

**CIĄGŁOŚĆ I LICZBY
RZECZYWISTE:
EUDOXOS – DEDEKIND – CONWAY**

Uniwersytet
Komisji Edukacji Narodowej
w Krakowie
Prace Monograficzne 1284

Piotr Błaszczyk

**CIĄGŁOŚĆ I LICZBY
RZECZYWISTE:
EUDOXOS – DEDEKIND – CONWAY**

Przygotowane w ramach realizacji grantu:

Nieskończoność i nieskończenie małe NCN 2018/31/B/HS1/03896

Recenzenci:

prof. dr hab. Krzysztof Wójtowicz, Uniwersytet Warszawski

dr hab. Piotr Łukowski, prof. Uniwersytetu Jagiellońskiego

© Copyright by Piotr Błaszczyk, Kraków 2025

© Copyright by Wydawnictwo Naukowe UKEN, Kraków 2025

Redaktor prowadzący – Dariusz Niezgoda

Redakcja i korekta – Małgorzata Miller

Skład, opracowanie typograficzne, diagramy – Anna Petiurenko

Projekt okładki – Katarzyna Kopańska

ISSN 2450-7865

ISBN 978-83-68487-30-5

e-ISBN 978-83-68487-31-2

DOI 10.24917/9788368487305

Wydawnictwo Naukowe UKEN

30-084 Kraków, ul. Podchorążych 2

tel./faks 12 662-63-83, tel. 12 662-67-56

e-mail: wydawnictwo@uken.krakow.pl

Zapraszamy na stronę internetową:

<https://wydawnictwo.uken.krakow.pl>

Spis treści

WSTĘP	9
1 Ciało uporządkowane	13
2 Ciągłość	15
3 Technika matematyczna	17
4 Ciało uporządkowane i geometria	22
5 Ciągłość i ciała niearchimedesowe	24
6 Shapiro, Hellman, <i>Historia ciągłości</i> z perspektywy filozoficznej i matematycznej	26
Rozdział I Starożytna Grecja	37
1 <i>Elementy</i> . Historia tekstu	39
2 Proporcja w ogólnym planie <i>Elementów</i>	42
3 Podstawy geometrii Euklidesa	46
4 Teoria proporcji z Księgi V <i>Elementów</i>	51
5 Archimedes, <i>O mierzeniu koła</i>	75
6 Heron, <i>Metrika</i>	90
7 Ptolemeusz, <i>Almagest</i>	95
Rozdział II Ciała uporządkowane	113
1 Ciało uporządkowane. Podstawowe własności	116

SPIS TREŚCI

2	Rozszerzenia	122
3	<i>Grundlagen der Geometrie</i>	135
Rozdział III Kartezjusz		147
1	Kartezjusz, <i>Geometria</i> , 1637	149
2	Arytmetyka odcinków	150
3	Twierdzenie Pitagorasa	159
4	Zagadnienie Pappusa	163
5	Wielkości, liczby, <i>quantity vs</i> ciało uporządkowane . .	170
Rozdział IV Newton		173
1	Newton, <i>De Analysi</i> , 1711	175
2	Wprowadzenie do interpretacji	178
3	<i>De Analysi</i> . Niepodzielne i momenty	188
4	<i>De Analysi</i> . Momenty łuku	199
5	<i>De Analysi</i> . Momenty pola	203
6	<i>De Analysi</i> . Dowód Reguły I	207
7	Podstawy analizy niestandardowej	210
8	Interpretacja Reguły I	219
9	Uwagi końcowe	228
10	<i>De Analysi vs</i> klasyczna analiza	229
Rozdział V Euler		235
1	Euler, <i>Wstęp do analizy nieskończoności</i> , 1748	237
2	Nieskończenie małe i nieskończenie duże w <i>Institutiones calculi differentialis</i>	248
3	Interpretacja dowodu Eulera	257
Rozdział VI Ciągłość		259
1	Zupełność w sensie Dedekinda	262
2	Analiza niestandardowa	271
3	Zupełność w sensie Cauchy'ego	281

Rozdział VII Rok 1872	285
1 Heine, <i>Elementy teorii funkcji</i> , 1872	290
2 Cantor, <i>O rozszerzeniu pewnego twierdzenia z teorii szeregów trygonometrycznych</i> , 1872	305
3 Dedekind, <i>Ciągłość i liczby niewymierne</i> , 1872	316
4 Porównania	335
Rozdział VIII Od wielkości do aksjomatów	347
1 Hölder, <i>Aksjomaty wielkości i teoria miary</i> , 1901	351
2 Stolz, Du Bois-Reymond, Weber	356
3 Hilbert, <i>O pojęciu liczby</i> , 1900	361
4 Huntington, <i>Zupełny system aksjomatów teorii absolutnych wielkości ciągłych</i> , 1902	363
Rozdział IX Nowe konstrukcje	365
1 Weber, <i>Podręcznik algebry</i> , 1895	368
2 Wiek XX	377
Rozdział X Artin, Schreier, Pontriagin, Conway	387
1 Artin, Schreier, <i>Algebraiczna konstrukcja ciał rzeczywistych</i> , 1926	389
2 Pontriagin, <i>O ciałach algebraicznych ciągłych</i> , 1932	396
3 Liczby Conwaya	403
Zakończenie Eudoxos, Dedekind, Conway	431
BIBLIOGRAFIA	437

WSTĘP

Ciągłość jest podstawowym pojęciem klasycznego rachunku różniczkowego. Ciągłość liczb rzeczywistych stanowi również punkt odniesienia dla nieklasycznych wersji rachunku różniczkowego opartych albo na rozszerzeniu ciała liczb rzeczywistych, albo na ograniczeniu środków logicznych. Na przykład analiza niestandardowa oraz analiza oparta na liczbach Conwaya rozwijają rachunek różniczkowy w ciałach niearchimedesowych. Natomiast teorie odrzucające prawo trychotomii, takie jak *infinitesimal smooth analysis* Johna Bella czy analiza konstruktywna Douglasa Bridgesa, przedstawiają ciągłość jako modyfikację zupełności w sensie Dedekinda lub Cauchy'ego.

Filozoficzne koncepcje ciągłości przyjmują za punkt odniesienia konstrukcje liczb rzeczywistych Cantora i Dedekinda i koncentrują się na dychotomii *ciągłe-dyskretne*.

W przedkładanej książce badamy ciągłość, biorąc pod uwagę konstrukcje i aksjomaty liczb rzeczywistych, a następnie ciała niearchimedesowe oraz teorie poprzedzające pierwsze konstrukcje liczb rzeczywistych, głównie grecką teorię proporcji oraz geometrię Kartezjusza. Pokazujemy, że pojęcie ciała uporządkowanego daje klucz do nowego spojrzenia na związek między liczbami rzeczywistymi a ciągłością, zwłaszcza że prawo trychotomii związane z koncepcją ciała uporządkowanego jest podstawową regułą matematyki greckiej, nowożytnej i współczesnej. W badaniach ciągłości uwzględniamy więc różne struktury klasycznej matematyki związane z rachunkiem różniczkowym oraz różne struktury znane z historii, które miały wpływ na rozwój rachunku różniczkowego; perspektywa ta obejmuje także struktury dyskretne w sensie porządkowym.

