń matematycznych i źródłowych, nie zaś świadectw Arystotelesa, czy Proklosa.

Z kolei odpowiedź Muellera jest zupełnie prosta: „wydaje się zupełnie oczywiste, że Euklidesa pojęcie wielkości [magnitude] nie obejmuje liczb”.[65] Argumentacja zaś wynika wprost z przyjętej metody: liczby, tak jak są pojmowane w Księgach VII-IX, nie spełniają aksjomatu (E4).

Zbierzmy zatem w tym miejscu i nasze argumenty. Księga V zawiera definicję proporcji oraz porządku stosunków. Badając warstwę językową znajdujemy, że w całej Księdze V stosowane jest pojęcie μέγεθος, natomiast w Księgach V i VI w ogóle nie występuje słowo ἀριθμός . Pojęcie liczby jest definiowane w Księdze VII, tam też podana jest odrębna definicja proporcji liczb. Fakt, iż w Księdze V stosowane są definicje V.5,7 potwierdza rekonstrukcja poszczególnych twierdzeń oraz analiza warstwy językowej. Podstawą tych ustaleń jest tekst źródłowy. W opisie matematycznym, liczby charakteryzujemy jako strukturę spełniającą aksjomaty (E1)-(E3) oraz zasadę minimum. Liczby nie spełniają aksjomatów (E4), (E5). Wielkości charakteryzujemy jako strukturę spełniającą aksjomaty (E1)-(E5), wielkości nie spełniają zasady minimum.

3. Dla uchwycenia tego, co szczególne w metodzie historycznej zwróćmy uwagę na następujące zdania z podsumowania [Knorr 1975]:

„Mamy zatem przegląd całości *Elementów* Euklidesa oraz ich związku z wcześniejszymi badaniami oraz materiałami źródłowymi. Nasze syntetyczne ujęcie tego procesu w pełni zgadza się z tym, jak Proklos przedstawia pochodzenie *Elementów* oraz związki Euklidesa z poprzednikami”.[66]

W podejściu, które nazwaliśmy historycznym badana jest zatem geneza *Elementów*. Uderza jednak dysonans między dbałością o odtworzenie teorii poprzedzających *Elementy* i pobieżnym odtworzeniem zawartości samych *Elementów*. Tu najwyraźniej rysuje się różnica stanowisk: gdy w podejściu historycznym badana jest geneza, w podejściu źródłowym i matematycznym *Elementy* są opisywane jako teoria matematyczna spełniającą współczesne kryteria poprawności.

Nasz stosunek do metody przyjętej przez Beckmanna i Muellera przedstawiliśmy w innym miejscu.[67] Dodajmy natomiast, że w podejściu do *Elementów*, jakie przyjmujemy chodzi jeszcze o coś więcej niż tylko o samo odtworzenie ich zawartości, chodzi mianowicie o recepcję *Elementów*, o to, jak w oparciu o teorię proporcji z Księgi V w dziełach Kartezjusza, H. Webera, O. Höldera i D. Hilberta kształtowało się pojęcie ciała uporządkowanego.[68] Ustaliwszy matematyczną zawartość Księgi V, możemy ukazać jej związek z Kartezjusza arytmetyką odcinków, Webera teorią proporcji, Höldera pojęciem grupy uporządkowanej, a wreszcie z Hilberta definicją ciała uporządkowanego. Dla wskazanych matematyków *Elementy* były żywą inspiracją, a nie obiektem badań historycznych.

---

[65] Zob. [Mueller 2006], s. 136, tł. P.B.
[66] [Knorr 1975], s. 306, tł. P.B.
[67] Zob. [Błaszczyk, Mrówka 2013b].
[68] Zob. [Descartes, 1637], [Weber, 1895], [Hilbert 1900], [Hölder, 1901], [Hilbert 1903].

Line segment is a kind of ancient Greek μέγεθος. It is described mathematically in Euclid's *Elements* and in a philosophical way in Aristotle's *Physics*. In this first part of our paper we present Euclid's twofold attitude toward a line segment: the first one developed in his theory of proportion of magnitudes (Book V), the second in his plain geometry (Books I-IV). Euclid's magnitudes are of several different kinds: lines segments, triangles, convex polygons, arcs, angles. Magnitudes of the same kind can be added to one another and compared as greater–lesser. We provide a set of axioms for the line segments system $(M, +, <)$ and show that the total order of segments $<$ is compatible with the addition operation $+$. Positive part of an archimedean field is a model of these axioms. Next, we present an interpretation of Euclid's proposition I.10 and show that famous Aristotle's saying „everything continuous is divisible into divisibles that are infinitely divisible" applies to a single line segment. Our study is based on Heiberg's *Euclidis Elementa*.

Piotr Błaszczyk,
Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
Kazimierz Mrówka,
Instytut Filozofii i Socjologii, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków

Literatura

Artin E., Schreier O. (1926), *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5, 1926, s. 85–99.

Arystoteles, *Aristotelis Physica*, w: Bekker I., *Aristotelis Opera*, Berlin 1831.

Bair, J., Błaszczyk, P., Ely, R., Henry, V., Kanovei, V., Katz, K., Katz, M., Kutateladze, S., McGaffey, T., Schaps, D., Sherry, D., Shnider, S. (2013), *Is mathematical history written by the victors?* Notices of the American Mathematical Society 60 (7), 2013, s. 886-904.

Beckmann F. (1967), *Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids*, Archive for History of Exact Sciences IV, 1967, s. 1-144.

Berggen J.L. (1984), *History of Greek Mathematics: A Survey of Recent Research*, Historia Mathematica 11, 1984, s. 394-410.