W książce często przywołujemy liczby hiperrealne, dlatego już w tym miejscu warto zaznaczyć, czym nasze podejście różni się od stanowiska autorów, którzy, znając analizę niestandardową, odnoszą się do historii i filozofii matematyki.

Abraham Robinson, mając na uwadze różnice między aksjomatem Archimedesesa w języku pierwszego i drugiego rzędu, tak pisze o matematyce w czasach Leibniza: „w owym czasie nie było języka formalnego, który by umożliwił precyzyjne wyrażenie i odróżnienie praw, które stosują się do liczb skończonych oraz systemów rozszerzonych zawierających też liczby nieskończenie małe i nieskończenie duże”.¹ W pracy pokazujemy, że odpowiednie reguły istniały, chociaż nie było języka formalnego w dzisiejszym rozumieniu. Newton traktował wielkości skończone jako jeden rodzaj, nieskończenie małe jako inny rodzaj i porównywał stosunki wielkości tego samego rodzaju w ramach euklidesowej teorii proporcji. Wielkości nieskończenie małe nie spełniają założeń teorii wielkości – tak jak je współcześnie rozumiemy – w szczególności aksjomatu Archimedesesa, niemniej Newton stosował do nich teorię proporcji, a następnie reguły ciała uporządkowanego.

Euler zanurzył wielkości skończone, nieskończenie małe i nieskończenie duże w jednej strukturze i odpowiednie formuły przekształcał zgodnie z regułami ciała uporządkowanego. W odróżnieniu od Newtona i Leibniza stosował prawo: odwrotność nieskończenie małej jest nieskończenie duża oraz odwrotność nieskończenie dużej jest nieskończenie mała. Fakt, że przyjmował wielkości nieskończenie małe, oznacza, iż rozwijał rachunek różniczkowy w ciele niearchimedesowym.

Bell natomiast tak pisze: „w latach 60. XX wieku Abraham Robinson, stosując techniki logiki matematycznej, stworzył analizę niestandardową, która rozszerza analizę matematyczną, obejmując wielkości nieskończenie małe i nieskończenie duże, i w której obowiązują prawa arytmetyki liczb rzeczywistych; idea ta w istocie pochodzi od Leibniza”.² W książce pokazujemy, że „prawa arytmetyki liczb rze-

¹ Zob. (Robinson 1966, 260).

² Zob. (Bell 2005, 7).

czywistych” to reguły ciała uporządkowanego, a także iż reguły te wywodzą się z *Elementów* Euklidesa i *Geometrii* Kartezjusza.

Robinson i Bell zauważają, że nieskończenie małe pozwalają rozwijać rachunek różniczkowy bez pojęcia granicy, co z kolei wyjaśnia, jak można było osiągnąć wyniki klasycznej analizy na długo przed wprowadzeniem liczb rzeczywistych. Wielkości nieskończenie małe czy relacja *leży nieskończenie blisko* nie wystarczą jednak, aby wyjaśnić, jak Newton i Leibniz obliczali pola figur ograniczonych przez krzywe. Historycy interpretują tę operację poprzez całkę Riemanna, która jest definiowana za pomocą granicy ciągu i aksjomatu ciągłości. Pokażemy, że sumowanie związane z obliczaniem pól można wyjaśnić przy użyciu sumy hiperskończonej – operacji definiowanej w analizie niestandardowej. Z wykorzystaniem sumy hiperskończonej można też zinterpretować zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego udowodnione przez Newtona, a także fundamentalne odkrycie Eulera zawarte w równaniu $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Spójrzmy pokrótce, w jaki sposób kwestie te wiążą się z ciągłością i liczbami rzeczywistymi.

1. Ciało uporządkowane

Działanie zgodne z porządkiem liniowym wywodzi się z geometrii greckiej, chociaż ani dodawanie, ani zgodność z porządkiem nie były wprost definiowane. W triadzie *dodawanie – porządek liniowy – zgodność z porządkiem* oczywistym pojęciem był porządek liniowy, który w matematyce i filozofii charakteryzowano jako przechodni i spełniający prawo trychotomii. Niemniej zgodność porządku z dodawaniem łatwo zidentyfikujemy chociażby w słynnym twierdzeniu Euklidesa, *Elementy*, I.29, gdzie po raz pierwszy zastosowano aksjomat o równoległych; w Księdze V *Elementów* zgodność porządku z dodawaniem

jest powszechną regułą, bo nierówności są tam przekształcane niemal w każdym twierdzeniu.³

W matematyce nowożytnej pojęcie ciała uporządkowanego leży u podstaw systemu Kartezjusza. Mnożenie, dzielenie i pierwiastkowanie odcinków, definiowane na pierwszych kartach *La Géométrie* (1637), są powszechnie znane. Kartezjusz wprowadza także *odcinki ujemne (fałszywe pierwiastki*, jak je nazwał), a przekształcając formuły, niejawnie stosuje reguły ciała uporządkowanego.⁴

W słynnym traktacie *Introductio in analysin infinitorum* (1748) Euler, podobnie jak Kartezjusz, stosuje reguły ciała uporządkowanego. Ponadto wprowadza liczby nieskończenie małe i pokazuje, że odwrotność nieskończenie małej jest nieskończenie duża, co oznacza, że przekształca formuły w ciele niearchimedesowym.⁵

Jeszcze w pracach Heinego, Cantora i Dedekinda reguły ciała uporządkowanego były stosowane niejawnie.⁶

Pod koniec XIX wieku, gdy Stolz, Weber i Hölder zinterpretowali pojęcie wielkości jako półgrupę archimedesową. Od tego momentu zaczęto wprost formułować zgodność porządku z dodawaniem oraz aksjomat Archimedesesa.⁷

Definicję ciała uporządkowanego wprowadził Hilbert w związku z arytmetyką odcinków oraz aksjomatyką liczb rzeczywistych jednocześnie w dwóch pracach: *Grundlagen der Geometrie* (1899) oraz *Über den Zahlbegriff* (1900). W pierwszej, przedstawiając aksjomaty geometrii euklidesowej, nawiązuje do systemu Euklidesa. W drugiej, odnosząc się do konstrukcji Cantora i Dedekinda, charakteryzuje liczby rzeczywiste jako największe ciało archimedesowe.

³ Zob. (Błaszczyk, Petiurenko 2021, 76, 55), (Błaszczyk, Mrówka 2013, 115–117).

⁴ Zob. (Błaszczyk 2024), (Błaszczyk, Mrówka 2015, 249).

⁵ Zob. (Błaszczyk, Petiurenko 2023).

⁶ Zob. (Błaszczyk, Fila 2023, § 9), (Błaszczyk 2007, 21–23, 34–35).

⁷ Zob. (Błaszczyk, Fila 2020, § 5–6).

To symboliczne zestawienie ukazuje, że wywodząca się z geometrii greckiej zgodność porządku z działaniami definiuje liczby rzeczywiste – podstawową strukturę współczesnej matematyki. Tak jak Grecy przekształcali wielkości (odcinki, kąty, figury, bryły) zgodnie z regułami grupy archimedesowej, tak współcześnie przekształcamy miary wielkości (długości, stopnie lub radiany, pola i objętości) w arytmetyce liczb rzeczywistych, czyli arytmetyce największego ciała archimedesowego.

2. Ciągłość

Ciągłość to obok aksjomatów ciała uporządkowanego druga kluczowa cecha liczb rzeczywistych. Metoda aksjomatyczna pozwala zdefiniować liczby rzeczywiste jako ciało uporządkowane w sposób ciągły, wiadomo bowiem, że istnieje jedno (z dokładnością do izomorfizmu) takie ciało.

W XX wieku aksjomat ciągłości był formułowany na kilkanaście sposobów. W analizie rzeczywistej do dzisiaj najpopularniejsza jest zasada supremum, w geometrii – zupełność w sensie Dedekinda, tj. *Żaden przekrój nie wyznacza luki*. Obie wersje są wyrażone w teorii porządku liniowego, są równoważne, ale nie stanowią jednoznacznej charakterystyki. Można wskazać nieizomorficzne zbiory liniowo uporządkowane i zupełne w sensie Dedekinda. Dopiero zupełność wraz z ośrodkowością charakteryzują porządek z dokładnością do izomorfizmu.

W związku z rachunkiem różniczkowym ciągłość jest rozpatrywana w teorii ciał uporządkowanych, gdzie ośrodkowość wyraża się równoważnymi wersjami aksjomatu Archimedesesa, np. gęstością ułamków czy liczb dwójkowych w ciele. W ciele uporządkowanym z zasady supremum wynika aksjomat Archimedesesa, dlatego w tym

kontekście zasada supremum czy zupełność w sensie Dedekinda jednoznacznie charakteryzują liczby rzeczywiste.

W XIX wieku w konstrukcjach liczb rzeczywistych ciągłość identyfikowano z zupełnością w sensie Cauchy’ego albo zupełnością w sensie Dedekinda. Szerzej, w praktyce matematycznej, ciągłość wiązano także z twierdzeniem: *Ciąg ograniczony posiada podciąg zbieżny* albo *Funkcja ciągła zmieniająca znak posiada pierwiastek*. Wszystkie te wersje łączą się z technikami klasycznego rachunku różniczkowego, takimi jak, ciągi liczbowe, kresy zbiorów, szeregi potęgowe, szeregi funkcyjne czy funkcje ciągłe. Ich cechą wspólną jest gwarancja istnienia pewnego punktu: granicy ciągu spełniającego warunek Cauchy’ego, kresu zbioru ograniczonego, punktu wyznaczającego przekrój, punktu skupienia ciągu czy miejsca zerowego funkcji zmieniającej znak.

Pojęcie ciała uporządkowanego pozwala ustalić zależności między wersjami ciągłości, w szczególności pokazać, że zupełność w sensie Cauchy’ego jest równoważna zupełności w sensie Dedekinda, ale przy założeniu aksjomatu Archimedesesa. Znaczenie tego ostatniego zauważono dopiero pod koniec XIX wieku, natomiast w praktyce matematycznej funkcjonował on pod postacią – oczywistego, jak sądzono – założenia $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

W XVIII wieku, gdy przyjmowano nieskończenie małe, odrzucono – *implicite* – aksjomat Archimedesesa.⁸ Przełomowe wyniki, takie jak rozwinięcie w szereg funkcji e^x , $\sin x$ czy $\arcsin x$, osiągnięto za pomocą relacji *leży nieskończenie blisko*, szeregów nieskończonych posiadających ostatni wyraz, wzoru dwumianowego, w którym wykładnik jest liczbą nieskończenie dużą lub ułamkiem, czy szeregów formalnych.⁹

⁸ Ciało uporządkowane, w którym istnieją nieskończenie małe, jest niearchimedesowe, zob. (Błaszczyk 2021).

⁹ Zob. (Błaszczyk, Petiurenko 2023).

We współczesnych wykładach akademickich wyniki te są rekonstruowane za pomocą klasycznego rachunku różniczkowego. Program arytmetyzacji analizy realizowany w pierwszej połowie XX wieku polegał właśnie na rekonstrukcji znanych wyników w nowo odkrytej arytmetyce liczb rzeczywistych, opierającej się na precyzyjnie sformułowanym aksjomacie ciągłości.

3. Technika matematyczna

Zestawienie XVIII-wiecznych odkryć z programem arytmetyzacji pozwala dostrzec ciągłość jako dopełnienie technik klasycznego rachunku różniczkowego. Ciągłość jako aksjomat wyróżniający liczby rzeczywiste w klasie ciał uporządkowanych to tylko jeden aspekt zagadnienia. Równie ważne jest to, że aksjomat ciągłości wyznacza strukturę, w której można stosować argumenty oparte na pojęciu granicy ciągów.

Spójrzmy na ciąg $(1 + \frac{1}{n})^n$; jako rosnący i ograniczony, na mocy zasady supremum, jest on zbieżny, a jego granicę oznaczamy jako e . Liczbę e wprowadził do matematyki Euler bez teorii granic i zasady supremum, przyjmując, że spełnia równanie $e^\omega = 1 + \omega$, gdzie ω jest nieskończenie małą, lub

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{N!},$$

gdzie N jest liczbą nieskończenie dużą, a suma nieskończonej ilości składników posiada ostatni wyraz (suma hiperskończona).

W tym przypadku, z jednej strony, mamy ciało niearchimedesowe z liczbami nieskończenie małymi i nieskończenie dużymi, z drugiej – techniki, takie jak relacja *leży nieskończenie blisko*, sumy hiperskończone, czy liczby zespolone w postaci trygonometrycznej z nieskończenie małymi kątami. Odpowiednikiem ciągłości jest tu suma

hiperskończona – operacja, która gwarantuje istnienie sumy nieskończenie wielu składników bez pojęcia granicy.¹⁰

Spójrzmy głębiej w historię. W matematyce greckiej ciągłość wiązano z pojęciem *megethos* (wielkość), które oznaczało odcinki, kąty, trójkąty, wielokąty i bryły. Poprzestańmy na odcinkach. Niektóre własności odcinków są zapisane w definicjach i aksjomatach *Elementów*, inne, na przykład nieskończona podzielność, wynikają z tego, że jeśli posłużymy się cyrklem i linijką, to proste i okręgi, przecinając się, wyznaczają nowe punkty. W związku z tym pokazuje się, że geometrię Euklidesa z Ksiąg I–IV można interpretować na płaszczyźnie kartezjańskiej nad ciałem uporządkowanym zamkniętym na operację pierwiastka, czyli ciałem euklidesowym – ta własność interpretuje przecinanie się okręgów oraz okręgów i prostych. W geometrii rozwijanej za pomocą cyrkla i linijki odpowiednikiem ciągłości jest istnienie pierwiastka, co opiszemy triadą.¹¹

ciało euklidesowe – istnienie pierwiastka – geometria rozwijana za pomocą cyrkla i linijki.