Błaszczyk P. (2006), *O definicji 5 z Księgi V Elementów Euklidesa*, Investigationes Linguisticae XIV, 2006, s. 120-146; www.inveling.amu.edu.pl.

Błaszczyk P. (2007), *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen, Wyd. Naukowe AP, Kraków; www.eudoxos.pl.

Błaszczyk P. (2010a), *O definicji 7 z Księgi V Elementów Euklidesa*, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce 46, s. 117-139.

Błaszczyk P. (2010b), *Ciągłość versus kontinuum. Rewizja stanowiska Zenona z Elei i jego współczesnych krytyków*, w: *Światy matematyki. Tworzenie czy odkrywanie? Księga Jubileuszowa ofiarowana Panu Profesorowi Romanowi Murawskiemu*, red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2010, s. 107-121; www.eudoxos.pl.

Błaszczyk P. (2012a), *O ciałach uporządkowanych*, Annales Universitatis Paedagogice Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Partinentia IV, 2012, s. 15-30; www.up.krakow.pl/mat/annal-dyd/.

Błaszczyk P. (2012b), *Nota o* Über den Zahlbegriff *Davida Hilberta*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Partinentia IV, 2012, s. 195-198; www.up.krakow.pl/mat/annal-dyd/.

Błaszczyk P. (2013), *Nota o rozprawie Otto Höldera* Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass, Annales Universitatis Paedagogice Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Partinentia V, 2013 (w druku), www.eudoxos.pl

Błaszczyk P., Mrówka K. (2013a), *Komentarz do Księgi V Elementów Euklidesa*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki, 2013 (w druku).

Błaszczyk P., Mrówka K. (2013b), *Euklides, Elementy, Księgi V-VI. Tłumaczenie i komentarz*, Copernicus Center Press, Kraków 2013.

Borsuk K. Szmielew W. (1972), *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa 1972.

Bourbaki N. (1947), *Theorie de la mesure et de l'intengration. Introduction (etat 2)*, Université Henri Poincaré, Nancy 1947.

Cajori F. (2007), *A History of Mathematical Notations*, t. I, CosimoClassics, New York (reprint wydania z 1928 roku).

Cantor G. (1872), *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Mathematische Annalen 5, 1872, s. 123–132.

Cantor G. (1882), *Über undendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 3*, Mathematische Annalen 20, 1882, s. 113-121, w: [Cantor 1932], s. 149-157.

Cantor G. (1883), *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. 5*, Mathematische Annalen 21, 1883, s. 545-586, w: [Cantor 1932], s. 165-208; *O nieskończonych liniowych rozmaitościach punktowych*, §10, tł. J. Pogonowski, www.eudoxos.pl.

Cantor G. (1895), *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen 46, 1895, s. 481–512, w: [Cantor 1932], s. 282-351; *Przyczynki do ugruntowania pozaskończonej teorii mnogości*, §11. *Typ porządkowy θ kontinuum liniowego X*, tł. J. Pogonowski, www.eudoxos.pl.

Cantor G. (1932), *Gesammelte Abhandlungen*, Hrsg. E. Zermelo, Springer, Berlin 1932.

Cauchy A. (1821), *Cours d'analyse*, Courcier, Paris 1821.

Dedekind R. (1872), *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1872.

Descartes R. (1637), *La Géométrie*, Leiden 1637.

Euler L. (1807), *Élémens d'algébre*, t. I, Courcier, Paris 1807.

Fowler D. (2003), *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford Univ. Press, Oxford 2003.

Grassmann H. (1861), *Lehrbuch der Arithmetik*, Enslin, Berlin 1861.

Hallett M., Majer U. (2004), *David Hilbert's* Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902, Springer, Berlin 2004.

Hartshorne R. (2000), *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, New York 2000.

Heiberg I.L. (1883-1886), *Euclidis Elementa.* edidit et Latine interretatus est I.L. Heiberg, Vol. I-IV, in aedibus B.G. Teubneri, Lipsiae 1883-1886.

Heath T.L. (1956), *Euclid. The Thirteen Books of The Elements*, translated from the text of Heiberg, Vol. I–III, Dover, New York 1956 (reprint wydania z

1926); wydanie pierwsze: 1908.

Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen, Teubner, Leipzig 1899; wydanie drugie: *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig 1903

Hilbert D. (1900), *Über den Zahlbegriff*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8, 1900, s. 180–184; *O pojęciu liczby*, tł. J. Pogonowski, Annales Universitatis Paedagogice Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Partinentia IV, 2012, s. 199-202; www.up.krakow.pl/mat/annaldyd/.

Hölder O. (1901), *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe 53 , Leipzig, 1–63; *Aksjomaty wielkości i teoria miary*, § 1-5, tł. J. Pogonowski, Annales Universitatis Paedagogice Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Partinentia V, 2013 (w druku); www.eudoxos.pl

Knorr W.R. (1975), *The Evolution of the Euclidean Elements*, D. Reidel, Dordrecht 1975.

Kuratowski K. (1952), *Topologie*, t. II, PTM, Warszawa 1952.

Kuratowski K. (1973), *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1973.

Kuratowski K., A. Mostowski A. (1978), *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa 1978.

Mueller I. (2006), *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Dover, New York 2006 (reprint wydania z 1981).

Pasch M. (1882), *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig 1882.

Stolz O. (1885), *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, Teubner, Leipzig 1885.

Vitrac B. (1990-2001), *Euclide. Les Eléments*, Vol. 1-4, traduits du texte de Heiberg, PUF, Paris 1990-2001.

Weber H. (1895), *Lehrbuch der Algebra*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1898 (wydanie drugie: 1898).

Whitney H. (1968), *The mathematics of physical quantities. Part I. Mathematical models for measurement*, American Mathematical Monthly 75, s. 115-138.