Subtelniejszą teorię odcinków znajdziemy w Księdze V *Elementów*, w której Euklides wprowadza dodatkowe założenia charakteryzujące porządek. Rozwijana tam teoria proporcji była podstawową techniką matematyki greckiej. Euklides stosował ją w geometrii, Archimedes, Heron czy Ptolemeusz – także w obliczeniach numerycznych.

Opisując teorię wielkości współczesnymi środkami, można stwierdzić, że odcinki tworzą półgrupę archimedesową, w której porządek jest zgodny z dodawaniem. Dodatkowy aksjomat, tzw. czwarta proporcjonalna, gwarantuje, że dla dowolnych trzech odcinków a, b, c

¹⁰ Zob. (Błaszczuk, Petiurenko 2023).

¹¹ Zob. (Błaszczuk, Petiurenko 2021, 91–92).

istnieje czwarty d , taki że zachodzi proporcja $a : b :: c : d$. W tym kontekście odpowiednikiem ciągłości jest czwarta proporcjonalna.

Zupełność liczb rzeczywistych oraz czwarta proporcjonalna to ogniwa łączące strukturę ze specyficzną techniką. Schematycznie opiszemy to następująco:

ciało uporządkowane – aksjomat ciągłości – teoria granic,

półgrupa archimedesowa – czwarta proporcjonalna – teoria proporcji.

I jeszcze przykład łączący rachunek różniczkowy z geometrią. W Księdze VI *Elementów* Euklides rozwija teorię figur podobnych na podstawie teorii proporcji. Teoria ta była powszechnie stosowana w matematyce greckiej, a później przez Kartezjusza i w XVII-wiecznym rachunku różniczkowym.

W matematyce współczesnej teoria figur podobnych jest zakodowana w tożsamościach trygonometrycznych. W matematyce szkolnej funkcje trygonometryczne definiuje się jako stosunki, natomiast w matematyce wyższej są one określane przez szeregi potęgowe: czy to bezpośrednio na mocy definicji, jak w analizie zespolonej, czy za pomocą twierdzenia Taylora, jak w analizie rzeczywistej.

Trygonometria jest przykładem techniki stosowanej w różnych kontekstach, przy czym najważniejsze znaczenie ma rachunek różniczkowy w wersji XVIII-wiecznej oraz w wersji opartej na liczbach rzeczywistych. W tym ostatnim przypadku trygonometria łączy podstawowe wyniki geometrii Euklidesa z arytmetyką liczb rzeczywistych i teorią granic.

W *Introductio in analysin infinitorum* Euler zdefiniował sinus i cosinus jako stosunek odpowiedniej przyprostokątnej do przeciwprostokątnej, a podnosząc do nieskończonej potęgi liczby zespolone w postaci trygonometrycznej, rozwinął sinus i cosinus w szereg hiperskończony. We współczesnym rachunku różniczkowym sinus i cosinus są definiowane jako ilorazy długości odpowiednich boków trójkąta

prostokątnego, a następnie rozwijane w szereg Taylora. Spójrzmy więc na definicje sinusa i cosinusa.

Fundamentalne twierdzenie teorii figur podobnych stanowi, że trójkąty o równych kątach są podobne (*Elementy*, VI.4), co oznacza, że stosunki boków lub ilorazy długości boków (gdy przestrzeń jest metryczna) zależą jedynie od kątów. W trygonometrii zależność ta jest stosowana do trójkątów prostokątnych, a wzorcowe trójkąty leżą na płaszczyźnie kartezjańskiej z wierzchołkami w punktach $(0, 0)$, $(\cos x, 0)$, $(\cos x, \sin x)$.

Dowód twierdzenia VI.4 podany przez Euklidesa łączy zasady przystawiania trójkątów, teorię równoległych, twierdzenie Talesa oraz twierdzenia Księgi V. W rachunku różniczkowym, w wersjach historycznych i współczesnej, zależność VI.4 jest przyjmowana jako oczywista, natomiast dowody tożsamości trygonometrycznych zakładają podstawowe twierdzenia *Elementów*: *Suma kątów w trójkącie wynosi π* (I.32), oraz twierdzenie Pitagorasa (I.47). Po rozwinięciu funkcji trygonometrycznych tożsamości te są dowodzone jako twierdzenia o szeregach.

Grecka teoria wielkości wymaga aksjomatu Archimedesesa i faktycznie jest on przyjęty jako definicja 4 Księgi V *Elementów*. Przy tym założeniu twierdzenie I.32 jest równoważne aksjomatowi równoległych.¹² Własność wyrażona w I.32 jest ogniwem łączącym strukturę odcinków z teorią figur podobnych. W ujęciu schematycznym otrzymamy:

teoria wielkości – suma kątów w trójkącie = π – figury podobne.

Twierdzenie I.32 odróżnia geometrię Euklidesa od geometrii hiperbolicznej w ramach tzw. geometrii absolutnej, podobnie jak

¹² Twierdzenie Pitagorasa także jest równoważne aksjomatowi równoległych, ale dowód wymaga pojęcia równości figur nieprzystających; zob. (Błaszczuk 2018).

aksjomat ciągłości wyróżnia liczby rzeczywiste w klasie ciał uporządkowanych.¹³

We współczesnym rachunku różniczkowym arytmetyka liczb rzeczywistych zastępuje teorię wielkości, a teoria figur podobnych jest zakodowana w tożsamościach trygonometrycznych, dlatego twierdzenie I.32 przedstawiamy jako ogniwo łączące liczby rzeczywiste z trygonometrią:

liczby rzeczywiste – suma kątów w trójkącie = π – trygonometria.

Schemat ten pokazuje, że pojęcie techniki nie sprowadza się do definicji w ramach teorii aksjomatycznej. Jeśli uwzględnimy znaczenie twierdzenia I.32, to trygonometria wykracza poza aksjomaty ciała liczb rzeczywistych, lub inaczej: twierdzenie I.32 nie wynika z aksjomatów liczb rzeczywistych, chociaż w rachunku różniczkowym odgrywa fundamentalną rolę.

Przechodząc od przykładów do ogólnego spojrzenia, stwierdzamy, że technika matematyczna to sposób przetwarzania formuł. W matematyce najnowszej są to formuły symboliczne, w greckiej – schematyczne zwroty językowe, a w okresie od XVII do XIX wieku – wersje pośrednie. Przyjmujemy, że istotą matematyki są techniki przetwarzania formuł.

Ciało uporządkowane to struktura algebraiczna. Pojęcie to stosujemy do interpretacji tekstów historycznych związanych z odpowiednim sposobem przekształcania formuł. Łącząc te dwie perspektywy, dochodzimy do wniosku, że ciało uporządkowane to nie tylko technika rozumiana jako sposób przetwarzania formuł, ale także technika, którą można opisać aksjomatami.

¹³ Z perspektywy *Elementów* geometria absolutna to twierdzenia I.1–28; w systemie Hilberta to teoria wyznaczona przez aksjomaty incydencji, porządku oraz przystawiania odcinków i kątów.

4. Ciało uporządkowane i geometria

Opisując teorię figur podobnych Euklidesa, wskazaliśmy zależności dedukcyjne: teoria wielkości (Księga V) – twierdzenie Talesa (VI.2) – twierdzenie *Trójkąty o równych kątach są podobne* (VI.4). W *Grundlagen der Geometrie* ten schemat jest znacząco inny. W miejsce teorii wielkości Hilbert wprowadza arytmetykę odcinków: odcinek jednostkowy, dodawanie, mnożenie, dzielenie, przemienność i łączność, oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania. Odcinek jednostkowy został wyróżniony bez związku z jakąś własnością geometryczną. Z tym jednym wyjątkiem arytmetyka odcinków jest rozwijana w ramach geometrii Euklidesa, w szczególności w dowodzie przemienności stosowane jest twierdzenie odwrotne do III.21.¹⁴

Proporcję $a : b = c : d$ Hilbert definiuje jako równość iloczynów $a \cdot d = c \cdot b$.¹⁵ Następnie przy wykorzystaniu arytmetyki odcinków oraz kolejnego twierdzenia Euklidesa: *Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży na przecięciu dwusiecznych*, dowodzi VI.4 i jako wniosek otrzymuje twierdzenie Talesa.¹⁶

Rozwiązanie to wpłynęło na XX-wieczną filozofię i metodologię matematyki. Dla nas jednak ważniejsze jest, że w historii zależność między arytmetyką odcinków a twierdzeniem Talesa była inna.

Kartezjusz przyjął twierdzenie Talesa za oczywiste i na tej podstawie wprowadził arytmetykę odcinków. Formuły, w których zmienne i stałe oznaczały odcinki, przekształcał zgodnie z regułami ciała uporządkowanego, ale nie dowodził tych reguł.¹⁷ Ten sposób

¹⁴ Twierdzenie III.21 można tak sparafrazować: *W czworokącie wpisanym w okrąg kąty oparte na tym samym łuku są równe*; odwrotne do III.21 oznacza, że cztery punkty spełniające odpowiedni warunek dotyczący kątów leżą na okręgu.

¹⁵ W arytmetyce odcinków $a : b = c : d$ oznacza także równość $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

¹⁶ Zob. (Błaszczuk, Petiurenko 2025).

¹⁷ Zob. (Błaszczuk 2024).

przekształcania formuł był obecny w matematyce przez następne 350 lat. Stosowali go Newton, Euler i matematycy rozwijający analizę matematyczną w paradygmacie Weierstrassa. Jest on także wykorzystywany w matematyce współczesnej.

Hilbert wskazał, że niektóre z tych reguł można przyjąć bez dowodu, w szczególności bez związku z geometrią, jako aksjomaty ciała uporządkowanego, a pozostałe wyprowadzić z aksjomatów. Rozwiązanie to nie zmieniło samych reguł, ale zmieniło ich status: wcześniej stosowane niejawnie, zostały przez Hilberta zidentyfikowane jako aksjomaty lub twierdzenia teorii ciał uporządkowanych. Odkrycie to otworzyło nowy sposób rozwijania filozofii matematyki, chociaż nie wpłynęło na rozwój matematyki.

Podobnie było z trygonometrią. Kartezjusz przyjął twierdzenie Euklidesa VI.4 za oczywiste. Formuły opisujące zależności geometryczne tworzył na podstawie teorii proporcji; proporcje $a : b :: c : d$ zamieniał – bez uzasadnienia – na równości iloczynów $a \cdot d = c \cdot b$; otrzymane formuły przekształcał dalej zgodnie z regułami ciała uporządkowanego. Tak samo postępował Newton. Euler stosował teorię figur podobnych zakodowaną w tożsamościach trygonometrycznych albo w reprezentacji trygonometrycznej liczb zespolonych i połączył ją z arytmetyką ciała niearchimedesowego. W XIX i XX wieku teoria Euklidesa funkcjonowała w analizie matematycznej w postaci trygonometrii w połączeniu z arytmetyką liczb rzeczywistych.

Hilbert zmienił więc podstawy teorii figur podobnych: z geometrii Euklidesa wyprowadził arytmetykę odcinków; korzystając z reguł ciała przemienne, udowodnił VI.4; a dowodząc twierdzenia Talesa, stosował technikę, którą Kartezjusz wyprowadził z twierdzenia Talesa. To porównanie można ująć w prosty schemat:

Kartezjusz: geometria – teoria wielkości – twierdzenia VI.2, VI.4 – arytmetyka odcinków;

Hilbert: geometria – arytmetyka odcinków – twierdzenie VI.4 – twierdzenie VI.2;

gdzie w przypadku Kartezjusza geometria oznacza *Elementy*, Księgi I–IV, z kolei u Hilberta – geometrię euklidesową, bez aksjomatu Archimedesesa, czyli aksjomaty incydencji, porządku, przystawiania i aksjomat Playfaiera.

Droga Hilberta akcentuje dedukcję, droga Kartezjusza – przekształcanie formuł.

Z historii matematyki płynie również taki wniosek: znaczenie odkryć matematycznych przekracza intencje autora. Hilbert nie wprowadził nowych reguł przekształcania formuł, ale zmieniał ich status. Jego program podstaw geometrii zapoczątkował mechaniczne dowodzenie twierdzeń, które możemy zaliczyć do szerszego projektu przekształcania formuł, znanego obecnie jako obliczenia symboliczne.¹⁸

5. Ciągłość i ciała niearchimedesowe

Sięgnijmy jeszcze raz do *La Géométrie*. Na podstawie twierdzeń Euklidesa VI.2 oraz II.14 Kartezjusz wprowadził mnożenie i dzielenie odcinków oraz operację pierwiastka. Formuły, w których zmienne x, y oznaczały odcinki, przekształcał zgodnie z regułami ciała uporządkowanego, gdzie istnienie czwartej proporcjonalnej jest prostą konsekwencją arytmetyki ciała przemienne. W ten sposób konstrukcje za pomocą cyrkla i linijki oraz twierdzenia teorii proporcji zostały ujęte w reguły ciała uporządkowanego zamkniętego na operację pierwiastka.

W *La Géométrie* sformułowanie problemu polegało na wyrażeniu zależności geometrycznych odpowiednim wielomianem, rozwiąza-

¹⁸ O mechanicznym dowodzeniu twierdzeń w *Grundlagen der Geometrie* pisze Wen-tsün Wu; zob. (Wu 1994, rozdz. III).

nie – na konstrukcji pierwiastków wielomianu. W konstrukcjach Kartezjusz stosował proste, okręgi, parabole, ogólnie – krzywe algebraiczne i zakładał przy tym istnienie punktów przecięcia rozważanych krzywych. Aksjomaty ciała rzeczywiście domkniętego, w szczególności zamkniętość na operację pierwiastka oraz to, że wielomiany nieparzystego stopnia mają pierwiastki, charakteryzują geometrię rozwijaną w *La Géométrie*.

Z czasem zakres technik matematycznych wykroczył poza wyznaczanie pierwiastków wielomianów. Newton wprowadził szeregi nieskończone, Euler – sumy hiperskończone. Newton połączył technikę szeregów z proporcją Euklidesa, Euler – łączył liczby nieskończenie małe i nieskończenie duże z trygonometrią. Rozwiązania te doprowadziły do tak spektakularnych wyników, jak rozwinięcia funkcji sinus i arcsinus w szereg.

Na przełomie XIX i XX wieku wyniki XVIII-wiecznej analizy, zwłaszcza spektakularne osiągnięcia Newtona i Eulera, zrekonstruowano w ciele liczb rzeczywistych za pomocą ciągów liczbowych i aksjomatu ciągłości. Okazało się także, że w ciele liczb rzeczywistych można zrekonstruować geometrię Euklidesa oraz Kartezjusza, bo liczby rzeczywiste są i ciałem euklidesowym, i rzeczywiście domkniętym. Na początku XX wieku odkryto niearchimedesowe ciała euklidesowe i rzeczywiście domknięte.

Interpretacje Euklidesa w strukturach niearchimedesowych nie wiążą się ze specyficznymi technikami. Przystawanie trójkątów, konstrukcje za pomocą cyrkla i linijki albo konstrukcje pierwiastków wielomianów są tak samo prowadzone na płaszczyźnie archimedesowej, jak niearchimedesowej. Pewnym problemem jest natomiast teoria proporcji Euklidesa, która w oryginalnej wersji wymaga aksjomatu Archimedesowego, dlatego właśnie Hilbert wprowadził proporcję niezależną od tego aksjomatu.

W przypadku Newtona i Eulera założenie o istnieniu nieskończenie małych odcinków i kątów wiąże się ze specyficznymi technikami. Interpretacje w ciele liczb rzeczywistych ograniczają się do rekonstrukcji wyników – technik zależnych od liczb nieskończenie małych i nieskończenie dużych nie można zrekonstruować.

Spośród teorii rozwiniętych w XX wieku, które pozwalają spojrzeć na liczby rzeczywiste z nowej perspektywy, omawiamy: teorię ciał rzeczywiście domkniętych, ciał topologicznych, analizę niestandardową oraz liczby Conwaya. Teorie te oraz wcześniejsze, tj. Euklidesa, Kartezjusza, Newtona, Eulera, referujemy na podstawie tekstów źródłowych zebranych w książce – P. Błaszczyk, K. Mrówka, J. Pogonowski (red.), *Ciągłość i liczby rzeczywiste: teksty źródłowe* (2025).

6. Shapiro, Hellman, *Historia ciągłości z perspektywy filozoficznej i matematycznej*

Raz na kilka dekad ukazuje się monografia opisująca ciągłość w perspektywie obejmującej matematykę, historię i filozofię. Najnowsza książka tego typu to praca zbiorowa pod redakcją Stewarta Shapiro i Geoffreya Hellmana, *The History of Continua. Philosophical and Mathematical Perspective* (2021). Na początku XXI wieku ukazała się podobna monografia autorstwa Johna Bella, *The Continuous and the Infinitesimal* (2005). W polskiej literaturze do tego nurtu należą: *Ciągłość. Szkice z historii matematyki* Jerzego Mioduszewskiego (1996), książka opisująca ciągłość z perspektywy historii matematyki, oraz *Paradoksy* Piotra Łukowskiego (2006), traktująca o ciągłości w kontekście filozofii.

Badania wiążące historię matematyki z filozofią zapoczątkowała monografia Carla Boyera, *The Concepts of the Calculus: A Critical*

and Historical Discussion of the Derivative and the Integral (1949), której kolejne wydanie ukazało się pod tytułem *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (1959). Boyer wyróżnił w niej sześć kluczowych etapów historii ciągłości:

1. Starożytność – paradoksy Zenona z Elei, Arystotelesa definicja ciągłości.

2. Średniowiecze – debaty na temat ciągłości w ramach filozofii naturalnej.

3. XVI i XVII wiek – technika wielkości niepodzielnych i nieskończenie małych.

4. Newton i Leibniz – narodziny rachunku różniczkowego.

5. XVIII wiek – okres niepewności co do podstaw.

6. XIX wiek – klasyczne konstrukcje liczb rzeczywistych i definicja Dedekinda jako zwieńczenie historii ciągłości.

Koncepcja ta była w znacznej mierze oparta na studiach tekstów średniowiecznych, które Boyer publikował w latach 30., i nie dotyczyła matematyki XX wieku.

Model wypracowany przez Boyera jest powtarzany przez większość badaczy w odniesieniu do teorii rozwiniętych do końca XIX wieku. Bell oraz Shapiro i Hellman uzupełniają go o nieklasyczne koncepcje ciągłości rozwinięte przez Brouwera, Weyla, Peirce'a. Faktycznie w filozofii nieustająco żywy jest nurt wiążący ciągłość z jednością w opozycji do koncepcji Cantora i Dedekinda, które redukują – w ocenie krytyków – ciągłość do zbioru punktów, co ma sprawiać, że kontinuum klasycznej matematyki jest tworem dyskretnym.

Nasza perspektywa jest znacząco odmienna.

Po pierwsze, za kluczowe uznajemy pojęcie ciała uporządkowanego, podczas gdy żadna z dotychczasowych monografii nie przypisuje mu istotnej roli.

Po drugie, przyjmujemy, że koncepcja ciągłości jest rozstrzygnięta na poziomie czysto technicznych rozwiązań matematycznych.

Z tego powodu, w przeciwieństwie do opracowań poświęconych filozofii greckiej, koncentrujemy się wyłącznie na matematyce greckiej i pomijamy średniowieczne debaty dotyczące ciągłości.

Po trzecie, spośród autorów nowożytnych szczególnie wyróżniamy Kartezjusza i Eulera – mimo że nie pisali bezpośrednio o ciągłości, znacząco przyczynili się do rozwoju pojęcia ciała uporządkowanego, a ich wkład bywa zazwyczaj traktowany marginalnie.

Po czwarte, pokazujemy, że prace Newtona można interpretować bez pojęcia pochodnej i całki.

Po piąte, w kontekście koncepcji XX-wiecznych, żadne dotychczasowe opracowanie nie doceniło znaczenia pracy Pontriagina poświęconej ciałom topologicznym. My natomiast przedstawiamy ją jako ukoronowanie techniki ciągów, która stanowi fundament klasycznego rachunku różniczkowego.

1. Spójrzmy teraz z naszkicowanej perspektywy na książkę pod redakcją Shapiro i Hellmana. Praca składa się z osiemnastu rozdziałów:

1. B. Sattler, *Divisibility and Indivisibility: The Notion of Continuity from Presocratics to Aristotle*.
2. O. Harari, *Contiguity, Continuity and Continuous Change: Alexander of Aphrodisias on Aristotle*.
3. E.D. Sylla, *Infinity and Continuity: Thomas Bradwardine and his Contemporaries*.
4. S. Levey, *Continuous Extension and Indivisibles in Galileo*.
5. D.M. Jesseph, *The Indivisibles of the Continuum: Seventeenth-Century Adventures in Infinitesimal Mathematics*.
6. S. Levey, *The Continuous, the Infinitely Small, and the Law of Continuity in Leibniz*.

-
7. D. Sutherland, *Continuity and Intuition in Eighteenth-Century Analysis and in Kant*.
 8. P. Rusnock, *Bolzano on Continuity*.
 9. A. Kanamori, *Cantor and Continuity*.
 10. E. Haffner, D. Schlimm, *Dedekind on Continuity*.
 11. Ch. McCarty, *What is Number? Continua, Magnitudes, Quantities*.
 12. Ch. McCarty, *Continuity and Intuitionism*.
 13. P. Vargas, M.E. Moore, *Peircean Continuum*.
 14. A.C. Varzi, *Points as Higher-Order Constructs: Whitehead's Method of Extensive Abstraction*.
 15. P. Koellner, *The Predicative Conception of the Continuum*.
 16. G. Gerla, *Point-Free Continuum*.
 17. J.L. Bell, *Intuitionistic/Constructive Accounts of the Continuum Today*.
 18. P. Ehrlich, *Contemporary Infinitesimalist Theories of Continua and Their Late Nineteenth- and Early Twentieth-Century Forerunners*.

Wybór tematów powiela schemat Boyera. Greckie i średnio-wieczne teorie kontinuum są omawiane przez pryzmat koncepcji Arystotelesa: *Ciągle jest to, co jest podzielne na podzielne części* (rozdz. 1–3). Teorie z XVI i XVII wieku są oceniane pod kątem tego, czy

kontinuum składa się z niepodzielnych części, czy zawiera nieskończenie małe (rozd. 4–6). Z kolei rozdziały 8–10 omawiają konstrukcje liczb rzeczywistych z roku 1872.

Model Boyera jest oczywiście uzupełniony o koncepcje z XX wieku. W rozdziale 17 przedstawione są wersje rachunku różniczkowego oparte na logice intuicjonistycznej: kontinuum Brouwera, teoria funkcji określonych na dziedzinie zawierającej nilpotentne nieskończenie małe, analiza konstruktywna Bishopa i Bridgesa. Rozdział 18 traktuje o ciałach niearchimedesowych. Rozdziały 11–16 omawiają XX-wieczne filozoficzne koncepcje kontinuum, które nie wiążą się z jakimiś specyficznymi technikami i nie wpłynęły na matematykę.

Podobnie jak u Boyera, niewiele miejsca poświęcono matematyce greckiej, Kartezjuszowi oraz Eulerowi; inaczej niż u Boyera, nie znaleziono miejsca dla Newtona. Kwestie te zostały potraktowane zupełnie incydentalnie w rozdziałach 1, 6 i 7. W monografii nie ma rozdziałów poświęconych aksjomatom liczb rzeczywistych, teorii ciał rzeczywiście domkniętych ani geometrii.

2. Przewodnim motywem monografii jest pytanie, czy kontinuum składa się z części podzielnych w nieskończoność, czy z części niepodzielnych. We *Wstępie* czytamy:

Our view is that there is no single, monolithic property of continuity. It is more of a cluster concept that can be sharpened, and developed rigorously, in mutually incompatible ways. Early on, we were led to the Aristotelian idea that continua are not composed of points, or indivisible. In terms of contemporary metaphysics, the theme is that continua are gunky: every part of a continuous substance has a proper part. This, of course, is not sanctioned in the contemporary Dedekind–Cantor account, nor, arguably, in the intuitionistic accounts either [...].

The bulk of our project in *Varieties of continua* was to develop various gunky, or point-free, accounts of continuity: one-dimensional and two (and three-) dimensional Euclidean and non-Euclidean, with actual and without actual infinity [...]. We went on to compare these accounts with their contemporary counterparts on various mathematical, logical and metaphysical grounds (Shapiro, Hellman 2021, 1–2).

Od czasów Euklidesa matematyczna historia kontinuum rozgrywa się poza filozoficznym sporem o to, czy kontinuum składa się z części podzielnych w nieskończoność, czy niepodzielnych monad lub punktów.

W *Elementach* przecięcie prostych i okręgów prowadzi do pojawienia się punktu, jednak teza, że prosta składa się z punktów, nie należy do geometrii. W systemie Hilberta punkty i proste są pojęciami pierwotnymi, co oznacza, że prosta nie redukuje się do zbioru punktów.

Teza, że oś liczb rzeczywistych składa się z punktów – którą Shapiro i Hellman nazywają tezą Cantora–Dedekinda – także nie należy do aksjomatów liczb rzeczywistych. Owszem, konstrukcje liczb rzeczywistych, podobnie jak modele geometrii euklidesowej, są zbiorami. Jednak teoriomnogościowa interpretacja pojęć *liczba* oraz *liczby rzeczywiste* nie przesądza interpretacji pojęć *całość* i *część*.

Shapiro i Hellmann przyjmują – co zostało wyraźnie stwierdzone w rozdziale poświęconym Leibnizowi – że *całość–część* to relacja *zbiór–podzbiór*. W innym miejscu pokazaliśmy jednak, że słynny aksjomat *Całość jest większa od części* można interpretować jako zgodność porządku z dodawaniem, a zatem jako aksjomat teorii ciał uporządkowanych.¹⁹

¹⁹ Zob. (Błaszczyk 2021).

3. Spójrzmy teraz, jak w monografii przedstawione są wątki euklidesowe. Barbara Sattler pisze:

[a] While mathematical practice in ancient times provided some inspiration for the debate about continuity in early Greek thinking up to the time of Aristotle, mathematics is not where the main debate – as far as has been handed down to us – happens. Rather, the discussion about continuity is a debate within metaphysics and natural philosophy (Sattler 2021, 6).

Naszym zdaniem najistotniejsze kwestie dotyczące kontinuum zostały rozstrzygnięte w ramach samej matematyki; debaty filozoficzne nie miały wpływu na jej rozwój i przeminęły wraz z filozofią Arystotelesa.

[b] While not explicitly discussed, this idea of magnitudes being divisible without end seems to have been taken so much for granted by mathematicians that they do not have to pay it any special attention. It is clear that they assume crossing lines and similar constructions, there is no reflection of atomistic worries such as that a line crossing another line would need to go between two atoms; rather infinite divisibility just seems to be presupposed (Sattler 2021, 14).

Autorka myli tu założenie geometrii Euklidesa o istnieniu punktów przecięcia prostych i okręgów z nieskończoną podzielnością odcinka. Teoria Arystotelesa nie odnosi się do pierwszej kwestii, ponieważ opisuje ona ciągłość odcinka bez związku z konstrukcjami geometrycznymi, natomiast nieskończona podzielność odcinka jest

w *Elementach* dowodzona w twierdzeniach I.10, VI.9 oraz zawarta w jednym z aksjomatów teorii wielkości.²⁰

[c] The mathematical understanding of continuity in the sense of infinite divisibility is presupposed by any geometrical operation that involves the mathematical bisection of a line, surface, or body (Sattler 2021, 14).

To ciąg dalszy tego samego nieporozumienia: teoria Arystotelesa nie odnosi się do istnienia punktów przecięcia prostych i okręgów.

W geometrii współczesnej, gdy ciągłość jest wyrażona za pomocą przekrojów Dedekinda, bisekcja odcinka odgrywa fundamentalną rolę w dowodzie ciągłości prostej. Wówczas bowiem obok aksjomatu Dedekinda należy pokazać, że prosta jest przestrzenią ośrodkową; rolę ośrodka pełnią liczby dwójkowe, które wprowadza się właśnie dzięki bisekcji.

Samuel Levey w rozdziale poświęconym Leibnizowi słusznie zauważa, że definicja Euklidesa V.4 odpowiada aksjomatowi Archimidesa, dalej jednak pisze:

Such quantities [nieskończenie małe i nieskończenie duże – P.B.] ‘incomparable’ to ordinary finite magnitudes – i.e., magnitudes given to us in perception – are thus ruled out. This finitism is widely recognized in ancient and early mathematics as a point of rigour in demonstration, although use of infinity or infinitesimals in the less exacting contexts of experiment and discovery was also familiar (Levey 2021, 124).

W księgach I–IV *Elementów* nie ma niczego, co usprawiedliwia stwierdzenie, że aksjomaty geometrii wykluczają nieskończenie małe.

²⁰ Zob. niżej rozdz I, § 4, aksjomat (E4).

Od czasu *Grundlagen der Geometrie* Hilberta wiadomo, że modelami geometrii Euklidesa są także płaszczyzny niearchimedesowe; aksjomat Archimedesusa jest wprowadzony dopiero w Księdze V jako założenie teorii proporcji.

Nieporozumienie na temat roli aksjomatu Archimedesusa w systemie Euklidesa rozciąga się na pozostałe rozdziały. I tak Philip Ehrlich pisze:

Just as ordered fields of real numbers arose in conjunction with the study of Euclidean geometry, it was from the study of non-Archimedean geometry that non-Archimedean ordered fields emerged (Ehrlich 2021, 506).

Konstrukcje, a później aksjomaty liczb rzeczywistych wprowadzono w związku z rekonstrukcją rachunku różniczkowego opartą na teorii granic, a nie w związku z podstawami geometrii. Newton – jak pokazujemy – stosuje proporcje Euklidesa do wielkości niearchimedesowych. Euler jawnie stosuje ciało niearchimedesowe w *Introductio in analysin infinitorum* także w związku z rachunkiem różniczkowym.

Akihiro Kanamori w rozdziale poświęconym Cantorowi pisze:

Cantor next went about correlating his *Zahlengrossen* with points on the straight line – so yes, he was inherently committed to the continuum as consisting extensionally of points. Once an origin *o* and a unit distance have been specified, the rational numbers correlate to points according to a ratio. [...] We today so readily identify real numbers with points on the straight line, that Cantor's initial identification may seem jejune or at best a pragmatic correlation. However, one can try to approach hermeneutic interpretation by seeing how Cantor in his day is taking the straight line *qua* linear continuum in a prior

sense, one through which his *Zahlengrossen* are to gain ‘a certain objectivity’. A plausible thinking is that Cantor’s axiom is analogous to Church’s Thesis, correlating an informal notion with a formal one (Kanamori 2021, 226–227).

Cantor, owszem, łączy dwa formalne pojęcia: z jednej strony ówczesne rozumienie linii prostej w geometrii Euklidesa, związane z pojęciem *ratio*, a z drugiej – liczb rzeczywistych, powiązanych z pojęciem *unit distance*.

Podział na liczby wymierne i niewymierne – uznawany za oczywisty w pierwszych konstrukcjach liczb rzeczywistych – opiera się na specyficznej interpretacji greckich pojęć współmierne–niewspółmierne.²¹

Wyraźnym nawiązaniem do Euklidesa jest utożsamienie liczb wymiernych z punktami na prostej, oparte na twierdzeniu Talesa. Dla współczesnego czytelnika wątek ten może się okazać nie do końca przejrzysty, ponieważ geometria porzuciła grecką teorię proporcji, zastępując ją pojęciem liczb rzeczywistych lub arytmetyką odcinków.

Kanamori, nawiązując do geometrii, pisze dalej:

Dedekind’s principle has been deployed as an axiom to rigorize Euclidean geometry (Kanamori 2021, 233).

Aksjomat ciągłości – powtórzmy – nie jest wprowadzany do geometrii Euklidesa z uwagi na wypełnienie luk logicznych. W wykładzie Borsuka i Szmielew jest on stosowany w dowodzie kategoryczności systemu, natomiast w ujęciu Hilberta modele płaszczyzny Euklidesa

²¹ Zob. niżej rozdz. VII, § 2, pkt. 4–5.

mogą być archimedesowe lub niearchimedesowe. W wykładzie Greenberga, na który wskazuje Kanamori, aksjomat ciągłości pełni ważną rolę, ale w wykładzie geometrii hiperbolicznej.²²

Na tym zakończymy przegląd monografii poświęconych ciągłości. W dalszej części pracy przedstawimy naszą koncepcję ciągłości.

²² Więcej na temat monografii (Shapiro, Hellman 2021) w (Błaszczuk 2022). Natomiast w rozdziale VII, § 4 niniejszego opracowania komentujemy rozdziały tej monografii poświęcone liczbom rzeczywistym.

Rozdział I

Starożytna Grecja